

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de master en mathématiques

intitulé
Sur des GBVP non locales de type elliptique dans les
espaces L^p

Présenté par
BECHAR Ibrahim
BOUZIANE Omar

Soutenu le 25 /05/2016

Devant le jury

Mr	Examineur	U. MOSTAGANEM.
Mr MEDEGHRI Ahmed	Encadreur	U. MOSTAGANEM.

Table des matières

Introduction	i
1 Rappels	2
1.1 Opérateurs linéaires fermés	2
1.2 Les semi-groupes	3
1.2.1 Semi-groupes différentiables	4
1.2.2 Semi-groupes analytiques	4
1.2.3 Semi-groupes analytiques généralisés	4
1.3 Les espaces d'interpolation	5
1.4 Puissances fractionnaires d'opérateurs	6
1.4.1 Puissances fractionnaires avec partie réelle positive	6
1.4.2 Puissances fractionnaires avec partie réelle quelconque	7
1.5 La théorie des sommes d'opérateurs	7
1.5.1 Approche de Da Prato et Grisvard	7
1.5.2 Approche de Dore et Venni	9
2 Représentation de la solution	13
2.1 Hypothèses	13
2.2 Représentation de la solution	15
3 Régularité de la solution	19

3.1	Lemmes techniques :	19
3.2	Régularité de la solution	22
3.3	Resultats	25
4	Hypothèse d'inversibilité	28
4.1	Le cas particulier $H = \alpha(-Q)^k$	28
4.2	Problème avec paramètre spectral	30
5	Application	33
	Conclusion	38
	Bibliographie	38

INTRODUCTION

La plupart des phénomènes se modélisent sous forme d'un système différentiel d'un certain type. En particulier, les problèmes elliptiques avec conditions aux limites générales et non locales ; par exemple, un problème provenant de la dynamique de population et qui est modélisé par le système non linéaire suivant :

$$(P_{enl}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \Delta_{x,y}(x, y, t) + F(u(x, y, t)), (x, y, t) \in \Omega \times (0, T). \\ u(x, y, 0) = v(x, y); (x, y) \in \Omega. \\ u(0, y, t) = u_0(y, t). \\ u(1, y, t) + \int_0^y \phi(\xi, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, \xi, t) d\xi = u_{1,0}(y, t) \dots \dots \dots (*) \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0. \end{array} \right.$$

où : $u(x, y, t)$ c'est la densité de la population à l'instant t .

$F(u(x, y, t))$ représente la croissance et peut s'écrire sous la forme :

$$F(u) = ru(1 - \frac{u}{K})$$

$\phi(\xi, t)$ est une fonction à poid donnée et $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$.

(*) est une condition au limite non-locale.

pour plus de details, voir [3], [8] et [11]

Ce problème s'écrit sous la forme statique linéairisée suivante :

$$(P_{sli}) \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{x,y}u(x, y) \pm \lambda u(x, y) = f(x, y), (x, y) \in \Omega. \\ u(0, y) = u_0(y). \\ u(1, y) + \int_0^y \phi(\xi) \frac{\partial u}{\partial x}(0, \xi) d\xi = u_{1,0}(y). \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0. \end{array} \right.$$

avec λ est un nombre positif obtenu de la technique de linéairisation.

Il est donc important de trouver la régularité optimale de ce dernier problème pour résoudre (P_{enl}) en utilisant le théorème du point fixe.

On veut maintenant réécrire (P_{sli}) sous forme opérationnelle.

Pour cela, on définit sur $X = L^p(0, 1); p \in]1, +\infty[$, l'opérateur A par :

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(0, 1) \cap W_0^{1,p}(0, 1). \\ (A\varphi)(y) = \varphi''(y) \pm \lambda\varphi. \end{cases}$$

.

et en utilisant la notation usuelle :

$$u(x, y) = u(x)(y).$$

on obtient le problème abstrait suivant :

$$(P_A) \begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x); \text{presque partout sur }]0, 1[. \\ u(0) = u_0. \\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}. \end{cases}$$

avec H est un opérateur linéaire sur X de domaine $D(H)$ et qui vérifie :

$$H(\varphi) = \psi \text{ où } \psi(y) = \int_0^y \phi(\xi)\varphi(\xi)d\xi ; \varphi \in D(H).$$

Dans ce mémoire qui est intitulé " sur des GBVP non locales de type elliptique sur les espace L^p ", on étudie le dernier problème sur l'espace $L^p(0, 1; X)$ pour $p \in]1, +\infty[$ et X un espace de Banach complexe; en trouvant des conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles notre problème admet :

-une solution stricte qui est une fonction :

$$u \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(A)).$$

et vérifie le problème.

-une solution semi-stricte qui est une fonction u satisfaisant :

$$\forall \varepsilon \in]0, 1[; u \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A)) \cap W^{1,p}(0, 1; X).$$

Ce travail est une synthèse de l'article [7]; "Nonlocal General Boundary Value Problems of Elliptic Type in L^p Cases", de : Houari Hammou, Rabah Labbas, Stephane Maingot et Ahmed Medeghri, paru dans le journal "Mediterranean Journal of Mathematics" en 2015,

les résultats obtenus complètent ceux obtenus dans le cadre Holderien par les même auteurs (voir [6]).

Cette synthèse est composée de cinq chapitres.

Le premier chapitre est consacré à des rappels d'usage sur les outils mathématiques utilisés dans ce travail : on introduit les notions d'opérateurs linéaires fermés, les semi-groupes, les espaces d'interpolation et les puissances fractionnaires d'opérateurs, et ainsi que les principaux théorèmes de la théorie des sommes d'opérateurs.

Dans le deuxième chapitre, on représente la solution du problème posé d'une façon détaillée à partir des hypothèses supposées et en utilisant les semi-groupes et les puissances fractionnaires d'opérateurs.

Au troisième chapitre, on étudie la régularité de cette solution à l'aide des lemmes techniques qui sont basés sur les espaces d'interpolation et l'application des résultats de Dore et Venni aux problèmes de Cauchy. On donne des conditions nécessaires et suffisantes sur les données.

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à l'hypothèse d'inversibilité de l'opérateur Λ déterminant de notre problème ;

-Dans un premier temps, on donne des cas particuliers de H en fonction de A , où elle est vérifiée : $(H = \alpha(-\sqrt{-A})^k \text{ où } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \operatorname{Re} \alpha \geq 0; k = 0 \text{ où } k = 1)$).

-Dans un deuxième temps, cette hypothèse n'est plus supposée mais on ajoute un paramètre spectral ω dans l'équation du problème, qui permet d'obtenir un opérateur Λ_ω inversible pour ω assez grand.

Le cinquième chapitre c'est une partie d'application et d'illustration de ce qu'on a traité dans les chapitres qui précèdent sous forme d'exemples de problème concrets d'EDP.

Le mémoire se termine par une bibliographie relative à l'ensemble des travaux présentés ici.

Rappels

Dans ce chapitre, on donne quelques notions de base utilisées dans ce travail.

1.1 Opérateurs linéaires fermés

X désigne un espace de Banach.

On rappelle que A est un opérateur linéaire sur un espace de Banach X , si et seulement si, c'est une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel de X (appelé domaine de définition de A et noté $D(A)$) à valeurs dans X .

De plus ;

1. A est dit borné si :

$$D(A) = X \text{ et } \exists c > 0 : \|A\xi\|_X \leq c \|\xi\|_X .$$

et on écrit $A \in \mathcal{L}(X)$.

2. A est dit fermé, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \rightarrow x \\ Ax_n \rightarrow y \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in D(A) \\ Ax = y \end{array} \right.$$

3. A est dit fermable, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \rightarrow 0 \\ Ax_n \rightarrow y \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad y = 0.$$

Les convergence des suites x_n et Ax_n sont au sens de la norme de l'espace X .

Définition 1.1.1 Soient X un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(X)$, on appelle :

- spectre de A , l'ensemble $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tq } (A - \lambda I) \text{ non inversible}\}$.
- ensemble résolvant de A , le complémentaire du $\sigma(A)$ dans $\mathbb{C}$ noté $\rho(A)$. c'est-à-dire :
 $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tq } (A - \lambda I) \text{ inversible}\}$.
- résolvante de A , l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ pour $\lambda \in \rho(A)$.

1.2 Les semi-groupes

Définition 1.2.1 Soit X un espace de Banach. On dit que la famille $(G(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X constitue un semi-groupe si :

1. $G(0) = I_X$.
2. $\forall t, s \geq 0 ; G(t + s) = G(t)G(s)$.

Définition 1.2.2 On dit qu'un semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ est fortement continu, si et seulement si, pour tout $x \in X$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & X \\ t & \mapsto & G(t) \end{array}$$

est continue, c'est-à-dire :

$$\forall x \in X; \lim_{t \rightarrow 0} \|G(t)x - x\|_X = 0.$$

et on dit que $(G(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe.

Définition 1.2.3 On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur Λ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\Lambda) = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X\}. \\ \forall x \in D(\Lambda) : \Lambda x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)x - x}{t}. \end{array} \right.$$

Proposition 1.2.1 Si Λ est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ alors ;

1. Λ est linéaire fermé de domaine $D(\Lambda)$ dense dans X .
2. $\forall x \in X$ la fonction $t \mapsto G(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. si $x \in D(\Lambda)$ et $t \geq 0$ alors $G(t)x \in D(\Lambda)$.

4. la fonction $t \rightarrow G(t)x$ est continument dérivable sur $\mathbb{R}_+$, si seulement si, $x \in D(\Lambda)$.

dans ce cas $\forall t \geq 0; \frac{d}{dt}G(t)x = \Lambda G(t)x = G(t)\Lambda x$.

5. $\forall x \in X; \forall t \geq 0$ on a :

$$\int_0^t G(s)x ds \in D(\Lambda) \text{ et } \Lambda \int_0^t G(s)x ds = G(t)x - x.$$

et si de plus $x \in D(\Lambda)$ alors :

$$\Lambda \int_0^t G(s)x ds = \int_0^t G(s)\Lambda x ds = G(t)x - x.$$

6. si Λ est générateur infinitesimal d'un autre C_0 -semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ alors $\forall t \geq 0$ on a :
 $S(t) = G(t)$.

1.2.1 Semi-groupes différentiables

Définition 1.2.4 On dit qu'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est différentiable, si pour tout x de X la fonction $t \rightarrow T(t)x$ est différentiable de $]0, +\infty[$ dans X .

1.2.2 Semi-groupes analytiques

Définition 1.2.5 Soit $\phi \in]0, \pi]$, on appelle semi-groupe analytique, l'application G définie sur le secteur $\overline{S_\phi}$ avec

$$S_\phi = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| < \phi\}.$$

et à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$ telle que :

1. $z \rightarrow G(z)$ est analytique sur $\overline{S_\phi}$.

2. $G(0) = I$ et $\forall x \in X; \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \overline{S_\phi}}} \|G(z)x - x\|_X = 0$

3. $\forall z_1, z_2 \in \overline{S_\phi}; G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$.

1.2.3 Semi-groupes analytiques généralisés

On dira que $(e^{xQ})_{x \geq 0}$ est un semi-groupe analytique généralisé si Q est un opérateur linéaire dans X de domaine non dense et :

$$\begin{cases} \rho(Q) \supset S_{\omega, \delta} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\} ; |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \\ \text{et } \sup_{\lambda \in S_{\omega, \delta}} \|(\lambda - \omega)(\lambda I - Q)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty. \end{cases}$$

où

$$\cdot \omega \in \mathbb{R} \text{ et } \delta \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

$\cdot \rho(Q)$ désigne l'ensemble résolvant de l'opérateur Q .

1.3 Les espaces d'interpolation

Définition 1.3.1 Soit X un espace de Banach. On désigne par $L_*^p(\mathbb{R}_+, X)$ avec $p \in [1, +\infty[$, l'espace de Banach des fonctions fortement mesurables définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$ et telles que :

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X)} < +\infty.$$

si $p = \infty$, alors on définit l'espace $L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ par :

$$f \in L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X) \Leftrightarrow \begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X \text{ est fortement mesurable et} \\ \sup_{0 < t < \infty} \text{ess} \|f(t)\|_X < +\infty. \end{cases}$$

Définition 1.3.2 Soient $(X_0; \|\cdot\|_0)$ et $(X_1; \|\cdot\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continuellement dans un espace topologique séparé E .

Pour $p \in [1, +\infty[$; et $\theta \in]0, 1[$, on dit que $x \in (X_0, X_1)_{\theta, p}$; si et seulement si ;

$$\begin{cases} i) \forall t > 0; \exists u_0(t) \in X_0; \exists u_1(t) \in X_1 : x = u_0(t) + u_1(t). \\ ii) t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0); t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1). \end{cases}$$

Proposition 1.3.1 Les espaces :

$$(X_0 \cap X_1; \|\cdot\|_{X_0 \cap X_1}) ; (X_0 + X_1; \|\cdot\|_{X_0 + X_1}) \text{ et } ((X_0, X_1)_{\theta, p}, \|\cdot\|_{\theta, p})$$

où :

$$\cdot \|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1} \text{ si } x \in (X_0 \cap X_1).$$

$$\cdot \|x\|_{X_0 + X_1} = \inf_{\substack{x_i \in X_i; x_0 + x_1 = x \\ i = 0, 1}} (\|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}); \text{ si } x \in (X_0 + X_1).$$

$$\cdot \|x\|_{\theta,p} = \inf_{\substack{u_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow X_i; i=0,1 \\ \forall t > 0; u_0(t) + u_1(t) = x}} (\|t^{-\theta}u_0\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+,X_0)} + \|t^{1-\theta}u_1\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+,X_1)}); \text{ si } x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}.$$

sont de Banach.

De plus ;

$$(X_0 \cap X_1) \subset (X_0, X_1)_{\theta,p} \subset (X_0 + X_1).$$

et on note que : $(X_0, X_1)_{\theta,p} = (X_1, X_0)_{1-\theta,p}$.

Définition 1.3.3 Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$ muni de la norme ;

$$\forall x \in D(A); \|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X.$$

on a alors : $D_A(\theta, p) = (D(A), X)_{1-\theta,p}$ pour $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.

1.4 Puissances fractionnaires d'opérateurs

Théorème 1.4.1 Si A est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X tel que :

$$\begin{cases} \exists c > 0 : \mathbb{R}_+ \subset \rho(A) \text{ et pour } \lambda \geq 0. \\ \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c}{(1+\lambda)}. \end{cases}$$

alors ; pour $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$; $-(-A)^\alpha$ génère un semi-groupe $G_\alpha(t)$ fortement continue pour $t \geq 0$.

1.4.1 Puissances fractionnaires avec partie réelle positive

On considère ici $A \in S_\phi$ pour $\phi \in]0, \pi[$, et on note que dans la formule $A^\alpha = (Z^\alpha)(A)$; la quantité Z^α désigne la détermination principale de la fonction "puissance α " caractérisée par :

$$Z^\alpha = Z^{\alpha(\ln r + i\theta)} \text{ si } Z = re^{i\theta}; r > 0; \theta \in]-\pi, \pi[.$$

Proposition 1.4.1 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0$, alors;

1. A^α est un opérateur fermé de X .
2. $A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha$.
3. $\operatorname{Re} \beta > \operatorname{Re} \alpha \Rightarrow D(A^\beta) \subset D(A^\alpha)$
(en particulier si $\operatorname{Re} \alpha < 1$, alors $D(A) \subset D(A^\alpha)$).

4. si A est injectif alors A^α l'est aussi et $(A^{-1})^\alpha = (A^\alpha)^{-1}$

5. si $0 \in \rho(A)$ alors $0 \in \rho(A^\alpha)$.

6. $A \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$.

De plus si A admet un inverse borné alors ; pour $\operatorname{Re} \alpha > 0$; $(A^{-1})^\alpha = A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$.

1.4.2 Puissances fractionnaires avec partie réelle quelconque

Proposition 1.4.2 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et on suppose que A est injectif alors ;

1. A^α est un opérateur fermé de X .

2. A^α est injectif et $(A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha} = (A^{-1})^\alpha$.

3. $A^{\alpha+\beta} \subset A^\alpha A^\beta$.

1.5 La théorie des sommes d'opérateurs

Soit A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X de domaine $D(A)$ et $D(B)$ respectivement. On s'intéresse alors à l'équation :

$$Au + Bu - \lambda u = g.$$

où g est un vecteur donné de X .

l'opérateur somme $L = A + B$ est définie par :

$$\begin{cases} D(L) = D(A) \cap D(B). \\ Lu = Au + Bu; \quad u \in D(L). \end{cases}$$

Donc l'équation s'écrit encore :

$$Lu - \lambda u = g.$$

une solution stricte de cette équation est un élément $u \in D(L)$ qui la satisfait. Donc il faut trouver une telle solution lorsque g est quelconque dans X , mais ce n'est pas toujours possible.

1.5.1 Approche de Da Prato et Grisvard

On note le secteur S_θ par :

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z| \geq r \text{ et } |\arg(z)| < \pi - \theta\} \text{ pour } r > 0 \text{ et } \theta \in]0, \pi[.$$

et on suppose les hypothèses sur A et B suivantes (dites de Da prato et Grisvard) :

.Parabolicité – ellipticité :

$$(DP1) \left\{ \begin{array}{l} \exists r, C_A, C_B > 0; \theta_A, \theta_B \in]0, \pi[: \\ \cdot \rho(A) \supset S_{\theta_A} \text{ et } \forall z \in S_{\theta_A}; \|(A - zI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_A}{|z|}. \\ \cdot \rho(B) \supset S_{\theta_B} \text{ et } \forall z \in S_{\theta_B}; \|(B - zI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_B}{|z|}. \\ \cdot \theta_A + \theta_B < \pi. \\ \cdot \overline{D(A) + D(B)} = X. \end{array} \right. \quad (1.5.1)$$

.commutativité au sens des résolvantes :

$$(DP2) \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda \in \rho(-A); \forall \mu \in \rho(-B) \\ (A + \lambda I)^{-1}(B + \mu I)^{-1} = (B + \mu I)^{-1}(A + \lambda I)^{-1}. \end{array} \right. \quad (1.5.2)$$

et

$$(DP3) \sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset. \quad (1.5.3)$$

Théorème 1.5.1 de Da Prato et Grisvard

L'opérateur linéaire continu suivant :

$$S_\lambda : u \rightarrow \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (B + zI)^{-1}(A - \lambda - zI)^{-1} g dz.$$

vérifie les propriétés :

- 1). $\forall \mu \in D(A) \cap D(B)$ on a : $S(Au + Bu) = u$.
- 2). $\forall v \in D(A) + D(B)$ on a : $S(v) \in D(A) \cap D(B)$ et $A(S(v)) + B(S(v)) = v$.
- 3). pour $v \in D_A(\theta, p) + D_B(\theta, p)$; $\theta \in]0, 1[$; $p \in [1, +\infty]$ on a : $Sv \in D(L)$ et $L(Sv) = v$.
- 4). L est fermable et $(\overline{L})^{-1} = S$.

De plus :

$$(D(L); X)_{\theta, p} = (D(A); X)_{\theta, p} \cap (D(B); X)_{\theta, p}.$$

on note ici que Γ est une courbe sectorielle séparant les spectres de A et de $(-B)$ et demeurant dans $\rho(A) \cap \rho(-B)$.

Théorème 1.5.2 *Sous les hypothèses (1.5.1), (1.5.2) et (1.5.3) et pour $\theta \in]0, 1[$, $p \in [1, +\infty]$, on a :*

1. *si $g \in D_B(\theta, p)$ alors $u \in D(L)$ et $Au, Bu \in D_B(\theta, p)$.*
2. *si $g \in D_B(\theta, p)$ alors $u \in D(L)$ et $Au, Bu \in D_A(\theta, p)$.*

1.5.2 Approche de Dore et Venni

Espaces de Banach UMD

Définition 1.5.1 *Un espace de Banach X possède la propriété UMD (Unconditional Martingale Differences) ; si et seulement si, $\exists p \in]1, +\infty[$ et $C(p)$ tels que :*

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k d_k \right\|_{L^p(\mathbb{R}, X)} \leq C(p) \left\| \sum_{k=1}^n d_k \right\|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

pour toute martingale $(d_k)_{k=1, n}$ et pour toute suite $(\xi_k) \in \{-1, 1\}^n$.

Nous donnons ici une définition équivalente plus adaptée à notre propos et qui utilise la transformée de Hilbert.

Transformée de Hilbert

Soient $\varepsilon \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$; pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$; on définit l'opérateur H_ε par :

$$(H_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |s| < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-s)}{s} ds.$$

si pour un élément $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$ donné ; $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon f$ existe dans $L^p(\mathbb{R}, X)$ alors cette limite est notée Hf et appelée la transformation de Hilbert.

Théorème 1.5.3 (Définition)

Soient X un espace de Banach et $p \in]1, +\infty[$ alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- *X est UMD.*
- *$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon f$ existe dans $L^p(\mathbb{R}, X)$; $\forall f \in L^p(\mathbb{R}, X)$.*

Remarque 1.5.1 *On peut ausssi avoir une caractérisation géométrique des espaces UMD, c'est la notion de ξ -convexité qui a comme interet l'indipendance de l'UMD et de "P". (voir [2])*

Exemple 1.5.1 · *Tout espace de Hilbert est UMD.*

- *Tout espace isomorphe à un UMD est UMD.*
- *Tout sous-espace fermé d'un UMD est UMD.*
- *L'interpolé des espaces UMD est UMD.*
- *Si $p \in]1, +\infty[$ et X est un UMD alors $L^p([0, 1]; X)$ est UMD.*

Théorème 1.5.4 de Dore et Venni

Les hypothèses sur A et B : cette fois on suppose que les opérateurs A et B vérifient :

$$\begin{aligned}
 (DV1) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \cdot \rho(A) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_A > 0 : \\ \quad \forall \lambda \geq 0; \|(A + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_A}{(1+\lambda)}. \\ \cdot \rho(B) \supset]-\infty, 0] \text{ et } \exists M_B > 0 : \\ \quad \forall \lambda \geq 0; \|(B + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_B}{(1+\lambda)}. \\ \cdot \overline{D(A)} = \overline{D(B)} = X \end{array} \right. \\
 (DV2) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda \in \rho(-A); \forall \mu \in \rho(-B) \\ (A + \lambda)^{-1}(B + \mu)^{-1} - (B + \mu)^{-1}(A + \lambda)^{-1} = 0. \end{array} \right. \\
 (DV3) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \cdot \forall s \in \mathbb{R}; A^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists k > 0; \theta_A > 0 : \\ \quad \forall s \in \mathbb{R}; \|A^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq k e^{|s|\theta_A}. \\ \cdot \forall s \in \mathbb{R}; B^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists k > 0; \theta_B > 0 : \\ \quad \forall s \in \mathbb{R}; \|B^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq k e^{|s|\theta_B}. \\ \cdot \theta_A + \theta_B < \pi \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

On note par $BIP(X, \theta)$ (Bounded Imaginary Power) ; l'ensemble des opérateurs sectoriels sur X vérifiant (DV1) et (DV3).

on a alors le théorème suivant : (Dore et Venni).

Théorème 1.5.5 *si X un espace UMD et sous les hypothèses (DV1), (DV2) et (DV3), l'opérateur*

$$L = A + B$$

est fermé, et : $L^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, de plus ; L^{-1} est défini par l'intégrale :

$$L^{-1} = \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma} \frac{A^{-z} B^{z-1}}{\sin \pi z} dz.$$

où γ est une courbe verticale contenue dans la bande

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}.$$

et orientée de $\infty e^{-i\frac{\pi}{2}}$ vers $\infty e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Application de l'approche de Dore et Venni au problème de Cauchy

Soit X un espace de Banach UMD . On considère le problème de Cauchy :

$$(P_c) \begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) & ; \quad t \in [a, T] \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

où $f \in L^p(0, T; X)$ et : $A : D(A) \rightarrow X$ un opérateur linéaire fermé de domaine dense et tel que :

$$\exists c > 0; \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c}{1-\lambda} ; \quad \forall \lambda \geq 0.$$

et $(A^{i\varepsilon})_{\varepsilon \geq 0}$ semi-groupe fortement continue dans $\mathcal{L}(X)$ avec :

$$\exists c \geq 0; \|A^{i\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ce^{\theta_A |\varepsilon|} ; \quad 0 \leq \theta_A \leq \frac{\pi}{2}.$$

On écrit le problème sous la forme d'une équation somme d'opérateurs. On définit alors les opérateurs A et B comme suit :

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in L^p(0, T, X)\}. \\ (Au)(t) = Au(t); \quad u \in D(A). \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(B) = \{u \in W^{1,p}(0, T, X); \quad u(0) = 0 \\ Bu = u'. \quad ; \quad u \in D(B) \end{cases}$$

et donc, notre équation sera :

$$Bu + Au = f.$$

Dans ce cas, on a :

- X est $UMD \Rightarrow L^p(0, T, X)$ est UMD .
- Les hypothèses $(DV1)$, $(DV2)$ et $(DV3)$ sont bien vérifiées.

· L'opérateur linéaire fermé B satisfait :

$$\exists C_0 > 0; \|(\lambda I - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C_0}{1+|\lambda|}.$$

$$\forall s \in \mathbb{R}; B^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists C_1 > 0; \|B^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_1(1+s^2)e^{\frac{\pi}{2}|s|}.$$

on utilise donc l'approche de Dore et Venni, et on aura le resultat final suivant :

si X *UMD* et l'opérateur A vérifie l'hypothèse "*BIP*" alors ; $\forall f \in L^p(0, T; X); 1 < p < \infty$

le problème de Cauchy (P_c) admet une unique solution :

$$u \in W^{1,p}(0, T; X) \cap L^p(0, T, D(A)).$$

et

$$Au(t) = A \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \in L^p(0, T; X).$$

Représentation de la solution

Ici, on représente la solution du problème posé à partir des hypothèses supposées.

2.1 Hypothèses

Considérons dans un espace de Banach complexe X le problème abstrait suivant :

$$(P_A) \begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x); & x \in (0, 1) \\ u(0) = u_0 \\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

avec H est un opérateur linéaire sur X de domaine $D(H)$ et A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans X .

ici, u_0 et $u_{1,0}$ sont des élément donnés dans X et $f \in L^p(0, 1; X)$; $1 < p < +\infty$.

On suppose que :

·l'opérateur A vérifie :

–l'hypothèse d'ellipticité :

$$[0, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \exists c > 0 : \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c}{1 + \lambda}. \quad (2.1.2)$$

–l'hypothèse BIP :

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}; (-A)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists c > 1; \theta_A \in]0, \pi[\\ \|(-A)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} < ce^{\theta_A |s|}. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

$\cdot X$ est un espace UMD.

(2.1.4)

$\cdot H$ est un opérateur linéaire fermé dans X .

(2.1.5)

on pose $Q := -(-A)^{\frac{1}{2}}$ (c'est bien le générateur infinitésimal du semi-groupe analytique sur X noté $(e^{xQ})_{x \geq 0}$) plus de détails se trouvent dans Balakrishnan [1])

et on suppose aussi que :

$$\cdot D(Q) \subset D(H) \quad (2.1.6)$$

$$\cdot \forall \xi \in D(H); A^{-1}H\xi = HA^{-1}\xi \quad (2.1.7)$$

$$\cdot 0 \in \rho(\Lambda) \text{ où } \Lambda = -2HQe^Q + I - e^{2Q}. \quad (2.1.8)$$

on voit que cet opérateur Λ est dans un sens le déterminant du problème considéré.

Remarque 2.1.1 . Sous l'hypothèse (2.1.2) quand Q génère un semi-groupe analytique, on a pour $x > 0$;

$$Q^k e^{xk} \in \mathcal{L}(X).$$

. De plus si on a : (2.1.5) , (2.1.6) alors ;

$$\Lambda = -2HQe^Q + I - e^{2Q} \in \mathcal{L}(X).$$

. Les hypothèses (2.1.2) , (2.1.6) et (2.1.7) pour $\lambda \in \rho(A); \mu \in \rho(Q); \xi \in D(H)$ et $x \geq 0$; donnent :

$$\begin{cases} (A - \lambda I)^{-1} H\xi = H(A - \lambda I)^{-1} \xi. \\ (Q - \mu I)^{-1} H\xi = H(Q - \mu I)^{-1} \xi \\ H e^{xQ} \xi = e^{xQ} H\xi. \end{cases}$$

. (2.1.2) et (2.1.3) affirment que $A \in BIP(X, \theta_A)$, donc ;

$$-Q = (-A)^{\frac{1}{2}} \in BIP(X, \frac{\theta_A}{2}).$$

. (2.1.2) implique : $D(Q) = D((-A)^{\frac{1}{2}}) \supset (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$ (voir[3])

2.2 Représentation de la solution

Lemme 2.2.1 Sous les hypothèses (2.1.2), (2.1.5) $\sim$ (2.1.7), le problème (P_A) admet une solution semi-stricte u qui est représentée par :

$$u(x) = e^{xQ}(u_0 - J_0) - e^{(1-x)Q}(\Lambda^{-1}I_1 - \Lambda^{-1}u_{1,0} + \Lambda^{-1}HQ(u_0 - 2J_0)) + I_x + J_x + e^{xQ}e^{Q\overline{u_0}} + e^{(1-x)Q}e^{Q\overline{u_{1,0}}}.$$

où :

$$I_x = \frac{1}{2}Q^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds; \quad J_x = \frac{1}{2}Q^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds.$$

et :

$$\begin{aligned} \overline{u_0} &= \Lambda^{-1}(e^Q u_0 - u_{1,0} + HQ(u_0 - 2J_0) - e^Q J_0 + I_1) \\ \overline{u_{1,0}} &= \Lambda^{-1}(J_0 - u_0). \end{aligned}$$

Preuve. Pour résoudre le problème (P_A) ; on applique la méthode de la réduction d'ordre de Krein à l'équation abstraite

$$u''(x) + Au(x) = f(x); \quad x \in (0, 1)$$

On pose alors pour tout $x \in (0, 1)$;

$$v(x) = -Q^{-1}u'(x); \quad y(x) = \frac{1}{2}(u(x) - v(x)) \text{ et } z(x) = \frac{1}{2}(u(x) + v(x)).$$

donc ;

$$y'(x) = \frac{1}{2}(u'(x) - v'(x)) = \frac{1}{2}(-Qv(x) + Q^{-1}u''(x)).$$

En utilisant notre équation et le fait que $Q = -\sqrt{-A}$, on obtient :

$$\begin{cases} y'(x) = Qy(x) + \frac{1}{2}Q^{-1}f(x); & p.p.x \in (0, 1). \\ y(0) = \varepsilon_0. \end{cases}$$

avec : $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(u(0) - v(0)) = \frac{1}{2}(u(0) + Q^{-1}u'(0))$.

De même on a :

$$\begin{cases} z'(x) = -Qz(x) - \frac{1}{2}Q^{-1}f(x); & p.p.x \in (0, 1). \\ z(1) = \varepsilon_1. \end{cases}$$

avec $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(u(1) - Q^{-1}u'(1))$.

Donc, pour tout $x \in (0, 1)$ on a :

$$\begin{cases} y(x) = e^{xQ}\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)Q}Q^{-1}f(s)ds. \\ z(x) = e^{(1-x)Q}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)Q}Q^{-1}f(s)ds. \end{cases}$$

et

$$u(x) = y(x) + z(x) = e^{xQ}\varepsilon_0 + e^{(1-x)Q}\varepsilon_1 + I_x + J_x.$$

où :

$$I_x = \frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)Q}Q^{-1}f(s)ds \text{ et } J_x = \frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)Q}Q^{-1}f(s)ds.$$

Il reste à calculer ε_0 et ε_1 pour accomplir la représentation de la solution. On sait qu'une solution semi-strictes u du problème (P_A) est telle que :

$$\forall \varepsilon \in]0, 1[; \quad u \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \cap L^p(0, 1 - \varepsilon; D(A)) \cap W^{1,p}(0, 1; X).$$

Et on note que :

$$u \in W^{1,p}(0, 1; X) \Rightarrow u \in C([0, 1]; X).$$

alors ;

$$\forall \varepsilon \in]0, 1[; u \in W^{2,p}(0, 1 - \varepsilon; X) \Rightarrow u \in C^1([0, 1[; X).$$

Enfin ;

$$u \in C([0, 1]; X) \cap C^1([0, 1[; X).$$

D'après la condition non-locale $Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}$; on remarque que $u'(0)$ appartient bien à $D(H)$.

En ajoutant les deux conditions aux limites du problème, on aura :

$$\begin{cases} u \in C([0, 1]; X) \cap C^1([0, 1[; X). \\ u'(0) \in D(H). \\ u(0) = u_0 \text{ et } Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}. \end{cases}$$

Donc on peut écrire pour tout $x \in [0, 1[$:

$$u'(x) = Qe^{xQ}\varepsilon_0 - Qe^{(1-x)Q}\varepsilon_1 + QI_x - QJ_x.$$

d'où

$$\begin{cases} u(0) = \varepsilon_0 + e^Q\varepsilon_1 + J_0. \\ u(1) = e^Q\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + I_1. \\ u_0 \in D(Q); \varepsilon_0 \in D(Q). \\ u'(0) = 2Q\varepsilon_0 - Qu_0. \end{cases}$$

De plus ;

$$Hu'(0) + u(1) = u_{1,0} \Rightarrow H(2Q\varepsilon_0 - Qu_0) + (e^Q\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + I_1) = u_{1,0}.$$

on remplace dans cette dernière formule ε_0 par $u(0) - J_0 - e^Q\varepsilon_1$, et on obtient ;

$$H(2Qu(0) - 2QJ_0 - 2Qe^Q\varepsilon_1 - Qu_0) + e^Q(u(0) - J_0 - e^Q\varepsilon_1) + \varepsilon_1 + I_1 = u_{1,0}. \quad (2.2.1)$$

et comme $2Qe^Q\varepsilon_1 \in D(Q)$ et $D(Q) \subset D(H)$ alors ;

$$Qu_0 - 2J_0 \in D(H).$$

D'autre part ; d'après (2.2.1) on déduit que :

$$(I - 2Qe^Q - e^{2Q})\varepsilon_1 = u_{1,0} - HQ u_0 + 2HQ J_0 - e^Q J_0 - I_1 = \Lambda \varepsilon_1.$$

Donc ;

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \Lambda^{-1}u_{1,0} - \Lambda^{-1}I_1 - \Lambda^{-1}e^Q(u_0 - J_0) - \Lambda^{-1}H(Qu_0 - 2QJ_0). \\ &= \Lambda^{-1}u_{1,0} - \Lambda^{-1}I_1 - \Lambda^{-1}H(Qu_0 - 2QJ_0) + e^Q\overline{u_{1,0}}. \end{aligned}$$

où : $\overline{u_{1,0}} = \Lambda^{-1}(J_0 - u_0)$.

On peut donc obtenir ε_0 .

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= u_0 - J_0 - e^Q(\Lambda^{-1}u_{1,0} - \Lambda^{-1}I_1 - \Lambda^{-1}e^Q(u_0 - J_0) - \Lambda^{-1}H(Qu_0 - 2QJ_0)). \\ &= u_0 - J_0 + e^Q\overline{u_0} \end{aligned}$$

avec ; $\overline{u_0} = \Lambda^{-1}(e^Q u_0 - u_{1,0} + HQ(u_0 - 2J_0) - e^Q J_0 + I_1)$.

En remplaçant ces formules trouvées dans la représentation de la solution, on trouve la solution semi-stricte du problème (P_A) sous la forme :

$$u(x) = e^{xQ}(u_0 - J_0 + e^Q\overline{u_0}) + e^{(1-x)Q}(\Lambda^{-1}u_{1,0} - \Lambda^{-1}I_1 - \Lambda^{-1}H(Qu_0 - 2QJ_0) + e^Q\overline{u_0}) + I_x + J_x; \quad x \in [0, 1].$$

Régularité de la solution

Dans ce chapitre, on utilise des lemmes techniques pour étudier la régularité de la solution du problème posé.

3.1 Lemmes techniques :

Lemme 3.1.1 *Soit $f \in L^p(0, 1; X)$; $1 < p < +\infty$.*

Sous les hypothèses (2.1.4) ; (2.1.2) et (2.1.3) du chapitre précédent on a :

1. $x \rightarrow F(x, f) = Q \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds \in L^p(0, 1; X).$
2. $x \rightarrow K(x, f) = Q \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds \in L^p(0, 1; X).$
3. $x \rightarrow T(x, f) = Q \int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s) ds \in L^p(0, 1; X).$

Preuve. 1. Pour la première assertion, on va appliquer le théorème de Dore et Venni à l'étude du problème :

$$\begin{cases} u'(x) + Qu(x) = f(x); & x \in (0, 1). \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

alors, comme X est UMD et Q est un opérateur linéaire fermé dans X satisfaisant les deux hypothèses du théorème de Dore et Venni, alors, pour tout $f \in L^p(0, 1; X)$, ce problème admet une unique solution stricte u telle que $u \in W^{1,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; D(Q))$.

avec ;

$$u(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds.$$

et donc ;

$$x \rightarrow Q \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds \in L^p(0, 1; X).$$

2. La deuxième assertion découle immédiatement de la première car, en posant $1 - x = y$ et $1 - s = t$, on obtient :

$$\begin{aligned} K(x, f) &= Q \int_x^1 e^{(s-1+1-x)Q} f(s) ds. \\ &= Q \int_x^1 e^{((1-x)-(1-s))Q} f(s) ds. \\ &= Q \int_0^y e^{(y-t)Q} f(1-t) dt. \\ &= F(y, f(1-t)) \in L^p(0, 1; X). \text{ d'après 1.} \end{aligned}$$

3. Pour la troisième assertion, on écrit pour tout élément $x \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} T(x, f) &= Q \int_0^1 e^{(x+s)Q} f(s) ds. \\ &= Q \int_0^x e^{(x+s)Q} f(s) ds + Q \int_x^1 e^{(x+s)Q} f(s) ds. \\ &= Q \int_0^x e^{(x-s)Q} e^{2sQ} f(s) ds + e^{2xQ} Q \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds. \\ &= F(x, e^{2sQ} f) + e^{2xQ} K(x, f). \\ &= F(x, e^{2sQ} f) + e^{2xQ} F(x, f(1 - \cdot)). \end{aligned}$$

et on applique 1.

Lemme 3.1.2 Soit $p \in]1, +\infty[$ et supposons l'hypothèse (2.1.2) du chapitre qui précède, alors ;

1. $Ae^Q \varphi \in L^p(0, 1; X)$; si et seulement si ; $\varphi \in (D(A); X)_{\frac{1}{2p}, p}$
2. $Qe^Q \varphi \in L^p(0, 1; X)$; si et seulement si ; $\varphi \in (D(A); X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$

Preuve. On rappelle que si $m \in \mathbb{N}^*$ et C génère un semi-groupe analytique alors ;

$$\phi \in (D(C^m), X)_{\frac{1}{mp}, p} \Leftrightarrow C^m e^{xC} \phi \in L^p(0, 1; X).$$

on fait

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|C^m e^{xC} \phi\|_X^p dx &\leq \int_0^\infty \left\| x^{m(1-(1-\frac{1}{mp}))} C^m e^{xC} \phi \right\|_X^p \frac{dx}{x} \\ &\leq K \|\phi\|_{(D(C^m), X)_{\frac{1}{mp}, p}}. \end{aligned}$$

(voir Triebel [12])

D'où :

$$Q^2 e^Q \varphi = A e^Q \varphi \in L^p(0, 1; X) \Leftrightarrow \varphi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} = (D(Q^2), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

de la même manière

$$Q e^Q \varphi \in L^p(0, 1; X) \Leftrightarrow \varphi \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p}, p}.$$

et en utilisant la propriété de réitération de Lions-Peetre ([10])

on obtient :

$$(D(Q), X)_{\frac{1}{p}, p} = (X, D(Q))_{1-\frac{1}{p}, p} = (X, D(Q^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}, p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}, p}.$$

d'où le resultat.

On déduit ainsi ;

Corollaire 3.1.1 *Soit $f \in L^p(0, 1; X)$; $1 < p < +\infty$.*

sous l'hypothèse (2.1.2) ; (2.1.3) et (2.1.4) du chapitre précédent on a :

$$\int_0^1 e^{xQ} f(s) ds \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p}, p} = (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}, p}.$$

On a aussi besoin du lemme suivant ;

Lemme 3.1.3 *Il existe un opérateur $W \in \mathcal{L}(X)$ tel que :*

$$\Lambda^{-1} = I - W \text{ avec } W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D(Q^k).$$

Preuve. On pose $\Lambda = -2HQe^Q + I - e^{-2Q} = I + V$.

où $V = -2HQe^Q - e^{-2Q} \in \mathcal{L}(X)$

Il est clair que $VQ^{-1} = Q^{-1}V$, de plus, Q est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, donc ;

$\forall K \in \mathbb{N}; e^Q \in L^p(X, D(Q^K))$.

alors ; $V(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D(Q^k)$.

et donc :

$$W := \Lambda^{-1}V \in \mathcal{L}(X); WQ^{-1} = Q^{-1}W \text{ et } W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D(Q^k).$$

Enfin ;

$$(I - W)\Lambda = \Lambda(I - W) = \Lambda - V = I.$$

3.2 Régularité de la solution

On simplifie d'abord l'expression de la solution u , en utilisant le fait qu'il existe un opérateur linéaire borné W tel que $\Lambda^{-1} = I - W$.

Alors, en posant $\Lambda^{-1} = I - W$ dans la formule de la solution ; on obtient :

$$u(x) = e^{xQ}(u_0 - J_0 + e^{Q\overline{u_0}}) + e^{(1-x)Q}((I - W)(u_{1,0} - I_1 - H(Qu_0 - 2QJ_0)) + e^{Q\overline{u_{1,0}}}) + I_x + J_x.$$

En remplaçant I_x et J_x par ces valeurs, on aura :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xQ}(u_0 - J_0 + e^{Q\overline{u_0}}) + e^{(1-x)Q}(u_{1,0} - I_1 - H(Qu_0 - 2QJ_0) - W(u_{1,0} - I_1 - H(Qu_0 - 2QJ_0)) \\ &\quad + e^{Q\overline{u_{1,0}}}) + \frac{1}{2}Q^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds + \frac{1}{2}Q^{-1} \int_x^1 e^{(x-s)Q} f(s) ds. \\ &= e^{xQ}(u_0 - J_0) + \frac{1}{2}Q^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds + e^{(1-x)Q}(u_{1,0} - I_1 - H(Q(u_0 - 2J_0)) \\ &\quad + \frac{1}{2}Q^{-1} \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds + e^{(1-x)Q} e^{Q\overline{u_{1,0}}} + e^{(1-x)Q} W I_1 - e^{(1-x)Q} W(u_{1,0} - H(Q(u_0 - 2J_0)) \\ &\quad + e^{xQ} e^{Q\overline{u_0}}. \end{aligned}$$

donc on a représenté la solution u par :

$$u(x) = S(x, u_0 - J_0; f) + S(1 - x, u_{1,0} - I_1 - HQ(u_0 - 2J_0); f(1 - x)) + R(x).$$

avec ;

$$S(x, \varphi, f) = e^{xQ}\varphi + \frac{1}{2}Q^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds.$$

et

$$R(x) = e^{(1-x)Q} e^{Q\overline{u_{1,0}}} + e^{(1-x)Q} W I_1 - e^{(1-x)Q} W (u_{1,0} - HQ(u_0 - 2J_0)) + e^{xQ} e^Q u_0.$$

Pour étudier la régularité de cette solution u qui satisfait :

$$u''(x) + Au(x) = f \quad p.p \text{ sur }]0, 1[.$$

et pour $f \in L^p(0, 1; X)$; il suffit d'analyser le terme Au .

Grâce à la simplification précédente, cette analyse sera celle de :

$$Au(x) = AS(x, u_0 - J_0; f) + AS(1 - x, u_{1,0} - I_1 - HQ(u_0 - 2J_0), f(1 - x)) + AR(x).$$

On commence avec le premier terme :

$$AS(x, u_0 - J_0; f) = Q^2 S(x, u_0 - J_0, f) = Q^2 e^{xQ} (u_0 - J_0) + \frac{1}{2} Q \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds.$$

D'après le lemme technique (1^{er} lemme(3.1.1)) on a :

$$x \rightarrow \frac{1}{2} Q^{-1} \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s) ds \in L^p(0, 1; X).$$

Donc pour que $Q^2 S(x, u_0 - J_0, f)$ soit dans $L^p(0, 1; X)$ il suffit que $Q^2 e^{xQ} (u_0 - J_0) \in L^p(0, 1; X)$

ce qui est équivalent à dire, d'après le deuxième lemme technique(3.1.2),

$$(u_0 - J_0) \in (D(A); X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

or ;

$$J_0 = \frac{1}{2}Q^{-1} \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds \Rightarrow QJ_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds.$$

et d'après le corollaire ; on a bien $QJ_0 \in (D(Q), X)_{\frac{1}{p}, p} = (D(A); X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$.

d'où

$$J_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

.

La donnée u_0 est bien dans $(D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \subset D(Q)$.

Alors ;

$$(u_0 - J_0) \in (D(A); X)_{\frac{1}{2p}, p} \Rightarrow Q^2 e^{xQ} (u_0 - J_0) \in L^p(0, 1; X).$$

D'où la régularité du terme $Q^2 S(x, u_0 - J_0, f)$.

De la même façon, pour le terme $AS(1-x, u_{1,0} - I_1 - HQ(u_0 - 2J_0), f(1-x))$ qui est égale

à :

$$Q^2 e^{(1-x)Q} (u_{1,0} - I_1 - HQ(u_0 - 2J_0)) + \frac{1}{2}Q \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds.$$

on a d'après le 1^{er} lemme technique(3.1.1),

$$x \rightarrow Q \int_x^1 e^{(s-x)Q} f(s) ds \in L^p(0, 1; X).$$

Reste alors à analyser ; $Q^2 e^{(1-x)Q} (u_{1,0} - I_1 - HQ(u_0 - 2J_0))$.

Proposition 3.2.1 *Sous les hypothèses (2.1.3) et (2.1.4) du chapitre 2 ; soient $f, g \in L^p(0, 1; X)$,*

$1 < p < +\infty$ et $\psi \in X$, alors :

$$Q^2 S(1-x, \psi, g) \in L^p(0, 1; X) \text{ si et seulement si ; } \psi \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

D'après cette proposition, on aura $Q^2 e^{(1-x)Q} (u_{1,0} - I_1 - HQ(u_0 - 2J_0)) \in L^p(0, 1; X)$, si et seulement si ;

$$(u_{1,0} - I_1 - HQ(u_0 - 2J_0)) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}.$$

or ;

$$I_1 = \frac{1}{2}Q^{-1} \int_0^1 e^{xQ} f(1-s)ds \Rightarrow QI_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xQ} f(1-s)ds$$

qui est, d'après le corollaire, dans $(D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p} = (D(Q), X)_{\frac{1}{p},p}$ donc $I_1 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$.

et $HQ(u_0 - 2J_0) = HQ(u_0 - (Q^{-1} \int_0^1 e^{sQ} f(s)ds)) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$. car :

$$\int_0^1 e^{sQ} f(s)ds \in D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p} .$$

grâce au corollaire on obtient :

$$(u_{1,0} - I_1 - HQ(u_0 - 2J_0)) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$$

d'où ;

$$Q^2 e^{(1-x)Q} (u_{1,0} - I_1 - HQ(u_0 - 2J_0)) \in L^p(0, 1; X).$$

Finalement, on a :

$$AS(1-x, u_{1,0} - I_1 - HQ(u_0 - 2J_0), f(1-x)) \in L^p(0, 1; X).$$

Il nous reste le terme $AR(x)$ qui est dans $L^p(0, 1; X)$ grâce à la régularité des termes e^Q et W . ($\forall k \in \mathbb{N}; Q^k R(x) \in L^p(0, 1; X)$).

D'après ces étapes, on peut dire que $Au(x) \in L^p(0, 1; X)$, et donc on a bien la régularité de la solution du problème, et on a ainsi les resultats suivants :

3.3 Resultats

Théorème 3.3.1 (*Solution semi-strict*)

On suppose que Λ est inversible, et X un espace UMD, et soient $u_0, u_{1,0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$. alors ;

le problème (P_A) admet une solution semi-strict ; si et seulement si ;

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \subset D(Q). \\ Qu_0 - J_f \in D(H) \text{ et } u_{1,0} - H(Qu_0 - J_f) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}. \end{cases}$$

où : $J_f = \int_0^1 e^{sQ} f(s)ds$

De plus cette solution est unique dans cet espace et est sous la forme $u = u_R + u_S$ avec ;
 $u_R \in W^{2,p}(0, 1; X) \cap L^p(0, 1; X))$ et $u_S \in W^{1,p}(0, 1; X)$.

Preuve. Si u est une solution semi-strictes pour (P_A) , alors, on a vu que :

$$Qu_0 - 2QJ_0 = Qu_0 - \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds \in D(H).$$

donc :

$$u_0 - Q^{-1} \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds \in D(HQ).$$

Et d'après l'analyse de la régularité de la solution, on a montré que cette régularité c'est celle de W avec ;

$$W(x) = S(x, u_0 - J_0, f) + S(1 - x, u_{1,0} - I_1 - HQ(u_0 - 2J_0); f(1 - x)).$$

mais ; $\forall \varepsilon \in]0, 1[$; on a :

$$Q^2 u \in L^p(0, 1 - \varepsilon, X) \text{ et } Qu \in L^p(0, 1; X).$$

donc ;

$$Q^2 W \in L^p(0, 1 - \varepsilon, X) \text{ et } QW \in L^p(0, 1; X).$$

D'autre part ; on a vu que $u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}$ et $u_{1,0} - HQ(u_0 - 2J_0) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}$.

donc on a le sens direct de l'équivalence.

. Inversement ; si

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \subset D(Q). \\ Du_0 - J_0 \in D(H) \text{ et } u_{1,0} - H(Qu_0 - J_f) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}, p}. \end{cases}$$

avec $J_f = \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds$.

et en utilisant les résultats précédents et qui nous permettent de représenter la solution semi-strictes telle que : $u = u_R + u_S$ avec

$$\begin{aligned} u_R &= S(x, u_0 - J_0, f) + R(x). \\ u_S &= S(1 - x, u_{1,0} - I_1 - HQ(u_0 - 2J_0); f(1 - x)). \end{aligned}$$

et on a la régularité voulue aussi.

Théorème 3.3.2 (*Solution stricte*)

On suppose que Λ est inversible et X un UMD et soient $u_0, u_{1,0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$. alors ; le problème (P_A) admet une solution stricte, si et seulement si ;

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p} \subset D(Q). \\ QJ_0 - J_f \in D(H) \text{ et } u_{1,0} - H(Qu_0 - J_f) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

avec $J_f = \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds$.

Preuve. La démonstration suit les mêmes étapes que le théorème précédent mais ici $Q^2W \in L^p(0, 1; X)$.

Remarque 3.3.1 On dit que $f \in W^{\theta, p}(0, 1; X)$ si $f \in L^p(0, 1; X)$ et satisfait :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\|f(x) - f(y)\|_X^p}{\|x - y\|^{1+\theta_p}} dx dy < +\infty.$$

on note que dans ce cas, si l'espace X n'est plus supposé UMD et pas de propriété BIP, on peut trouver des résultats analogues en utilisant l'approche de Da-prato et Grisvard.

Hypothèse d'inversibilité

4.1 Le cas particulier $H = \alpha(-Q)^k$.

On va étudier le problème avec l'opérateur particulier $H = \alpha(-Q)^k$ pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$ et $k = 0$ ou 1 .

Notre problème considéré sera :

$$(P_{hp}) \begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x); & x \in (0, 1). \\ u(0) = u_0. \\ \alpha(-Q)^k u'(0) + u(1) = u_{1,0}. \end{cases}$$

et on suppose que :

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } X \\ \sigma(A) \supset]-\infty, 0[\text{ et pour tout } \theta \in]0, \pi[\text{ on :} \\ \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda((A - \lambda I)^{-1})\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty \end{cases} \quad (4.1.1)$$

et

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}; (-A)^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists c \geq 1; \theta_A \in]0, \pi[; \forall s \in \mathbb{R}. \\ \|(-A)^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} < ce^{\theta_A |s|}. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Dans ce cas, comme $\Lambda = -2HQe^Q + I - e^{2Q}$.

Alors le nouveau opérateur Λ sera :

$$\Lambda = -2\alpha(-Q)^{k+1}e^Q + I - e^{2Q}.$$

le lemme suivant assure l'inversibilité de ce nouveau opérateur Λ .

Lemme 4.1.1 *Sous l'hypothèses (4.1.1), l'opérateur $\Lambda = -2\alpha Q e^Q + I - e^{2Q}$ est inversible et d'inverse borné, de plus :*

$$\Lambda^{-1} = I - \psi(-Q).$$

Preuve. On choisit $\theta \in]0, \theta_0[$ telle que $\sigma(-Q) \subset S_\theta \setminus B(0, 2\varepsilon_0)$.

on note que G est holomorphe et borné sur un voisinage de $S_\theta \setminus B(0, 2\varepsilon_0)$. de plus $\exists \delta > 0$ tel que :

$$|\psi(z)| = O(|z|^{-\delta}) \text{ où } z \rightarrow +\infty; z \in S_\theta \setminus B(0, 2\varepsilon_0).$$

on peut donc définir $\psi(-Q)$ et aussi $G(-Q)$ (voir [5])

on a aussi $\Lambda = I + G(-Q)$ et

$$\begin{aligned} (I - \psi(-Q))\Lambda &= (1 - \psi)(-Q)o(1 + G)(-Q). \\ &= [(1 - \psi)(1 + G)](-Q). \\ &= (1 - \frac{G}{1+G})(1 + G)(-Q). \\ &= 1(-Q). \\ &= I. \end{aligned}$$

de même $\Lambda(I - \psi(-Q)) = I$.

Remarque 4.1.1 *Pour le cas $k = 1$ on a l'inversibilité de la même manière.*

Donc, on a le théorème suivant comme resultat dans ce cas ;

Théorème 4.1.1 *Soient $u_0, u_{1,0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$.*

sous les hypothèses (4.1.1) et (4.1.2) et si X un espace UMD le problème (P_{hp}) admet :

-une unique solution semi-strict, si et seulement si ;

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \in (D(A); X)_{\frac{1}{2p}, p} \subset D(Q). \\ Qu_0 - J_f \in D(Q^k) \text{ et } u_{1,0} - \alpha(-Q)^k(Qu_0 - J_f) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}. \end{array} \right.$$

-une unique solution stricte, si et seulement si ;

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \in (D(A); X)_{\frac{1}{2p}, p} \subset D(Q). \\ Qu_0 - J_f \in D(Q^k) \text{ et } u_{1,0} - \alpha(-Q)^k(Qu_0 - J_f) \in (D(A); X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{array} \right.$$

pour $J_f = \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds$.

4.2 Problème avec paramètre spectral

Dans cette partie, et pour un certain nombre positif (très grand) $\omega \geq \omega_0$ (pour $\omega_0 \geq 0$ fixé), on considère le problème suivant :

$$(P_{ps}) \left\{ \begin{array}{l} u''(x) + Au(x) = f(x); \quad x \in (0, 1). \\ u(0) = u_0. \\ Hu'(0) + u(1) = u_{1,0}. \end{array} \right.$$

on pose $A_\omega = A - \omega I$, et on suppose les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\omega_0} \text{ est un opérateur linéaire fermé sur } X \text{ et} \\ [0, +\infty[\subset \rho(A_{\omega_0}) \text{ et } \sup_{\lambda \geq 0} \|\lambda(A_{\omega_0} - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq +\infty. \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall s \in \mathbb{R}; (-A_{\omega_0})^{is} \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \exists c \geq 1; \theta_{A_{\omega_0}} \in]0, \pi[\text{ tels que :} \\ \|(-A_{\omega_0})^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ce^{\theta_{A_{\omega_0}}|s|}. \end{array} \right. \quad (4.2.2)$$

On suppose aussi que :

$$\cdot H \text{ est un opérateur linéaire fermés sur } X. \quad (4.2.3)$$

$$\cdot \forall \xi \in D(H) : A_{\omega_0} H \xi = H A_{\omega_0} \xi. \quad (4.2.4)$$

et

$$\cdot D(Q_{\omega_0}) \subset D(H) \text{ où } : Q_{\omega_0} := -(-A_{\omega_0})^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2.5)$$

on aura dans ce cas $\Lambda = -2HQ_\omega e^{Q_\omega} + I - e^{2Q_\omega}$, qui est un opérateur inversible d'inverse continu grâce au lemme suivant :

Lemme 4.2.1 *Si A est un opérateur linéaire fermé sur X satisfaisant les hypothèses (4.2.1) et (4.2.5), alors :*

$\exists \omega^* \geq \omega_0$ tel que : $\forall \omega \geq \omega^*$; Λ_ω^{-1} existe et borné.

Preuve. En écrivant $\Lambda_\omega = I - T_\omega$ où $T_\omega = 2HQ_\omega e^{Q_\omega} + e^{2Q_\omega}$; alors, montrer que Λ_ω est inversible c'est équivalent à montrer que $\|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$.

et en utilisant la lemme suivant :

Lemme 4.2.2 *Soit A est un opérateur linéaire fermé densément défini sur un espace de Banach X , vérifiant : $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{c}{1+|\lambda|}$; $|\arg \lambda| \geq \pi - \varphi$ où $0 \leq \varphi < \pi$. alors pour $|\arg \lambda| \leq \varphi$ on a :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}; \omega > 0 : \left\| (A + \lambda I)^\alpha e^{-x(A+\lambda I)^{\frac{1}{2}}} \right\| \leq c e^{-\omega x |\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

on a :

$$\begin{cases} \exists c > 0; \exists k > 0; \forall \omega \geq \omega_0. \\ \|Q_\omega^3 e^{Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c e^{-ck\sqrt{\omega}} \text{ et } \|e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c e^{-k\sqrt{\omega}}. \end{cases} \quad (4.2.6)$$

De plus; pour $w \geq w_0$ on a :

$$\begin{aligned} \|Q^2 \omega_0 Q_\omega^{-2}\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|A_{\omega_0} A_\omega^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \\ &= \|(A - \omega_0 I)(A - \omega I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \\ &= \|[(A - \omega_0 I) - (\omega_0 - \omega)I](A - \omega I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \\ &= \|I - (\omega_0 - \omega)(A - \omega I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \\ &\leq 1 + c_0. \end{aligned}$$

et comme $D(Q) \subset D(H)$ et H est un opérateur linéaire fermé alors $HQ_{\omega_0}^{-2}$ est aussi fermé, et en utilisant le théorème du graphe, l'opérateur $HQ_{\omega_0}^{-2}$ est borné, et donc ;

$$\begin{aligned} \|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|2HQ_\omega e^{Q_\omega} + e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \\ &= \|2HQ_{\omega_0}^{-2} Q_{\omega_0}^2 Q_\omega^{-2} Q_\omega^3 e^{Q_\omega} + e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \\ &\leq 2 \|HQ_{\omega_0}^{-2}\|_{\mathcal{L}(X)} \|Q_{\omega_0}^2 Q_\omega^{-2}\|_{\mathcal{L}(X)} \|Q_\omega^3 e^{Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \\ &\leq 2 \|HQ_{\omega_0}^{-2}\|_{\mathcal{L}(X)} (1 + c_0) \|Q_\omega^3 e^{Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} + \|e^{2Q_\omega}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \end{aligned}$$

et d'après (4.2.6) on aura :

$$\begin{aligned} \|T_\omega\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq 2 \|HQ_{\omega_0}^{-2}\|_{\mathcal{L}(X)} (1 + c_0)ce^{-k\sqrt{\omega}} + ce^{-k\sqrt{\omega}}; \quad c, k > 0 \\ &< 1; \quad \forall \omega \geq \omega^*. \end{aligned}$$

Donc on peut dire que Λ_ω^{-1} existe, qui nous permet de résoudre notre problème.

On peut résumer le résultat dans le théorème suivant ;

Théorème 4.2.1 *Soient $u_0, u_{1,0} \in X$ et $f \in L^p(0, 1; X)$ où X un espace UMD.*

sous les hypothèse (4.2.1) et (4.2.5), il existe $\omega^ \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$ le problème (P_{ps}) admet :*

-une unique solution semi-strict, si et seulement si ;

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A); X)_{\frac{1}{2p}, p} \subset D(Q). \\ Q_\omega u_0 - J_f \in D(H) \text{ et } u_{1,0} - H(Q_\omega u_0 - J_f) \in (D(A), X)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

-une unique solution stricte, si et seulement si ;

$$\begin{cases} u_0 \in (D(A); X)_{\frac{1}{2p}, p} \subset D(Q). \\ Q_\omega u_0 - J_f \in D(H) \text{ et } u_{1,0} - H(Q_\omega u_0 - J_f) \in (D(A); X)_{\frac{1}{2p}, p}. \end{cases}$$

pour $J_f = \int_0^1 e^{sQ} f(s) ds$.

Application

On s'intéresse dans ce chapitre à des exemples de problèmes concrets d'EDP pour illustrer tout ce qu'on a vu dans les quatre premiers chapitres de ce mémoire.

Exemple 5.0.1 Dans cet exemple, on prend $X = L^2(\mathbb{R})$ et on définit les opérateurs A et H par :

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\mathbb{R}) = \{u \in X / u' \in X; u'' \in X\}. \\ Au = au'' \text{ pour } u \in D(A) \text{ et } a > 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(H) = H^1(\mathbb{R}) = \{u \in X / u' \in X\}. \\ Au = bu' \text{ pour } u \in D(H). \end{cases}$$

En utilisant ces données, le problème (P_{ps}) devient ;

$$(P_{E_1}) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - wu(x, y) = f(x, y); (x, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R}. \\ u(0, y) = u_0(y); y \in \mathbb{R}. \\ u(1, y) + b \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(0, y) = u_{1,0}(y); y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Il est clair que les opérateurs A et H sont linéaires fermés, de plus, il est facile de vérifier qu'ils satisfont l'hypothèse (4.2.4) du chapitre 4.

Proposition 5.0.1 l'opérateur linéaire fermé A vérifie :

- i) $\rho(A) \supset [0, +\infty[$ et $\exists k > 0; \|(A - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{k}{1+\lambda}; \forall \lambda \geq 0.$
- ii) $\exists k > 0 / \forall \varepsilon > 0; \forall s \in \mathbb{R}; (-A)^{is} \in \mathcal{L}(X)$ et $\|(-A)^{is}\| \leq ke^{|s|\varepsilon}.$

Preuve. Pour le point *i*) on résoud explicitement l'équation :

$$\begin{cases} a(x)v''(x) - \lambda v(x) = g(x)g \in L^p(0,1), \lambda > 0. \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

On peut voir que ce problème admet une unique solution $v \in W^{2,p}(0,1) \cap W_0^{1,p}(0,1)$ et que :

$$\{(A - \lambda)^{-1}g\}(x) = v(x) \quad \text{où :}$$

$$v(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{e^{-\sqrt{\lambda/\alpha_1}(x-s)}}{\sqrt{\lambda/\alpha_1}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + Q_1(x, s, \lambda) \right) g(s) ds + \int_x^1 \frac{e^{-\sqrt{\lambda/\alpha_1}(x-s)}}{\sqrt{\lambda/\alpha_1}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + R_1(x, s, \lambda) \right) g(s) ds. & (*) \\ \int_0^x \frac{e^{-\sqrt{\lambda/\beta_1}(x-s)}}{\sqrt{\lambda/\beta_1}} \left(\frac{1}{\beta_1} + Q_2(x, s, \lambda) \right) g(s) ds + \int_x^1 \frac{e^{-\sqrt{\lambda/\beta_1}(x-s)}}{\sqrt{\lambda/\beta_1}} \left(\frac{1}{\beta_2} + R_2(x, s, \lambda) \right) g(s) ds. & (**) \end{cases}$$

où (*) est vraie pour $0 \leq x \leq x_1$ et (**) pour $1 \geq x \geq x_1$ et :

$$Q_1(x, s, \lambda) = \left(\frac{e^{-\sqrt{\lambda/\alpha_1}x} - e^{-\sqrt{\lambda/\alpha_1}s} - e^{-\sqrt{\lambda/\alpha_1}(1-x)} + e^{-\sqrt{\lambda/\alpha_1}(1-x+s)}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda/\alpha_1}}} \right).$$

Les autres termes Q_i et R_i s'obtiennent par symétrie. Il est classique grâce à le système du noyau et au lemme de Schur d'en déduire *i*).

Pour le point *ii*) on utilise la représentation intégrale suivante pour la puissance complexe d'un opérateur linéaire fermé pour $0 < \operatorname{Re}(z) < 1/2$:

$$\begin{aligned} [(-A)^{-z}g](x) &= \frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} \int_0^\infty \lambda^{-z} [(-A + \lambda)^{-1}g](x) d\lambda. \\ &= \begin{cases} \sum_{j=1}^{j=4} I_{1,j}(x) & \text{pour } x \in [0, 1/2]. \\ \sum_{j=1}^{j=4} I_{2,j}(x) & \text{pour } x \in [1/2, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $I_{1,j}$ on a :

$$\begin{aligned}
I_{1,j}(x) &= \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(1-z) \Gamma(z)} \int_0^x \left(\int_0^\infty \lambda^{-z} \frac{e^{-\sqrt{\lambda/\alpha_1}(x-s)}}{\sqrt{\lambda/\alpha_1}} d\lambda \right) g(s) ds. \\
&= \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(1-z) \Gamma(z)} \int_0^x \int_0^\infty \left(\frac{\alpha_1 \sigma^2}{(x-s)^2} \right)^{-z} \frac{\alpha_1 e^{-\sigma} 2\sigma}{\frac{\sigma}{(x-s)} (x-s)^2} g(s) d\sigma ds. \\
&= \frac{2\alpha_1^{-z}}{\Gamma(1-z) \Gamma(z)} \int_0^x (x-s)^{2z-1} \left(\int_0^\infty \sigma^{-2z} e^{-\sigma} d\sigma \right) g(s) ds. \\
&= \frac{2\alpha_1^{-z} \Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z) \Gamma(z)} \int_0^x (x-s)^{2z-1} g(s) ds. \\
&= \frac{2\alpha_1^{-z} \Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z) \Gamma(z)} (\phi_z * G)(x).
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} \phi_z(\lambda) = \mathcal{A}_{[0,\infty[}(\lambda) \cdot \lambda^{2z-1} = \lambda_+^{2z-1} \in S' \\ G(s) = g(s) \text{ sur } [0,1] \text{ et nulle ailleurs.} \end{cases}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}
F(\phi_z)(\xi) &= \Gamma(2z) [2\pi i \xi + 0]^{-2z}. \\
&= \Gamma(2z) |2\pi \xi|^{-2z} [h(\xi) e^{i\pi z} + h(-\xi) e^{-i\pi z}].
\end{aligned}$$

où h est la fonction valant 1 pour $\xi > 0$ et nulle ailleurs et F la transformée de Fourier.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
I_{1,1} &= F[m_z \cdot F(G)](x) \quad \text{où :} \\
m_z(\xi) &= \frac{2\alpha_1^{-z} \Gamma(1-2z)}{\Gamma(1-z) \Gamma(z)} F(\phi_z)(\xi). \\
&= \frac{2\alpha_1 \Gamma(1-2z) \Gamma(2z)}{\Gamma(1-z) \Gamma(z)} |2\pi \xi|^{-2z} [h(\xi) e^{i\pi z} + h(-\xi) e^{i\pi z}].
\end{aligned}$$

On a :

$$\sup_{\xi \in R} |m_z(\xi)| \leq \left| \frac{1}{\alpha_1^z} \frac{1}{\cos z\pi} \frac{1}{2i\pi \xi^{2z}} \right| e^{\pi |\operatorname{Im} z|}$$

Et :

$$\sup_{\xi \in R} |\xi m_z(\xi)| \leq |2z| \left| \frac{1}{\alpha_1^z} \frac{1}{\cos z\pi} \frac{1}{2i\pi \xi^{2z}} \right| e^{\pi |\operatorname{Im} z|}$$

D'où l'on déduit par application du théorème de Mikhlin et du même travail pour les autres termes $I_{k,j}$ après les avoir mis sous forme de convolution, l'existence d'une constante K positive (dépendant de p, α_i, β_i) telle que :

$$\begin{aligned} \|(-A)^{-z}\|_{L(L^p(0,1))} &\leq K(1+|z|) \frac{1}{|\alpha_1^z|} \frac{1}{|\cos \pi z|} e^{\pi |\operatorname{Im} z|} \\ \|(-A)^{is}\|_{L(L^p(0,1))} &\leq K(1+|s|) \frac{1}{\cosh \pi |s|} \leq K e^{\varepsilon_1 |s|} \end{aligned}$$

(voir[9])

D'après cette proposition, on peut dire que les hypothèses (4.2.1) et (4.2.2) sont vérifiées dans cet exemple.

Donc on peut résoudre le problème (P_{E_1}) , et on a le théorème suivant :

Théorème 5.0.2 *Si $f \in L^p(0,1, L^2(\mathbb{R}))$; $1 < p < \infty$, alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$, le problème (P_{E_1}) admet une unique solution semi-stricte, si et seulement si ;*

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. u_0 \in (H^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2p}, p}. \\ 2. Q_\omega u_0(\cdot) - \int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s, \cdot) ds \in H^1(\mathbb{R}). \\ u_{1,0} - \frac{\partial}{\partial y}(Q_\omega u_0(\cdot) - \int_0^1 e^{sQ_\omega} f(s, \cdot) ds) \in (H^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} \end{array} \right.$$

Remarque 5.0.1 *On peut généraliser cet exemple en utilisant le théorème suivant qui assure la propriété (BIP).*

Théorème 5.0.3 *Soient $1 < p < \infty$; $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega \in \mathbb{R}^n$. On suppose que l'opérateur A a la forme divergence :*

$$A = \sum_{k,j=1}^n \partial_j a_{jk} \partial_k + \delta \quad ; \delta \geq 0.$$

et on pose :

$$a = (a_{jk}) \text{ et } b_k = -\left(\sum_{j=1}^n \partial_j a_{jk}\right); \quad k = \overline{1, n}.$$

tel que :

$$(A_1) \begin{cases} a(x) = b_{jk}(x) \text{ est une matrice réelle symétrique et :} \\ \exists a_0 > 0 \text{ tel que : } a_0 \leq a(x)\xi - \xi \leq a_0^{-1}; \\ \text{pour tout } x \in \overline{\Omega}; \xi \in \mathbb{R}^n; \|\xi\| = 1. \end{cases}$$

$$(A_2) \begin{cases} a_{ij} \in C^\alpha(\overline{\Omega}) \text{ pour } \alpha \in (0, 1); \text{ si } \Omega \text{ est borné;} \\ a_{ij}^\infty = \lim_{|x| \rightarrow \infty} a_{ij}(x) \text{ existe et :} \\ |a_{ij}(x) - a_{ij}^\infty| \leq C|x|^{-\alpha}; \quad x \in \Omega; \quad |x| \geq 1; \quad i, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$(A_3) \begin{cases} b_i(x); C(x) \text{ sont des fonction mesurables à valeurs complexes et qui admettent la représentation} \\ b_i(x) = \sum_{k=1}^n C^k(x) \\ \text{avec :} \\ b_i^k \in L^{r_k}(\Omega); C_k \in L^{S_k}(\Omega); \text{ pour : } \begin{cases} p \leq r_k \leq \infty \\ p \leq S_k \leq \infty \\ r_k > n; S_k > \frac{n}{2} \end{cases} \end{cases}$$

De plus, si on suppose que :

i) $\delta > 0$

ii) Ω est borné.

Alors ;

$$A^{iy} \in \mathcal{L}(L^p(\Omega)); \quad \|A^{iy}\| \leq M\theta e^{\theta|y|}; \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Exemple 5.0.2 Ici, on reprend l'exemple posé dans l'introduction de ce mémoire dans un espace simple, mais avec un poids ϕ constant.

On prend alors ; l'espace :

$$X = L^p(0, 1); \quad p \in]1, +\infty[$$

et on définit l'opérateur A par :

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(0, 1) \cap W_0^{1,p}(0, 1). \\ (A\varphi)(y) = \varphi''(y); \quad \varphi \in D(A). \end{cases}$$

et l'opérateur H linéaire borné sur X définie par

$$H(\varphi) = \psi$$

où :

$$\psi(y) = K \int_0^y \varphi(\xi) d\xi; \quad \varphi \in X; \text{ pour } K \text{ fixé.}$$

Alors, le problème s'écrit comme suit :

$$(P_{E_2}) \begin{cases} \Delta_{x,y} u(x, y) - wu(x, y) = f(x, y), (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[. \\ u(0, y) = u_0(y). \\ u(1, y) + K \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(0, \xi) d\xi = u_{1,0}(y). \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0. \end{cases}$$

On montre alors que les hypothèses (4.2.3) $\sim$ (4.2.6) sont satisfaites et on déduit les conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles on peut résoudre cet exemple.

Remarque 5.0.2 *Si le poids ϕ n'est pas constant (varie), alors l'hypothèse de la commutativité "(2.1.7) du chapitre 2" n'est pas vérifiée.*

On doit donc remplacer cette dernière hypothèse par une certaine hypothèse générale sur les commutateurs, comme c'est le cas dans l'article de Favini A et al [4].

Bibliographie

- [1] **Balakrishnan, A.V.** : Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. *Pac. J. Math.* 10, 419–437 (1960).
- [2] **Burkholder. D.L** : A géométricale caractérisation of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, *Ann. Proba.*, 9(1981), 977-1011.
- [3] **Cheggag, M. Favini, A., Labbas, R., Maingot, S., Medeghri, A.** : Sturm Liouville problems for an abstract differential equation of elliptic type in UMD spaces. *Differ. Integr. Equ.* 21(9–10), 981–1000 (2008).
- [4] **Favini, A., Labbas, R., Maingot, S., Meisner, M.** : Boundary Value Problem for Elliptic Differential Equations in Noncommutative Cases, *DCDS*, vol. 33 (volume in honor of Jerry's 70th birthday), Number 11&12, November & December, pp. 4967–4990.
- [5] **Haase M.** : The Functional Calculus for Sectorial Operators. *Operator Theory : Advances and Applications*, vol. 169. Birkh" auser Verlag, Basel-Boston-Berlin (2006).
- [6] **Hammou, H, Labbas, R, Maingot, S, Medeghri, A.** : On some elliptic problems with nonlocal boundary coefficient-operator conditions inthe framework of Hölderian spaces. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 36, 1–32 (2013).
- [7] **Hammou, H , Labbas, R, Maingot, S, Medeghri, A.** : Nonlocal General Boundary Value Problems of Elliptic Type in L^p Cases :*Mediterranean Journal of Mathematics* 2015.
- [8] **Holmes, E.E., Lewis, M.A., Banks, J.E., Veit, R.R.** : Partial differential equation in ecology : spatial interactions and population dynamics. *Ecology* 75(1), 17–29 (1994).

-
- [9] **Labbas, R. Moussaoui, M.** :Résolution de l'équation de la Chaleur a coefficients discontinus par la méthode des sommes d'opérateurs. Lyon Saint-Etienne novembre 1995 preprint N^o 217.
- [10] **Lions.J.L, Peetre J.** : Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Etudes. Publ. Math., 19(1964), 5-68.
- [11] **Martin-Vaquero, J., Vigo-Aguiar, J.** : A note on efficient techniques for the second-order parabolic equation subject to non-local conditions. Appl. Numer. Math. 59, 1258–1264 (2009).
- [12] **Triebel.H** : Interpolation theory, Function spaces, Differential operators, Amsterdam, North Holland (1978).