

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis -Mostaganem-

Faculté des Sciences Exactes et de L'Informatique
Département de Mathématiques-Informatique

-----o O o-----

THESE DE DOCTORAT

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

SUR UNE CERTAINE CLASSE DE N – UPLETS CONTRACTIFS
DANS LES ESPACES DE HILBERT

-----o O o-----

Présentée par : **Rais- Ali Fatima Zohra Née : Delali**

Thèse soutenue, le 04/02/2016, devant le Jury composé de :

Président :	Sadek Gala	Prof. Université de Mostaganem
Directeur de thèse :	Berrabah Bendoukha	Prof. Université de Chlef
Examineur :	Mekki Terbeche	Prof. Université d'Oran
Examineur :	Abdelkader Segres	MCA. Université de Mascara
Examineur :	Mohand Ould Ali	MCA. Université de Mostaganem

Année Universitaire : 2015 – 2016

Dedicaces

Ce travail est dédié à :

Ma douce et tendre mère, pour m'avoir toujours soutenue.

Mon très cher et respectueux père, pour ses encouragements et sa confiance en moi.

Mon Epoux.

Mes enfants.

Toute ma famille.

Toutes les personnes qui m'ont soutenue ou aidé .

Remerciements

*Au nom d'**ALLAH** le Clément et le Miséricordieux!*

*Louange à **ALLAH** le Tout Puissant de m'avoir donné la force, le courage et la volonté d'accomplir ce travail.*

J'adresse mes sincères remerciements à mon Directeur de thèse, le Professeur Berrabah BENDOUKHA, pour m'avoir proposé le sujet, encouragé, orienté, aidé et guidé tout au long de ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Sadek GALA, Professeur à l'Université de Mostaganem pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le Jury de soutenance de cette thèse .

Mes remerciements vont également aux membres du Jury Mekki TERBECHE, Abdelkader SEGRES et Mohand OULD ALI pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être dans le Jury de ma thèse.

Je voudrais également exprimer mes grands remerciements à tous les enseignants et personnel administratif du Département de Mathématiques-Informatique de l'Université de Mostaganem.

Je remercie encore une fois mes parents, mon époux pour m'avoir encouragé durant toutes ces années d'études.

Table des matières

1	DEFINITIONS GENERALES	7
1.1	Produit Tensoriel d'Espaces de Hilbert	7
1.2	Produit Tensoriel d'applications Lineaires	11
1.3	Noyau Reproduisant	12
2	N-UPLETS CONTRACTIFS D'OPERATEURES	16
2.1	Introduction	16
2.2	Fonction Caractéristique d'une n-Contraction Commutative	17
2.3	Modèle Fonctionnel	19
3	SPECTRE DE TAYLOR D'UNE N-CONTRACTION COMMUTATIVE	27
3.1	Introduction	27
3.2	Spectre de Taylor	28
3.3	Spectre de Taylor et Automorphismes Involutifs	37
4	N-UPLET DISSIPATIFS ET FONCTIONS CARACTERISTIQUES ASSOCIEES	44
4.1	Introduction	44
4.2	N -Uplet Dissipatif et transformée de Cayley	49
4.3	Fonction Caractéristique d'un n - Uplet Dissipatif	55
5	Conclusion-Perspectives	60
	Bibliographie	61

INTRODUCTION

Soit T une contraction dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . On appelle fonction caractéristique de T , la fonction $\theta_T(z)$, définie pour $|z| < 1$ et dont les valeurs sont des opérateurs linéaires de $\mathcal{D}_T = \overline{(I_{\mathcal{H}} - T^*T)^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}}$ dans $\mathcal{D}_{T^*} = \overline{(I_{\mathcal{H}} - TT^*)^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}}$:

$$\theta_T(z) = -T + z(I_{\mathcal{H}} - TT^*)^{\frac{1}{2}}(I_{\mathcal{H}} - zT^*)^{-1}(I_{\mathcal{H}} - T^*T)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

La formule 1 fut trouvée par B. Sz. Nagy et C. Foias [15, 16] à travers l'analyse harmonique des dilatations unitaires des contractions complètement non unitaires. Cela, leurs a en outre permis de construire le modèle fonctionnel, clairement dépendant uniquement de $\theta_T(z)$. Dans le cas des contractions de la classe $C_{.0}$ ou $C_{0.}$, ce modèle fut obtenu par les américains Helson [14], Rota [22], Rovnyak [23]. Il est cependant utile de noter que la notion de fonction caractéristique possède des origines plus anciennes. En effet, cette notion apparaît déjà en 1946 dans les travaux de M. C. Livshits [17], [18], et puis dans les travaux de V. T. polyatskii (1959) [20] pour les opérateurs (non nécessairement des contractions), vérifiant la condition : $\dim \overline{(I_{\mathcal{H}} - T^*T) \mathcal{H}} = \dim \overline{(I_{\mathcal{H}} - TT^*) \mathcal{H}} < +\infty$. Dans ces cas, des modèles concrets furent construits à l'aide des opérateurs de Volterra et des opérateurs de multiplication par les fonctions non décroissantes. Ces modèles trouvèrent des applications concrètes dans la théorie corrélatoire de certaines classes de suites non stationnaires dans les espaces de Hilbert voir cite [4] et [25]. Plus tard [10], La notion de fonction caractéristique connut un nouveau développement grâce à la théorie des colligations unitaires.

Pour les multicontractions c'est à dire les n -uplets $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ vérifiant la

condition $\sum_{k=1}^n T_k T_k^* \leq I$ ou de manière équivalente, :

$$\|T_1 h_1 + T_2 h_2 + \dots + T_n h_n\|_{\mathcal{H}^n}^2 \leq \|h_1\|_{\mathcal{H}}^2 + \|h_2\|_{\mathcal{H}}^2 + \dots + \|h_n\|_{\mathcal{H}}^2.$$

pour tout $(h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathcal{H}^n$, les premiers résultats remontent aux travaux de A. E. Frazho [13] et G. Popescu [21] dans le cas non commutatif. Pour le cas commutatif ($T_i T_j = T_j T_i \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$), les résultats fondateurs dont l'étude des multicontractions sont dus à W. Arveson [2]. Parmi ces résultats, on citera essentiellement le théorème suivant : qui fut à la base de la construction des modèles fonctionnels [7, 8] :

théorème 0.1 *Soit $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ une n -contraction commutative définie dans l'espace de Hilbert H . Il existe alors un unique opérateur*

$L_T : H_n^2 \otimes \mathcal{D}_{T^*} \longrightarrow H$ tel que pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ et $x \in \mathcal{D}_{T^*}$

$$L_T(p \otimes x) = p(T) D_{T^*}(x). \quad (2)$$

Ce résultat est à la base de la construction des modèles fonctionnels pour les n -contractions commutatives pure (voir 2.3, chapitre 2 de la présente thèse) et complètement non coisométriques [7].

Pour les multicontractions commutatives, la fonction caractéristique est définie par [8] :

$$\theta_T(z) = -T + (I_{\mathcal{H}} - TT^*)^{\frac{1}{2}} (I_H - ZT^*)^{-1} Z (I_{\mathcal{H}^n} - T^*T)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

où $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{B}^n$ - boule unité de \mathbb{C}^n , Z est l'opérateur défini de \mathcal{H}^n dans \mathcal{H} par $Z(h_1, h_2, \dots, h_n) = z_1 h_1 + z_2 h_2 + \dots + z_n h_n$. Dans le cas $n = 1$, on retrouve la définition de fonction caractéristique au sens de [19].

Depuis sa découverte, la fonction caractéristique a constitué l'outil fondamental dans l'étude des opérateurs, en remplacement de la résolvante dans l'efficacité se limite aux opérateurs normaux ou à spectre constitué de parties compactes. Dans le cas d'une contraction, elle fut entre autres utilisée pour [19] :

1. La construction des modèles fonctionnels de certaines classes de contractions,
2. La caractérisation des différentes parties du spectre et ce en termes de fonction caractéristique seulement,
3. La construction des fonctions caractéristiques ainsi que des modèles fonctionnels pour les opérateurs dissipatifs et ce grâce à la transformée de Cayley.

La présente thèse se propose d'étendre au cas multidimensionnel les raisonnements appliqués et les résultats obtenus dans les points 2 et 3. Elle se compose d'une introduction et de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on rappelle les propriétés du produit tensoriel d'espaces de Hilbert et d'opérateurs linéaires. On rappelle aussi la construction de l'espace de Hardy - Areson. Le deuxième chapitre est consacré au rappel des principaux résultats relatifs aux n -contractions commutatives pures et complètement non coisométriques.

définition 0.1 Une n -contraction commutative $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ est dite pure si la suite $I_{\mathcal{H}} = P_T(I_{\mathcal{H}}) \geq P_T^2(I_{\mathcal{H}}) \geq \dots \geq P_T^q(I_{\mathcal{H}}) \geq \dots \geq 0$, $\left(P_T(X) = \sum_{k=1}^n T_k X T_k^* \right)$ converge vers l'opérateur nul dans \mathcal{H} au sens de la topologie forte. D'après [8], ceci est équivalent à :

$$T_{\infty} = s. \lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_q=1}^n T_{i_q} \dots T_{i_2} T_{i_1} T_{i_1}^* T_{i_2}^* \dots T_{i_q}^* = 0. \quad (4)$$

Le symbol $s.$ désigne la convergence au sens de la topologie forte. Dans le cas $n = 1$, cela signifie que la contraction $T \in C_{.0}$.

définition 0.2 La n -contraction commutative $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ est dite complètement non coisométrique (cnc) si : $\ker(I_{\mathcal{H}} - T_{\infty}) = 0$.

Remarque 0.1 *La complète non coisométrie, signifie qu'il n'existe dans \mathcal{H} aucun sous-espace invariant pour tous les T_i^* et dans lequel chaque T_i^* induit un opérateur isométrique. Par ailleurs, toute n -contraction commutative pure est cnc.*

définition 0.3 *Deux n -contractions commutatives $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ et $T' = (T'_1, T'_2, \dots, T'_n)$ définies dans \mathcal{H} et \mathcal{H}' respectivement, sont dites unitairement équivalentes s'il existe un opérateur unitaire U de \mathcal{H} dans \mathcal{H}' tel que : $T_i = U^{-1}T'_iU$ pour tout $1 \leq i \leq n$.*

T. Bhattacharyya, J. Eschmeier, J. Sarkar établirent dans [8] que toute n -contraction commutative pure est unitairement équivalente à son modèle fonctionnel. Le même résultat fut étendu par C. Benhida, D. Timotin au cas c.n.c. [7]. On a le résultat fondamental suivant [7, 8], montre que dans le cas des n -contractions commutatives pures, la fonction caractéristique est un invariant unitaire :

théorème 0.2 *Deux n -contractions commutatives pures $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ et $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ sont unitairement équivalentes si et seulement si, leurs fonctions caractéristiques $\theta_T(z)$ et $\theta_R(z)$ coïncident. C'est à dire qu'il existe deux opérateurs unitaires $\Gamma : \mathcal{D}_T \longrightarrow \mathcal{D}_R$ et $\Gamma_* : \mathcal{D}_{T^*} \longrightarrow \mathcal{D}_{R^*}$ tels que $\Gamma_*\theta_T = \theta_R\Gamma$.*

Dans le troisième chapitre, on donne une caractérisation du spectre de Taylor de la n -contraction commutative à l'aide de l'opérateur L_T en premier lieu, puis en termes de la fonction caractéristique en second lieu. On étudie aussi le comportement de ce spectre sous l'action des automorphismes involutifs de \mathbb{B}^n .

Dans le quatrième et dernier chapitre, on introduit les concepts de n -uplet dissipatif et sa transformée de Cayley. Ainsi, et suivant le même schéma adopté dans [19] pour le cas d'un seul opérateur, on construit le modèle fonctionnel associé et on établit son équivalence unitaire avec le n -uplet dissipatif de départ. On définit aussi la fonction caractéristique et on montre que comme dans le cas contractif, c'est un invariant unitaire. Il est à noter que dans le cas $n = 1$, on retrouve les résultats de [19].

Notons enfin que les résultats du chapitre trois, ont fait l'objet d'un article publié dans la revue Quaestiones Mathematicae [6].

Chapitre 1

DEFINITIONS GENERALES

Dans ce chapitre, nous exposons les principaux concepts nécessaires à la compréhension de la suite du présent travail. Nous indiquerons à chaque fois qu'il le faut les références bibliographiques correspondantes.

1.1 Produit Tensoriel d'Espaces de Hilbert

Soit $(\mathcal{H}_i)_{i=1}^n$ une famille d'espaces de Hilbert. On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ le produit scalaire dans \mathcal{H}_i . On note $h_1 \otimes \dots \otimes h_n : \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ la forme multilinéaire définie par

$$(h_1 \otimes \dots \otimes h_n) [h'_1, \dots, h'_n] = \langle h_1, h'_1 \rangle_1 \dots \langle h_n, h'_n \rangle_n. \quad (1.1)$$

On vérifie facilement les résultats suivants :

1. $h_1 \otimes \dots \otimes h_n = 0 \iff \exists 1 \leq i \leq n : h_i = 0_i$. (0_i le vecteur nul de \mathcal{H}_i , 0 la forme zéro)
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ et $\forall 1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} \lambda. (h_1 \otimes \dots \otimes h_n) &= (\lambda h_1) \otimes \dots \otimes h_n \\ &= h_1 \otimes \dots \otimes (\lambda h_i) \otimes \dots \otimes h_n \\ &= h_1 \otimes \dots \otimes (\lambda h_n), \end{aligned} \quad (1.2)$$

3. $\forall 1 \leq i \leq n$

$$h_1 \otimes \dots \otimes (h_i + h'_i) \otimes \dots \otimes h_n = (h_1 \otimes \dots \otimes h_i \otimes \dots \otimes h_n) + (h_1 \otimes \dots \otimes h'_i \otimes \dots \otimes h_n) \quad (1.3)$$

Soit \mathcal{E} l'espace vectoriel engendré par ces formes. On définit un produit scalaire sur \mathcal{E} par

$$\langle h_1 \otimes \dots \otimes h_n, h'_1 \otimes \dots \otimes h'_n \rangle_{\mathcal{E}} = \prod_{i=1}^n \langle h_i, h'_i \rangle_i. \quad (1.4)$$

définition 1.1 Le complété de \mathcal{E} , noté $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$, est appelé produit tensoriel des espaces $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$.

Proposition 1.1 Soit $\left(e_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{+\infty}$ une base Hilbertienne de l'espace \mathcal{H}_i c'est-à-dire :

1. $\langle e_k^{(i)}, e_j^{(i)} \rangle = \delta_{kj}$ (symbole de Kronecker)
2. $\forall h_i \in \mathcal{H}_i$,

$$h_i = \sum_{k_i=1}^{+\infty} \langle h_i, e_{k_i}^{(i)} \rangle_i e_{k_i}^{(i)}, 1 \leq i \leq n. \quad (1.5)$$

$$\|h_i\|_i^2 = \sum_{k_i=1}^{+\infty} \left| \langle h_i, e_{k_i}^{(i)} \rangle_i \right|^2 < \infty. \quad (1.6)$$

Alors la famille $\left(e_{k_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{k_n}^{(n)}\right)_{k_1, \dots, k_n=1}^{+\infty}$ constitue une base Hilbertienne de l'espace $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$.

Preuve. Il faut montrer que $\left(e_{k_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{k_n}^{(n)}\right)_{k_1, \dots, k_n=1}^{+\infty}$ est un système orthonormé complet de $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$. Pour tout élément $h_1 \otimes \dots \otimes h_n$ de $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$, on a :

$$\begin{aligned} h_1 \otimes \dots \otimes h_n &= \left(\sum_{k_1=1}^{+\infty} \langle h_1, e_{k_1}^{(1)} \rangle_1 e_{k_1}^{(1)} \right) \otimes h_2 \otimes \dots \otimes h_n \\ &= \sum_{k_1=1}^{+\infty} \langle h_1, e_{k_1}^{(1)} \rangle_1 \left(e_{k_1}^{(1)} \otimes h_2 \otimes \dots \otimes h_n \right) \\ &= \sum_{k_1=1}^{+\infty} \langle h_1, e_{k_1}^{(1)} \rangle_1 \left(e_{k_1}^{(1)} \otimes \left(\sum_{k_2=1}^{+\infty} \langle h_2, e_{k_2}^{(2)} \rangle_2 e_{k_2}^{(2)} \right) \otimes \dots \otimes h_n \right) \\ &= \sum_{k_1=1}^{+\infty} \langle h_1, e_{k_1}^{(1)} \rangle_1 \sum_{k_2=1}^{+\infty} \langle h_2, e_{k_2}^{(2)} \rangle_2 \left(e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes h_n \right) \\ &= \sum_{k_1=1}^{+\infty} \langle h_1, e_{k_1}^{(1)} \rangle_1 \sum_{k_2=1}^{+\infty} \langle h_2, e_{k_2}^{(2)} \rangle_2 \left(e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes \left(\sum_{k_n=1}^{+\infty} \langle h_n, e_{k_n}^{(n)} \rangle_n e_{k_n}^{(n)} \right) \right) \\ &= \sum_{k_1=1}^{+\infty} \langle h_1, e_{k_1}^{(1)} \rangle_1 \sum_{k_2=1}^{+\infty} \langle h_2, e_{k_2}^{(2)} \rangle_2 \dots \sum_{k_n=1}^{+\infty} \langle h_n, e_{k_n}^{(n)} \rangle_n \left(e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{k_n}^{(n)} \right) \\ &= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=1}^{+\infty} \langle h_1, e_{k_1}^{(1)} \rangle_1 \langle h_2, e_{k_2}^{(2)} \rangle_2 \dots \langle h_n, e_{k_n}^{(n)} \rangle_n \left(e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{k_n}^{(n)} \right) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=1}^{+\infty} \left| \langle h_1, e_{k_1}^{(1)} \rangle_1 \right|^2 \left| \langle h_2, e_{k_2}^{(2)} \rangle_2 \right|^2 \dots \left| \langle h_n, e_{k_n}^{(n)} \rangle_n \right|^2 \\ &= \sum_{k_1=1}^{+\infty} \left| \langle h_1, e_{k_1}^{(1)} \rangle_1 \right|^2 \sum_{k_2=1}^{+\infty} \left| \langle h_2, e_{k_2}^{(2)} \rangle_2 \right|^2 \dots \sum_{k_n=1}^{+\infty} \left| \langle h_n, e_{k_n}^{(n)} \rangle_n \right|^2 \leq +\infty \end{aligned} \quad (1.7)$$

■

Exemple 1.1 $\mathbb{C} \otimes \mathcal{H} \simeq \mathcal{H}$ et $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \simeq \mathbb{C}^{nm}$.

Exemple 1.2 Soit $E = \mathbb{C}^d$, $d = 1, 2, \dots$, muni du produit scalaire usuel

$$\langle z, w \rangle_E = \sum_{i=1}^d z_i \bar{w}_i; \quad z = (z_1, \dots, z_d), \quad w = (w_1, \dots, w_d). \quad (1.8)$$

Posons

$$E^{\otimes 0} = \mathbb{C}, \quad E^{\otimes n} = \underbrace{E \otimes E \otimes \dots \otimes E}_{n \text{ fois}}, \quad n \geq 1. \quad (1.9)$$

Soit maintenant E^n le produit tensoriel symétrique de n copies de E , caractérisé comme suit :

$$w = w_1 \otimes w_2 \otimes \dots \otimes w_n \in E^n \iff w = w_{\pi(1)} \otimes w_{\pi(2)} \otimes \dots \otimes w_{\pi(n)}, \quad \pi \in S_n. \quad (1.10)$$

S_n désigne le groupe symétrique de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, il est clair que E^k est un sous-espace de $E^{\otimes n}$. De plus d'après [2], on a

$$E^n = \left\{ \frac{1}{n!} \sum_{\delta \in S_n} w_{\delta(1)} \otimes w_{\delta(2)} \otimes \dots \otimes w_{\delta(n)} : w_i \in E \right\}. \quad (1.11)$$

Désignons par $P_{[z_1, \dots, z_d]}$ l'algèbre complexe des polynôme en $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{B}^d$

où

$$\mathbb{B}^d = \{z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : \|z\| < 1\},$$

Avec

$$\|z\|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_d|^2.$$

Tout élément f de $P_{[z_1, \dots, z_d]}$ admet la représentation

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z), \quad (1.12)$$

où $f_k(z)$ ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) est un polynôme homogène de degré k et $f_0(z)$ est le polynôme constant. D'autre part, pour tout $k = 0, 1, \dots, n$ et tout $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{B}^d$,

$$\begin{aligned}
f_k(z) &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^d a_{i_1, i_2, \dots, i_k} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k} \\
&= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^d a_{i_1, i_2, \dots, i_k} \langle z, e_{i_1} \rangle_E \langle z, e_{i_2} \rangle_E \dots \langle z, e_{i_k} \rangle_E \\
&= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^d a_{i_1, i_2, \dots, i_k} \langle z^k, e_{i_1} \otimes e_{i_2} \dots \otimes e_{i_k} \rangle_{E^{\otimes k}} \\
&= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^d \langle z^k, \overline{a_{i_1, i_2, \dots, i_k}} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \dots \otimes e_{i_k} \rangle_{E^{\otimes k}} \text{ avec } z^k = \underbrace{z \otimes z \otimes \dots \otimes z}_{k \text{ fois}}
\end{aligned}$$

Soit P_{ζ_k} l'orthoprojecteur de $E^{\otimes k}$ sur E^k . En posant

$\xi_k = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^d P_{\zeta_k}(\overline{a_{i_1, i_2, \dots, i_k}} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \dots \otimes e_{i_k})$ tout élément de P admet la représentation suivante

$$f(z) = \sum_{k=0}^{k=n} \langle z^k, \xi_k \rangle_{E^k}, \xi_k \in E^k \quad (1.13)$$

avec

$$\|f\|_P^2 = \sum_{k=0}^{k=n} \|\xi_k\|_{E^k}^2.$$

Remarque 1.1 La représentation (1.13) a été obtenue d'une autre manière par William Arveson en utilisant le lemme de Riesz.[2]. L'espace $(P, \|\cdot\|_P)$ n'est pas complet. En effet, choisissons une suite f_n dans P telle que f_n soit de Chauchy mais non convergente dans P .

Soit maintenant

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{z^k}{k!}, z = (z_1, \dots, z_d) \in B^d. \quad (1.14)$$

Remarquons tout d'abord que

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{k=n} \left\langle z^k, \frac{e_1^k}{k!} \right\rangle_{E^k} = \sum_{k=0}^{k=n} \langle z^k, \xi_k \rangle_{E^k}, \xi_k = \frac{e_1^k}{k!}.$$

Il est clair que f_n est de Chauchy, pour tous m et n tels que $m < n$, on a

$$\|f_n - f_m\|_P^2 = \sum_{k=n+1}^m \|\xi_k\|_{E^k}^2 = \sum_{k=n+1}^m \left\| \frac{e_1^k}{k!} \right\|_{E^k}^2 = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!^2}.$$

D'autre part, pour tout $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{B}^d$ fixé, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{z_1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z_1^k}{k!} = \exp(z_1).$$

Or cette limite n'est pas un élément de $P_{[z_1, \dots, z_d]}$. D'où l'incomplétude de l'espace $(P, \|\cdot\|_P)$.

Dans ce cas on peut définir le complété de l'espace $(P, \|\cdot\|_P)$ appelé espace de Hardy-Arveson noté H_d^2 [2].

$$H_d^2 = \left\{ f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle z^k, \xi_k \rangle_{E^k} : \sum_{k=0}^{+\infty} \|\xi_k\|_{E^k}^2 < +\infty, \xi_k \in E^k \right\}, \quad z^k = \underbrace{z \otimes \dots \otimes z}_{k\text{-fois}} \quad (1.15)$$

Le produit scalaire correspondant à l'espace H_d^2 est le suivant

$$\left\langle \sum_{k=0}^{+\infty} \langle z^k, \xi_k \rangle_{E^k}, \sum_{k=0}^{+\infty} \langle z^k, \mu_k \rangle_{E^k} \right\rangle_d = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle \mu_k, \xi_k \rangle_{E^k} \quad (1.16)$$

La norme associée à ce produit scalaire sera désignée par $\|\cdot\|_d$. Elle est donnée par la relation

$$\|f\|_d^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|\xi_k\|_{E^k}^2. \quad (1.17)$$

1.2 Produit Tensoriel d'applications Lineaires

Soient $X_i, Y_i, Z_i, i = \{1, 2\}$ des espaces de Hilbert.

définition 1.2 Soient $A : X_1 \longrightarrow Y_1$ et $B : X_2 \longrightarrow Y_2$, deux applications linéaires. Le produit tensoriel de A par B est l'application :

$$\begin{aligned} A \otimes B & : X_1 \otimes X_2 \longrightarrow Y_1 \otimes Y_2 \\ x_1 \otimes x_2 & \longrightarrow A \otimes B(x_1 \otimes x_2) = A(x_1) \otimes B(x_2) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Il est clair que $A \otimes B$ est une application bilinéaire. Dans le cas de n-applications, on obtient une application n-linéaire.

Proposition 1.2 Soient $A : X_1 \longrightarrow Y_1, B : X_2 \longrightarrow Y_2, C : Z_1 \longrightarrow X_1, D : Z_2 \longrightarrow X_2$. Alors,

1. $(A \otimes B) \circ (C \otimes D) = (A \circ C) \otimes (B \circ D)$.
2. $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$.
3. Si A et B sont inversibles alors, $A \otimes B$ est aussi inversible et on a, $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

Preuve. 1. Soit $z_1 \otimes z_2 \in Z_1 \otimes Z_2$,

$$\begin{aligned}
 (A \otimes B) \circ (C \otimes D)(x_1 \otimes x_2) &= (A \otimes B)(C(x_1) \otimes D(x_2)) \\
 &= AC(x_1) \otimes BD(x_2) \\
 &= A \circ C(x_1) \otimes B \circ D(x_2) \\
 &= (A \circ C) \otimes (B \circ D)(x_1 \otimes x_2) \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

2. Soient $x_1 \otimes x_2 \in X_1 \otimes X_2$, $y_1 \otimes y_2 \in Y_1 \otimes Y_2$,

$$\begin{aligned}
 \langle (A \otimes B)(x_1 \otimes x_2), y_1 \otimes y_2 \rangle_{\otimes} &= \langle A(x_1) \otimes B(x_2), y_1 \otimes y_2 \rangle \\
 &= \langle A(x_1), y_1 \rangle_{\otimes} \langle B(x_2), y_2 \rangle_{\otimes} \\
 &= \langle x_1, A^*(y_1) \rangle \langle x_2, B^*(y_2) \rangle \quad (1.20) \\
 &= \langle x_1 \otimes x_2, A^*(y_1) \otimes B^*(y_2) \rangle \\
 &= \langle x_1 \otimes x_2, A^* \otimes B^*(y_1 \otimes y_2) \rangle
 \end{aligned}$$

3. On a,

$$\begin{aligned}
 (A \otimes B) \circ (A^{-1} \otimes B^{-1}) &= (A \circ A^{-1}) \otimes (B \circ B^{-1}) \quad (1.21) \\
 &= I_A \otimes I_B = I_{A \otimes B}.
 \end{aligned}$$

■

1.3 Noyau Reproductant

Les définitions et résultats de cette partie peuvent être retrouvées dans [1].

définition 1.3 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert dont les éléments sont des fonctions définies sur un ensemble non vide X . On appelle noyau reproductant de H toute fonction $k(x, y)$ à deux variables x et y dans X et vérifiant les conditions :

- a) Pour tout y fixé dans X , la fonction $k_y(\cdot) : x \longrightarrow k(x, y)$ est un élément de H ,
- b) Pour tous $f \in H$ et $y \in X$, on a

$$f(y) = \langle f(\cdot), k(\cdot, y) \rangle_H. \quad (1.22)$$

Proposition 1.3 *Soit X un ensemble arbitraire et H un espace de Hilbert de fonctions à valeurs complexes sur X . Alors, H est un espace de Hilbert à noyau reproduisant si pour tout x dans X , la forme linéaire*

$$L_x : f \rightarrow f(x) \text{ est continue}$$

Preuve. voir[1] ■

D'après le théorème de représentation de Riesz, cela implique que pour tout x dans X , il existe un unique élément k_x avec la propriété que :

$$f(x) = \langle f, k_x \rangle, \forall f \in H \quad (1.23)$$

Posons

$$k(x, y) = k_y(x), \quad (1.24)$$

alors,

$$k(x, y) = \langle k_y, k_x \rangle. \quad (1.25)$$

En particulier,

$$k(x, x) = \langle k_x, k_x \rangle \geq 0, \forall x \in X, \quad (1.26)$$

avec

$$k_x = 0 \iff (f(x) = \langle f, 0 \rangle = 0), \forall f \in H \quad (1.27)$$

Exemple 1.1 *A titre d'exemple, nous allons maintenant définir le noyau reproduisant de l'espace H_d^2 espace de Hardy-Harveson :*

$$H_d^2 = \left\{ f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle z^k, \zeta_k \rangle_{E^k} : \sum_{k=0}^{+\infty} \|\zeta_k\|_{E^k}^2 < +\infty, \zeta_k \in E^k \right\} \quad (1.28)$$

D'après les résultats de William Arveson [2] l'espace H_d^2 peut être identifié à l'espace symétrique de Fock sur E ,

$$\mathcal{F}_+(E) = E^0 \oplus E^1 \oplus \dots$$

Considérons l'application J définie de H_d^2 dans \mathcal{F}_+ par :

$$J(f) = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots), \quad (1.29)$$

La suite $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ est appelée suite des coefficients de Taylor de la fonction f . Il est clair que J est une application anti-unitaire. Soit $x \in \mathbb{B}^d$, définissons maintenant l'application

$$K_x : B^d \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto K_x(z) = \frac{1}{1 - \langle z, x \rangle_E}$$

$$\langle z, x \rangle_E = \sum_{i=1}^d z_i \bar{x}_i \text{ avec } z = (z_1, z_2, \dots, z_d), x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \quad (1.30)$$

On a alors,

1. $K_x \in H_d^2$ pour tout $x \in B^d$.
2. Pour tous x, z dans B^d . $\langle K_x, K_z \rangle_d = \frac{1}{1 - \langle z, x \rangle_E}$
3. $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle z^k, \zeta_k \rangle_{E^k} \in H_d^2 \implies f(z) = \langle f, K_z \rangle_d$.

En effet,

1. pour $x, z \in B^d$, on a :

$$K_x(z) = \frac{1}{1 - \langle z, x \rangle_E} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\langle z, x \rangle_E)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle z^k, x^k \rangle_{E^k} \in H_d^2$$

- 2.

$$x \in E \implies J(K_x) = (1, x, x^2, \dots) \in \mathcal{F}_+$$

Par conséquent, pour $x, z \in B^d$, on a :

$$\begin{aligned} \langle K_x, K_z \rangle_d &= \langle J(K_z), J(K_x) \rangle_{\mathcal{F}_+} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \langle z^k, x^k \rangle_{E^k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\langle z, x \rangle_E)^k = \frac{1}{1 - \langle z, x \rangle_E} \end{aligned}$$

3. Puisque,

$$J(K_z) = (1, z, z^2, \dots) \text{ et } J(f) = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots),$$

alors,

$$\langle f, K_z \rangle_d = \langle J(K_z), J(f) \rangle_{\mathcal{F}_+} = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle z^k, \zeta_k \rangle_{E^k} = f(z).$$

Il en résulte de tout ce qui précède que la fonction,

$$\begin{aligned} K & : B^d \times B^d \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, z) & \longmapsto K(x, z) = \frac{1}{1 - \langle z, x \rangle_E} \end{aligned} \tag{1.31}$$

est le le noyau reproduisant de l'espace H_d^2 .

Chapitre 2

N-UPLETS CONTRACTIFS D'OPERATEURES

2.1 Introduction

définition 2.1 Soit $\{T\}_{i=1}^n$ une famille de contractions deux à deux commutantes et définies dans un même espace de Hilbert \mathcal{H} . Le n -uplet $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ est dit n -contraction commutative si $\forall (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathcal{H}^n$:

$$\|T_1 h_1 + T_2 h_2 + \dots + T_n h_n\|_{\mathcal{H}^n}^2 \leq \|h_1\|_{\mathcal{H}}^2 + \|h_2\|_{\mathcal{H}}^2 + \dots + \|h_n\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.1)$$

Ceci est équivalent à la condition :

$$\sum_{k=1}^n T_k T_k^* \leq I. \quad (2.2)$$

Autrement dit, l'application

$$T : \mathcal{H}^n \longrightarrow \mathcal{H} ; \quad T(h_1, h_2, \dots, h_n) = T_1 h_1 + T_2 h_2 + \dots + T_n h_n \quad (2.3)$$

est une contraction.

Dans le cas $n = 1$, on retrouve la notion usuelle de contraction.

définition 2.2 La n -contraction commutative $T = (T_1, \dots, T_n)$ est dite :

1. pure si la suite décroissante :
 $I_{\mathcal{H}} \geq P_T(I_{\mathcal{H}}) \geq P_T^2(I_{\mathcal{H}}) \geq \dots \geq P_T^m(I_{\mathcal{H}}) \geq \dots \geq 0$, converge fortement vers l'opérateur nul de \mathcal{H} . En d'autres termes,

$$T_{\infty} = \quad s. \quad \lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_q=1}^n T_{i_m} \dots T_{i_2} T_{i_1} T_{i_1}^* T_{i_2}^* \dots T_{i_q}^* = 0$$

2. complètement non coisométrique (cnc) si $\ker(I_{\mathcal{H}} - T_{\infty}) = \{0\}$.

Remarque 2.1 La compléte non coisométrie, signifie qu'il n'existe aucun sous espace de \mathcal{H} , invariant pour tout les T_i^* et dans lequel chacun des T_i^* , induit un opérateur isométrique. Notons aussi que toute n -contraction commutative pure, est complètement non coisométrique.

2.2 Fonction Caractéristique d'une n -Contraction Commutative

définition 2.3 Soit $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ une n -contraction commutative définie dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} , les opérateurs :

$$D_{T^*} = (I_{\mathcal{H}} - TT^*)^{\frac{1}{2}} = (I_{\mathcal{H}} - \sum_{i=1}^n T_i T_i^*)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$D_T = (I_{\mathcal{H}^n} - T^*T)^{\frac{1}{2}} = ((\delta_{ij} - T_i^* T_j)_{i,j=1}^n)^{\frac{1}{2}}, (\delta_{ij} - \text{symbole de Kronecker})$$

sont appelés opérateurs de défaut de la n -contraction commutative T . Les fermatures respectives des rangs de ces opérateurs $\mathcal{D}_{T^*} = \overline{D_{T^*}\mathcal{H}}$ et $\mathcal{D}_T = \overline{D_T\mathcal{H}^n}$ sont appelés espaces de défaut de la n -contraction T . Comme dans le cas d'une seul contraction, on a le résultat suivant [8] :

Proposition 2.1 Pour toute n -contraction commutative T définie dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} , on a :

$$TD_T = D_{T^*}T \quad , \quad T^*D_{T^*} = D_T T^* \quad (2.4)$$

définition 2.4 Soit $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ une n -contraction commutative. On appelle fonction caractéristique de T la fonction θ_T définie de B^n dans $L(\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*})$ par

$$\theta_T(z = (z_1, z_2, \dots, z_n)) = -T + D_{T^*}(I_{\mathcal{H}} - ZT^*)^{-1}ZD_T, \quad (2.5)$$

avec

$$Z : \mathcal{H}^n \longrightarrow \mathcal{H}, \quad Z(h_1, h_2, \dots, h_n) = z_1 h_1 + z_2 h_2 + \dots + z_n h_n,$$

et

$$Z^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^n, \quad Z^*(h) = (\overline{z_1} h_1, \overline{z_2} h_2, \dots, \overline{z_n} h_n).$$

Il est clair que l'opérateur Z est une contraction et que

$$ZZ^* = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \cdot I_{\mathcal{H}}. \quad (2.6)$$

Dans le cas $n = 1$, on retrouve la notion usuelle de fonction caractéristique au sens de B. Sz. Nagy et C. Foias [19]. Toujours selon [19], on a

Proposition 2.2 Soit $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ est une n -contraction commutative définie dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} . Alors,

$$I_H - \theta_T(w)(\theta_T(z))^* = (1 - WZ^*)D_{T^*}(I_H - WT^*)^{-1}(I_H - TZ^*)^{-1}D_{T^*}, \forall z, w \in B^n. \quad (2.7)$$

Preuve. On a par définition, $\theta_T(w) = -T + D_{T^*}(I_H - WT^*)^{-1}WD_T$ et $(\theta_T(z))^* = -T^* + D_T Z^*(I_H - TZ^*)^{-1}D_{T^*}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} I_H - \theta_T(w)(\theta_T(z))^* &= I_H - (-T + D_{T^*}(I_H - WT^*)^{-1}WD_T) \\ &\quad \times (-T^* + D_T Z^*(I_H - TZ^*)^{-1}D_{T^*}) \\ &= (I_H - TT^*) + T(D_T Z^*(I_H - TZ^*)^{-1}D_{T^*} \\ &\quad + D_{T^*}(I_H - WT^*)^{-1}WD_T T^* \\ &\quad - D_{T^*}(I_H - WT^*)^{-1}WD_T^2 Z^*(I_H - TZ^*)^{-1}D_{T^*}) \\ &= D_{T^*}^2 + D_{T^*}TZ^*(I_H - TZ^*)^{-1}D_{T^*} \\ &\quad + D_{T^*}(I_H - WT^*)^{-1}WT^*D_{T^*} \\ &\quad - D_{T^*}(I_H - WT^*)^{-1}WD_T^2 Z^*(I_H - TZ^*)^{-1}D_{T^*} \\ &\times D_{T^*}(I_H - WT^*)^{-1}\{(I_H - WT^*)(I_H - TZ^*) \\ &\quad + (I_H - WT^*)TZ^* + WT^*(I_H - TZ^*) \\ &\quad - WZ^* + WT^*TZ^*\}(I_H - TZ^*)^{-1}D_{T^*} \\ &= D_{T^*}(I_H - WT^*)^{-1}\{I_H - TZ^* - WT^* + WT^*TZ^* + TZ^* - WT^*TZ^* \\ &\quad - WZ^* + WT^*TZ^*\}(I_H - TZ^*)^{-1}D_{T^*} \\ &= D_{T^*}(I_H - WT^*)^{-1}\{1 - WZ^*\}(I_H - TZ^*)^{-1}D_{T^*} \\ &= (1 - WZ^*)D_{T^*}(I_H - WT^*)^{-1}(I_H - TZ^*)^{-1}D_{T^*} \end{aligned}$$

■

Proposition 2.3 L'application M_{θ_T} définie de $H_n^2 \otimes \mathcal{D}_T$ dans $H_n^2 \otimes \mathcal{D}_{T^*}$ par

$$M_{\theta_T}(f(\cdot) \otimes x) = f(\cdot) \otimes \theta_T(\cdot)x, \quad (x \in \mathcal{D}_T) \quad (2.8)$$

est une contraction bilinéaire [8].

Preuve. En effet

$$\|f(\cdot) \otimes \theta_T(\cdot)x\| = \|f(\cdot)\| \|\theta_T(\cdot)x\|. \quad (2.9)$$

Or $\theta_T(\cdot)$ est contractive

$$\|\theta_T(\cdot)x\| \leq \|x\|. \quad (2.10)$$

Il en résulte

$$\|f(\cdot)\| \otimes \|\theta_T(\cdot)x\| \leq \|f(\cdot)\| \|x\|. \quad (2.11)$$

Par conséquent M_{θ_T} est une contraction. La bilinéarité de cette application découle des propriétés de bilinéarité du produit tensoriel. ■

définition 2.5 Deux n -contractions $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ et $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ définies respectivement dans H et K sont dites unitairement équivalentes s'il existe un opérateur unitaire $U : H \rightarrow K$ tel que

$$T_i = U^* R_i U, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

définition 2.6 [8] Soient $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ et $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ deux n -contractions définies respectivement dans H et K . On dit que leurs fonctions caractéristiques θ_T et θ_R coïncident s'il existe deux opérateurs unitaires $\Gamma : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathcal{D}_R$ et $\Gamma_* : \mathcal{D}_{T^*} \rightarrow \mathcal{D}_{R^*}$ tels que :

$$\Gamma_* \theta_T = \theta_R \Gamma. \quad (2.13)$$

théorème 2.1 [9] Deux n -contractions pures sont unitairement équivalentes si et seulement si leur fonctions caractéristiques coïncident.

2.3 Modèle Fonctionnel

Considérons l'espace de Hilbert

$$H_n^2(\mathcal{E}) = \left\{ f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k \in \mathcal{O}(\mathbb{B}^n, \mathcal{E}) : a_k \in \mathcal{E} \text{ et } \|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{\|a_k\|^2}{\gamma_k} < \infty \right\} \quad (2.14)$$

où $\mathcal{O}(\mathbb{B}^n, \mathcal{E})$, est la classe de toutes les fonctions analytiques définies sur \mathbb{B}^n à valeur dans \mathcal{E} , $z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$, $\gamma_k = (k_1 + \dots + k_n)! / k_1! \dots k_n!$. D'après [8], le noyau reproduisant de cet espace est : $(1 - \langle z, w \rangle)^{-1} I_{\mathcal{E}}$. Il est isomorphe à l'espace $H_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}$. De plus, il coïncide avec l'espace usuel de Hadry dans le cas où $\mathcal{E} = \mathbb{C}$ et $n = 1$.

définition 2.7 Soit $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{B}^n$. La n -contraction commutative $M_Z = (M_{z_1}, \dots, M_{z_n})$ telle que

$$M_{z_i} : H_n^2(\mathbb{C}) \rightarrow H_n^2(\mathbb{C}), \quad f(z) \rightarrow z_i f(z)$$

est appelée n -shift. De plus, elle est pure [9].

Soit $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ une n -contraction définie dans \mathcal{H} . On a les deux résultats suivants, dus à W. Arveson [2]

théorème 2.2 Soit $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ une n -contraction commutative définie dans l'espace de Hilbert H . Il existe alors un unique opérateur

$L_T : H_n^2 \otimes \mathcal{D}_{T^*} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ et tout $x \in \mathcal{D}_{T^*}$,

$$L_T(p \otimes x) = p(T) D_{T^*}(x) \quad (2.15)$$

L'opérateur adjoint $L^* : \mathcal{H} \longrightarrow H_n^2 \otimes \mathcal{D}_{T^*}$ est défini par la formule,

$$(L_T^* h)(z) = D_{T^*}(I_{\mathcal{H}} - zT^*)^{-1} h. \quad (2.16)$$

Considérons maintenant l'espace :

$$\widehat{\mathbb{H}} = (H_n^2 \otimes \mathcal{D}_{T^*}) \ominus M_{\theta_T}(H_n^2 \otimes \mathcal{D}_{T^*}) \quad (2.17)$$

et l'opérateur

$$\begin{aligned} M_{z_k} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} & : H_n^2 \otimes \mathcal{D}_{T^*} \longrightarrow H_n^2 \otimes \mathcal{D}_{T^*} . \\ f \otimes x & \longmapsto (M_{z_k} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}})(f(z) \otimes x) = z_k f(z) \otimes x \end{aligned} \quad (2.18)$$

Selon [2] l'opérateur L satisfait les résultats suivants :

1.

$$L_T L_T^* + T_\infty = I_{\mathcal{H}} \quad (2.19)$$

2.

$$L_T^* L_T + M_{\theta_T} M_{\theta_T}^* = I_{H_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_{T^*}} \quad (2.20)$$

3. Pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$T_i L_T = L_T (M_{z_i} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \quad (2.21)$$

Ainsi donc,

Proposition 2.4 Soit $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ une n -contraction commutative. Alors T est pure si et seulement si L^* est isométrique.

Preuve. voir [2, 7, 9] ■

Grâce aux travaux de **T. Bhattacharyya, J. Eschmeier et J. Sarkar [9]** et

Chafiq Benhida et Dan Timotin [7], on a les résultats fondamentaux suivants :

théorème 2.3 : Toute n -contraction commutative et pure $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ définie dans H est unitairement équivalente à la n -contraction Π définie dans l'espace $\widehat{\mathbb{H}}$ comme suit :

$$\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n), \Pi_k = P_{\widehat{\mathbb{H}}}(M_{z_k} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \Big|_{\widehat{\mathbb{H}}}, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.22)$$

où $P_{\widehat{\mathbb{H}}}$ est l'orthoprojecteur de $H_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_{T^*}$ sur $\widehat{\mathbb{H}}$. L'espace $\widehat{\mathbb{H}}$ est appelé l'espace fonctionnel et $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n)$, le modèle fonctionnel.

Proposition 2.5 *Si T est pure, alors T est unitairement équivalent à la n -contraction $M_Z = (M_{z_1}, \dots, M_{z_n})$ si et seulement si $\theta_T \equiv 0$.*

Preuve. voir [2, 7, 9] ■

Exemple 2.1 *Soit $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ une contraction. Considérons le 2-uplet $T = (A, 0)$*

1) On a, $I_{\mathcal{H}} - TT^* = I_{\mathcal{H}} - AA^*$ d'où T est contractif.

2) D'après (2.5) Les opérateurs et les espaces de *défaut* de T sont :

a)

$$D_{T^*} = (I_{\mathcal{H}} - AA^*)^{1/2}; \mathcal{D}_{T^*} = \mathcal{D}_{A^*}$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_T = \begin{bmatrix} (I_{\mathcal{H}} - AA^*)^{1/2} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_A & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D}_T = \mathcal{D}_A \oplus \{\mathcal{H}\} \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

3) La fonction caractéristique du 2-uplet T est :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{B}^2$$

$$\begin{aligned} \theta_T(a, b) &= \left[-T + D_{T^*}(I_{\mathcal{H}} - aT^*)^{-1}(a, b) D_T \right] |_{\mathcal{D}_T} \\ &= \left[(-A, 0) + (I_{\mathcal{H}} - AA^*)^{1/2} (I_{\mathcal{H}} - aT^*)^{-1} \left(a (I_{\mathcal{H}} - A^*A)^{1/2}, b \right) \right] |_{\mathcal{D}_T} \end{aligned}$$

4) D'après (2.19) l'opérateur L_T^* est défini comme suit :

$$\begin{aligned} L_T^* &: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_2 \otimes D_{T^*} \\ x &\longrightarrow L_T^*(x)(z_1, z_2) = D_{T^*}(I_{\mathcal{H}} - z_1 A^*)^{-1}(x) \end{aligned} \quad (2.25)$$

d'où

$$\begin{aligned} L_T^*(x)(z_1, z_2) &= D_{A^*}(I_{\mathcal{H}} - z_1 A^*)^{-1}(x) \\ &= D_{A^*} \left(\sum_{n_1=0}^{+\infty} z_1^{n_1} (A^*)^{n_1} \right) (x) \\ &= \sum_{n_1=0}^{+\infty} z_1^{n_1} D_{A^*} (A^*)^{n_1} (x) \\ &= \sum_{n_1=0}^{+\infty} D_{A^*} (A^*)^{n_1} (x) z_1^{n_1} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^2} a_n(x) z^n, \quad z = (z_1, z_2), \quad n = (n_1, n_2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

avec

$$a_n(x) = \begin{cases} D_{A^*} (A^*)^{n_1} (x) & (\text{ si } n_2 = 0) \\ 0 & (\text{ si } n_2 \neq 0) \end{cases}$$

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} \|L_T^*(x)\|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}^2} \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} \|a_n(x)\|^2 \\ &= \sum_{n_1=0}^{+\infty} \|D_{A^*} (A^*)^{n_1} (x)\|^2 \\ &= \sum_{n_1=0}^{+\infty} \langle D_{A^*} (A^*)^{n_1} (x), D_{A^*} (A^*)^{n_1} (x) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n_1=0}^{+\infty} \langle A^{n_1} D_{A^*}^2 (A^*)^{n_1} (x), x \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n_1=0}^{+\infty} \langle A^{n_1} (I_H - AA^*) (A^*)^{n_1} (x), x \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n_1=0}^{+\infty} \langle A^{n_1} (A^*)^{n_1} (x), x \rangle_{\mathcal{H}} - \sum_{n_1=0}^{+\infty} \langle A^{n_1+1} (A^*)^{n_1+1} (x), x \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n_1=0}^{+\infty} [\langle A^{n_1} (x), A^{n_1} (x) \rangle_{\mathcal{H}} - \langle A^{n_1+1} (x), A^{n_1+1} (x) \rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n_1=0}^p [\langle A^{n_1} (x), A^{n_1} (x) \rangle_{\mathcal{H}} - \langle A^{n_1+1} (x), A^{n_1+1} (x) \rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \|x\|^2 - \lim_{p \rightarrow +\infty} \|(A^*)^p (x)\|^2. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Donc

$$\begin{aligned} T \text{ est coisométrique} &\iff \|L_T^*(x)\|^2 = \|x\|^2 \\ &\iff \|x\|^2 - \lim_{p \rightarrow +\infty} \|(A^*)^p (x)\|^2 = \|x\|^2 \\ &\iff \lim_{p \rightarrow +\infty} \|(A^*)^p (x)\|^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (I_{\mathcal{H}} - T_{\infty})x &= 0 \iff \langle (I_H - T_{\infty})x, x \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \\ &\iff \langle L_T L_T^*(x), x \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\iff \|L_T^*(x)\|^2 = 0 \\ &\iff \|x\|^2 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|(A^*)^p (x)\|^2 \\ &\iff \|x\| = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|(A^*)^p (x)\| \end{aligned} \tag{2.29}$$

En résumé :

1)

$$T \text{ est pure} \iff \lim_{p \rightarrow +\infty} \|(A^*)^p(x)\| = 0, \forall x \in \mathcal{H}$$

2)

$$T \text{ cnc} \iff \lim_{p \rightarrow +\infty} \|(A^*)^p(x)\| = \|x\|. \quad (2.30)$$

Exemple 2.2 Soient a et b deux nombres complexes tels que $|a|^2 + |b|^2 \leq 1$.

Considérons dans H le 2-uplet,

$$T(x, y) = ax + by.$$

Dans ce cas, on a

1)

$$D_{T^*}h = (1 - |a|^2 - |b|^2)^{1/2} h, \quad \mathcal{D}_{T^*} = \begin{cases} \{0\} & (\text{si } |a|^2 + |b|^2 = 1) \\ H & (\text{si } |a|^2 + |b|^2 < 1) \end{cases} \quad (2.31)$$

2) D_T admet la représentation matricielle suivante :

$$D_T = \begin{bmatrix} (1 - |a|^2) & -\bar{a}b \\ -a\bar{b} & (1 - |b|^2) \end{bmatrix}^{1/2} \quad (2.32)$$

3) La fonction caractéristique du 2-uplet T est :

$$\theta_T(z_1, z_2) = \left\{ \begin{array}{l} -T + (1 - |a|^2 - |b|^2)^{1/2} (I_H - z_1\bar{a} - z_2\bar{b})^{-1}(z_1 \cdot 1_H, z_2 \cdot 1_H) \\ \times \begin{bmatrix} (1 - |a|^2) & -\bar{a}b \\ -a\bar{b} & (1 - |b|^2) \end{bmatrix}^{1/2} \end{array} \right\} \Big|_{\mathcal{D}_T} \quad (2.33)$$

4) L'opérateur L_T^* est défini comme suit :

$$\begin{aligned} L_T^* & : H \longrightarrow H_2 \otimes \mathcal{D}_{T^*} \\ x & \longrightarrow L_T^*(x)(z_1, z_2) = D_{T^*}(1 - z_1\bar{a} - z_2\bar{b})^{-1}(x) \end{aligned} \quad (2.34)$$

d'où

$$\begin{aligned} L_T^*(x)(z_1, z_2) & = (1 - |a|^2 - |b|^2)^{1/2} (1 - z_1\bar{a} - z_2\bar{b})^{-1}(x) \\ & = (1 - |a|^2 - |b|^2)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (z_1\bar{a} + z_2\bar{b})^n \right) x \\ & = (1 - |a|^2 - |b|^2)^{1/2} \lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(z)x \end{aligned} \quad (2.35)$$

où

$$f_p(z) = \sum_{n=0}^p (z_1 \bar{a} + z_2 \bar{b})^n. \quad (2.36)$$

D'après (2.15) et (2.16) on a,

$$\begin{aligned} L_T L_T^*(x) &= (1 - |a|^2 - |b|^2)^{1/2} \lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(T) D_{T^*}(x) \\ &= (1 - |a|^2 - |b|^2)^{1/2} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p (|a|^2 + |b|^2)^n (1 - |a|^2 - |b|^2)^{1/2} x \\ &= \frac{(1 - |a|^2 - |b|^2)}{(1 - |a|^2 - |b|^2)} x = x. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Alors

$$L_T L_T^* = I_H \text{ c-à-d } T \text{ est pure.}$$

Dans le cas $|a|^2 + |b|^2 = 1$:

$$D_{T^*} = 0$$

d'où

$$L_T^*(x) = 0$$

Par conséquent,

$$I - T_\infty = L_T L_T^* = 0$$

Donc

$$T \text{ n'est ni pure ni cnc.}$$

Soient f et g deux fonctions de $L^2[0, 1] = H$. On suppose que $f(x) \cdot \overline{g(x)} = 0$ p.p sur $[0, 1]$.et $\|f\|^2 + \|g\|^2 < 1$.

Considérons dans H le 2-uplet,

$$T = (T_f, T_g)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1) } T_f : L^2[0, 1] \longrightarrow L^2[0, 1] \quad \text{et} \quad \mathbf{2) } T_g : L^2[0, 1] \longrightarrow L^2[0, 1] \\ h \longrightarrow T_f(h) = f.h \quad \quad \quad h \longrightarrow T_g(h) = g.h \end{array} \right\} \quad (2.38)$$

Alors,

$$D_{T^*} = (I_H - TT^*)^{1/2}, \quad T^* = \begin{pmatrix} T_{\bar{f}} \\ T_{\bar{g}} \end{pmatrix}$$

On a,

$$\begin{aligned} TT^*h &= (T_f, T_g) \begin{pmatrix} T_{\bar{f}} \\ T_{\bar{g}} \end{pmatrix} h \\ &= f\bar{f}.h + g\bar{g}.h \\ &= (|f|^2 + |g|^2).h \end{aligned}$$

Ainsi

$$D_{T^*} = (I_H - (|f|^2 + |g|^2))^{1/2}$$

L'opérateur D_T est défini comme suit :

$$D_T = (I_{\mathcal{H}^n} - T^*T)^{\frac{1}{2}} = ((\delta_{ij} - T_i^*T_j)_{i,j=1}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (T_1 = T_f, \quad T_2 = T_g)$$

Par conséquent,

1)

$$\begin{aligned} D_T &= \left[\begin{array}{cc} (1 - |f|^2) & 0 \\ 0 & (1 - |g|^2) \end{array} \right]^{1/2}, \quad (f(x).\overline{g(x)} = 0) \\ &= \left[\begin{array}{cc} (1 - |f|^2)^{1/2} & 0 \\ 0 & (1 - |g|^2)^{1/2} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Avec l'espace de défaut $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_{T_f} \oplus \mathcal{D}_{T_g}$.

2)La fonction caractéristique du 2-uplet T est :

$$\theta_T(z_1, z_2) = \left[\begin{array}{c} -T + (1 - |f|^2 - |g|^2)^{1/2} (I_H - z_1\bar{f} - z_2\bar{g})^{-1}(z_1.1_H, z_2.1_H) \\ \times \left[\begin{array}{cc} (1 - |f|^2)^{1/2} & 0 \\ 0 & (1 - |g|^2)^{1/2} \end{array} \right] \end{array} \right] \Big|_{\mathcal{D}_T}$$

3)L'opérateur L_T^* est défini comme suit :

$$\begin{aligned} L_T^* &: \quad H \longrightarrow H_2 \otimes \mathcal{D}_{T^*} \\ x &\longrightarrow \quad L_T^*(x)(z_1, z_2) = D_{T^*}(1 - z_1\bar{f} - z_2\bar{g})^{-1}(x) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Donc

$$\begin{aligned} L_T^*(x)(z_1, z_2) &= (1 - |f|^2 - |g|^2)^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (z_1 \bar{f} + z_2 \bar{g})^n \\ &= (1 - |f|^2 - |g|^2)^{1/2} \lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(z)x \end{aligned}$$

où

$$f_p(z) = \sum_{n=0}^p (z_1 \bar{f} + z_2 \bar{g})^n .$$

$$\begin{aligned} L_T L_T^*(x) &= (1 - |f|^2 - |g|^2)^{1/2} \lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(T) D_{T^*}(x) \\ &= (1 - |f|^2 - |g|^2)^{1/2} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p (|f|^2 + |g|^2)^n (1 - |f|^2 - |g|^2)^{1/2} x \\ &= (1 - |f|^2 - |g|^2)^{1/2} (1 - |f|^2 - |g|^2)^{1/2} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p (|f|^2 + |g|^2)^n x \\ &= x \end{aligned}$$

Alors

$$L_T L_T^* = I_H$$

Par conséquent

$$T_\infty = I_H - L_T L_T^* = 0 \implies T \text{ est pure.}$$

Chapitre 3

SPECTRE DE TAYLOR D'UNE N-CONTRACTION COMMUTATIVE

3.1 Introduction

La fonction Caractéristique et l'opérateur L_T définis dans le chapitre précédent jouent un rôle fondamental dans l'étude des n -contractions commutative pure et cnc [2, 7, 8, 9]. Ils sont utilisés dans la construction des modèles fonctionnels comme dans le cas d'une contraction [19]. Nous allons dans ce chapitre, voir comment ils peuvent aussi être utilisés dans la caractérisation du spectre de Taylor. Pour cela, nous commençons par définir la chaîne $K(T, \mathcal{H})$ appelée **complexe de Koszul** associée à la n -contractions commutative T , ensuite nous caractérisons le spectre de Taylor d'une n -contractions commutative pure et cnc en utilisant uniquement la fonction caractéristique et l'opérateur L_T^* . Dans la deuxième section nous étudions le comportement du spectre de Taylor sous l'action des automorphismes involutifs dans \mathbb{B}^n . Commençons ce chapitre par le rappel de certaines des propriétés de l'opérateur L_T [2, 7, 8, 9].

théorème 3.1 *Si $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ est une n -contraction commutative définie dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} alors,*

1. *L'opérateur L_T^* est défini de \mathcal{H} dans $H_n^2(\mathcal{D}_{T^*})$ par la formule suivante,*

$$L_T^*(x)(z) = D_{T^*}(I_{\mathcal{H}} - ZT^*)^{-1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \gamma_k(D_{T^*}T^{*k}x)z^k, \quad (3.1)$$

où,

$$k = (k_1, \dots, k_n), \quad z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$$

2. *Les opérateurs L_T et L_T^* vérifient les relations suivantes :*

$$L_T \circ (M_{z_i} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) = T_i \circ L_T, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.2)$$

$$(M_{z_i}^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \circ L_T^* = L_T^* \circ T_i^*, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.3)$$

$$L_T L_T^* + T_\infty = I_{\mathcal{H}}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.4)$$

$$L_T^* L_T + M_{\Theta_T} M_{\Theta_T}^* = I_{H_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_{T^*}} \quad (3.5)$$

avec $M_{z_i}(f) = z_i f$ et comme précédemment,

$$T_\infty = s.Lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p=1}^n T_{i_p} \dots T_{i_2} T_{i_1} T_{i_1}^* T_{i_2}^* \dots T_{i_p}^*. \quad (3.6)$$

3.2 Spectre de Taylor

définition 3.1 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. L'algèbre extérieure $\Lambda_n(\mathcal{H})$ à n générateurs e_1, e_2, \dots, e_n munie d'une unité $e_0 = 1$ et à coefficients dans l'espace \mathcal{H} est définie comme suit :

$$\Lambda_n(\mathcal{H}) = \left\{ \sum_{k=1}^n x_{i_1 \dots i_k} \otimes e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : x_{i_1 \dots i_k} \in \mathcal{H}; 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \right\}, \quad (3.7)$$

avec la condition : $e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i = 0$, $i \neq j$. En écrivant $e_F = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ avec $F = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ et $e_\emptyset = e_0 = 1$, on obtient que

$$\Lambda_n(\mathcal{H}) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda_n^{(k)}(\mathcal{H}), \quad \Lambda_n^{(k)}(\mathcal{H}) = \left\{ \sum_{F \in P_k} x_F \otimes e_F : x_F \in \mathcal{H} \right\},$$

où $\Lambda_n^{(0)}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ et $P_k = \{F \subseteq \{1, \dots, n\} : |F| = k\}$, $|F| = \text{card}(F)$.

Soit $T = (T_1, \dots, T_n)$ une n -contractions commutative. Considérons dans $\Lambda_n(\mathcal{H})$ l'opérateur δ_T , défini par :

$$\delta_T(x_F \otimes e_F) = \sum_{p=1}^n T_p(x_F) \otimes e_p \wedge e_F \quad (3.8)$$

L'opérateur δ_T est défini de $\Lambda_n^{(k)}(\mathcal{H})$ dans $\Lambda_n^{(k+1)}(\mathcal{H})$ et satisfait la condition $\delta_T^2 = 0$. En effet, soit $(x_F \otimes e_F) \in \Lambda_n(\mathcal{H})$. Alors,

$$\begin{aligned} \delta_T^2(x_F \otimes e_F) &= \delta_T \left(\sum_{p=1}^n T_p(x_F) \otimes e_p \wedge e_F \right) \\ &= \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^n T_q T_p(x_F) \otimes e_q \wedge e_p \wedge e_F. \end{aligned}$$

Sachant que $e_q \wedge e_p = 0$ si $p = q$

$$\begin{aligned} \delta_T^2(x_F \otimes e_F) &= \sum_{q,p=1,p \neq q}^n T_q T_p(x_F) \otimes e_q \wedge e_p \wedge e_F \\ &= \sum_{1 \leq q < p \leq n} T_q T_p(x_F) \otimes e_q \wedge e_p \wedge e_F \\ &\quad + \sum_{1 \leq p < q \leq n} T_q T_p(x_F) \otimes e_q \wedge e_p \wedge e_F \end{aligned}$$

D'où()

$$\begin{aligned} \delta_T^2(x_F \otimes e_F) &= \sum_{1 \leq q < p \leq n} T_q T_p(x_F) \otimes e_q \wedge e_p \wedge e_F \\ &\quad + \sum_{1 \leq q < p \leq n} T_p T_q(x_F) \otimes e_p \wedge e_q \wedge e_F \end{aligned}$$

Puisque $e_p \wedge e_q = -e_q \wedge e_p$ et $T_q T_p = T_p T_q \forall q, p = \{1, 2, \dots, n\}, p \neq q$ (T une n -contractions **commutative**). Alors,

$$\begin{aligned} \delta_T^2(x_F \otimes e_F) &= \sum_{1 \leq q < p \leq n} T_q T_p(x_F) \otimes e_q \wedge e_p \wedge e_F \\ &\quad - \sum_{1 \leq q < p \leq n} T_q T_p(x_F) \otimes e_q \wedge e_p \wedge e_F \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous définissons le complexe de Koszul et spectre de Taylor associés à T .

Soit $x_F \otimes e_F \in \Lambda_n(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned} \delta_T \left(\sum_{F \in P_K}^n x_F \otimes e_F \right) &= \sum_{F \in P_K} \sum_{p=1}^n T_p(x_F) \otimes e_p \wedge e_F \quad (3.9) \\ &= \sum_{G \in P_{K+1}} \left(\sum_{F \in P_k(G)} (-1)^s T_r(x_F) \right) \otimes e_G \end{aligned}$$

avec,

$$P_k(G) = \{F \in P_k : F \subset G\} \quad \text{pour } G \in P_{K+1}, \quad (3.10)$$

$$s = \max \{q : i_q \in F \text{ et } i_q < r\}. \quad (3.11)$$

Soit $\delta_T^{(k)}$ la restriction de δ_T à $\Lambda_n^{(k)}(\mathcal{H})$. Le **complexe de Koszul** associé à T est la chaîne :

$$K(T) : 0 \xrightarrow{\delta_T^{(-1)}} \Lambda_n^{(0)}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_T^{(0)}} \Lambda_n^{(1)}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_T^{(1)}} \dots \xrightarrow{\delta_T^{(n-1)}} \Lambda_n^{(n)}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_T^{(n)}} 0 \quad (3.12)$$

définition 3.2 *Le n -uplet $T = (T_1, \dots, T_n)$ est dit inversible si $\ker \delta_T^{(k)} = \mathfrak{S}m\delta_T^{(k-1)}$ pour $k = 0, 1, \dots, n$. Dans ce cas, le complexe de Koszul est dit exacte.*

définition 3.3 *Le spectre de Taylor de T est l'ensemble :*

$$\sigma_{\text{Taylor}}(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C}^n : K(T - \lambda) \text{ est non exacte} \} \quad (3.13)$$

Il est clair que

$$\sigma_{\text{Taylor}}(T) = \bigcup_{k=0}^n \sigma_{\text{Taylor}}^{(k)}(T), \quad \sigma_{\text{Taylor}}^{(k)}(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}^n : \mathfrak{S}m\delta_{T-\lambda}^{(k-1)} \neq \ker \delta_{T-\lambda}^{(k)} \right\}$$

Remarque 3.1 *La notion de spectre de Taylor généralise celle de spectre habituel et coincide avec elle dans le cas d'un seul opérateur. Le spectre de Taylor est un sous-ensemble non vide et compact de \mathbb{C}^n . Une excellente étude du spectre de Taylor et ses liens avec la théorie spectrale multiparamétrique est fournie par [11]. Notons enfin que dans [3], le cas particulier des 2-contractions commutatives pour lesquelles la suite $S_p = \left(\sum_{k=1}^n T_k T_k^* \right)^p$ tend fortement vers l'opérateur nul quand p tend vers l'infini. De telles 2-contractions sont aussi pures, en vertu de la relation.*

$$P_T^q(I_{\mathcal{H}}) \leq \sum_{i=1}^2 T_i S_{q-1} T_i^*, \quad q = 1, 2, \dots$$

Exemple 3.1 *Considérons dans \mathcal{H} , le 2-uplet,*

$$T(x, y) = ax + by, \quad |a|^2 + |b|^2 < 1.$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\mathcal{H}) &= \left\{ \sum_{k=1}^2 x_{i_1 i_2} \otimes e_{i_1} \wedge e_{i_2} : x_{i_1 i_2} \in \mathcal{H}; 1 \leq i_1 < i_2 \leq 2 \right\} \quad (3.14) \\ &= \Lambda_2^0(\mathcal{H}) \oplus \Lambda_2^1(\mathcal{H}) \oplus \Lambda_2^2(\mathcal{H}) \\ &= (\mathcal{H} \otimes e_0) \oplus ((\mathcal{H} \otimes e_1) \oplus (\mathcal{H} \otimes e_2)) \oplus (\mathcal{H} \otimes e_1 \wedge e_2). \end{aligned}$$

Les opérateurs δ_T^0 et δ_T^1 sont définis comme suit :

$$\delta_T^{(0)}(x \otimes e_0) = \sum_{p=1}^2 T_p(x) \otimes e_p \wedge e_0 = (ax \otimes e_1) \oplus (bx \otimes e_2) \in \Lambda_2^{(1)}(\mathcal{H}), \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
\delta_T^{(1)}((x_1 \otimes e_1) \oplus (x_2 \otimes e_2)) &= \sum_{p=1}^2 T_p(x_1) \otimes e_p \wedge e_1 + \sum_{p=1}^2 T_p(x_2) \otimes e_p \wedge e_2 \\
&= T_1 x_2 \otimes e_1 \wedge e_2 + T_2 x_1 \otimes e_2 \wedge e_1 \\
&= (-bx_1 + ax_2) \otimes e_1 \wedge e_2 \in \Lambda_2^{(2)}(\mathcal{H}).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\delta_T^{(2)}(x \otimes e_1 \wedge e_2) = 0, \quad (x \in \mathcal{H}). \tag{3.17}$$

Le spectre de Taylor de T est l'ensemble :

$$\sigma_{\text{Taylor}}(T) = \bigcup_{k=0}^2 \sigma_{\text{Taylor}}^{(k)}(T),$$

avec

1.

$$\begin{aligned}
z &= (z_1, z_2) \in \sigma_{\text{Taylor}}^{(0)}(T) \iff \Im m \delta_{T-Z}^{(-1)} \neq \ker \delta_{T-Z}^{(0)} \\
&\iff \ker \delta_{T-Z}^{(0)} \neq \{0\} \\
&\iff \exists x \neq 0 \text{ tq } (x \otimes e_0) \in \ker \delta_{T-Z}^{(0)} \\
&\iff \exists x \neq 0 \text{ tq } ((a - z_1)x \otimes e_1) \oplus ((b - z_2)x \otimes e_2) = 0_{\Lambda_2^{(1)}(\mathcal{H})} \\
&\iff \exists x \neq 0 \text{ tq } \begin{cases} (a - z_1)x = 0 \\ (b - z_2)x = 0 \end{cases}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Donc

$$\sigma_{\text{Taylor}}^{(0)}(T) = \{(a, b)\}. \tag{3.19}$$

2.

$$\begin{aligned}
z &= (z_1, z_2) \in \sigma_{\text{Taylor}}^{(1)}(T) \iff \Im m \delta_{T-Z}^{(0)} \neq \ker \delta_{T-Z}^{(1)} \\
&\iff \exists X = (x_1 \otimes e_1) \oplus (x_2 \otimes e_2) \in \ker \delta_{T-Z}^{(1)}; X \notin \Im m \delta_{T-Z}^{(0)} \\
&\iff \begin{cases} \exists (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in \mathcal{H}^2 : \\ (a - z_1)x_2 - (b - z_2)x_1 = 0 \\ (x_1, x_2) \neq ((a - z_1)h, (b - z_2)h), \forall h \in \mathcal{H} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

On remarque que $(a, b) \in \sigma_{\text{Taylor}}^{(1)}(T)$. De plus, si on pose :

$f_z : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^2$, $f_z(h) = ((a - z_1)h, (b - z_2)h)$, alors,

$$\sigma_{\text{Taylor}}^{(1)}(T) \subseteq \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2 / (z_2 - b)x_1 + (a - z_1)x_2 = 0\} \tag{3.21}$$

$$\cap \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2 : f_z \text{ non surjective}\}$$

3.

$$z = (z_1, z_2) \in \sigma_{Tay}^{(2)}(T) \iff \mathfrak{S}m\delta_{T-Z}^{(1)} \neq \ker \delta_{T-Z}^{(2)} \quad \left(\ker \delta_{T-Z}^{(2)} = \mathcal{H} \otimes e_1 \wedge e_2 \right) \quad (3.22)$$

$$\iff \exists y \in \mathcal{H}, y \neq 0 \text{ et } y \notin \mathfrak{S}m\delta_{T-Z}^{(1)}$$

$$\iff \exists y \in \mathcal{H} : y \neq -(b - z_2)x_1 + (a - z_1)x_2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{H}^2.$$

On remarque que $(a, b) \in \sigma_{Tay}^{(2)}(T)$. De plus, si on pose :

$f_z : \mathcal{H}^2 \longrightarrow \mathcal{H}$, $f_z(x_1, x_2) = (z_2 - b)x_1 + (a - z_1)x_2$, alors,

$$(z_1, z_2) \in \sigma_{Tay}^{(2)}(T) \iff f_z \text{ non surjective.} \quad (3.23)$$

Exemple 3.2 Soit $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ une contraction. Considérons le 2-uplet $T = (A, 0)$, $T_1x = Ax$, $T_2x = 0x$, ($x \in \mathcal{H}$). Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \delta_T^{(0)}(x \otimes e_0) &= \sum_{p=1}^n T_p(x) \otimes e_p \wedge e_0 \\ &= Ax \otimes e_1 \oplus 0x \otimes e_2, \quad (x \in \mathcal{H}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\delta_T^{(1)}((x_1 \otimes e_1) \oplus (x_2 \otimes e_2)) = (Ax_2 - 0x_1) \otimes e_1 \wedge e_2, \quad (x_1, x_2 \in \mathcal{H}) \quad (3.25)$$

$$\delta_T^2(x \otimes e_1 \wedge e_2) = 0, \quad (x \in \mathcal{H}) \quad (3.26)$$

Donc

$$\sigma_{Tay}(T) = \bigcup_{k=0}^2 \sigma_{Tay}^{(k)}(T),$$

avec

1.

$$\begin{aligned} z &= (z_1, z_2) \in \sigma_{Tay}^{(0)}(T) \iff \mathfrak{S}m\delta_{T-Z}^{(-1)} \neq \ker \delta_{T-Z}^{(0)} \\ &\iff \exists x \neq 0 : (x \otimes e_0) \in \ker \delta_{T-Z}^{(0)} \\ &\iff \exists x \neq 0 : ((A - z_1)x \otimes e_1) - z_2x \otimes e_2 = 0_{\Lambda_2^{(1)}(\mathcal{H})} \\ &\iff \exists x \neq 0 : (A - z_1)x = z_2x = 0 \\ &\iff z_1 \text{ valeur propre de } A \text{ et } z_2 = 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$\sigma_{Tay}^{(0)}(T) = \sigma_P(A) \times \{0\}, \quad (3.27)$$

où $\sigma_P(A)$ désigne le spectre ponctuel de l'opérateur A .

2.

$$\begin{aligned} z &= (z_1, z_2) \in \sigma_{Tay}^{(1)}(T) \iff \mathfrak{S}m\delta_{T-Z}^{(0)} \neq \ker \delta_{T-Z}^{(1)} \\ &\iff \exists (x_1, x_2) \neq (0, 0) : \begin{cases} (x_1 \otimes e_1) \oplus (x_2 \otimes e_2) \in \ker \delta_{T-Z}^{(1)} \\ (x_1 \otimes e_1) \oplus (x_2 \otimes e_2) \notin \mathfrak{S}m\delta_{T-Z}^{(0)} \end{cases}, \\ &\iff \exists (x_1, x_2) : \begin{cases} (A - z_1)x_2 + z_2x_1 = 0 \\ (x_1, x_2) \neq ((A - z_1)h, -z_2h), \quad \forall h \in \mathcal{H} \end{cases} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} z &= (z_1, z_2) \in \sigma_{Tay}^{(2)}(T) \iff \Im m \delta_{T-Z}^{(1)} \neq \ker \delta_{T-Z}^{(2)} \\ &\iff \exists y \in \mathcal{H}, y \neq 0 : y \neq z_2 x_1 + (A - z_1)x_2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{H}^2. \end{aligned}$$

Posons

$$f_z : \mathcal{H}^2 \longrightarrow \mathcal{H} : f_z(x_1, x_2) = z_2 x_1 + (A - z_1)x_2. \quad (3.28)$$

Alors,

$$z = (z_1, z_2) \in \sigma_{Tay}^{(2)}(T) \iff f_z \text{ non surjective.} \quad (3.29)$$

Le théorème suivant donne une caractérisation du spectre de Taylor en termes de l'opérateur L_T^* .

théorème 3.2 Soit $T = (T_1, \dots, T_n)$ une n -contraction commutative complètement noncoisométrique et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Alors, $\lambda \in \sigma_{Tay}^{(k)}(T)$ si et seulement si il existe une famille de vecteurs $\{x_F\}_{F \in P_K}$ dans \mathcal{H} telle que :

$$1. \forall G \in P_{K+1}, L_T^* \left(\sum_{F \in P_k(G)} (-1)^s (T_r - \lambda_r) (x_F) \right) = 0;$$

2. $\exists F_0 \in P_K$ tel que,

$$x_{F_0} \neq \sum_{R \in P_{k-1}(F_0)} (-1)^{s_0} (T_{r_0} - \lambda_{r_0}) (y_R), \quad \forall (y_R)_{R \in P_{k-1}} \subset \mathcal{H}. \quad (3.30)$$

Preuve. Supposons que $\lambda \in \sigma_{Tay}^{(k)}(T)$. Alors, $\Im m \delta_{T-\lambda}^{(k-1)} \neq \ker \delta_{T-\lambda}^{(k)}$. En utilisant la relation $\Im m \delta_{T-\lambda}^{(k-1)} \subset \ker \delta_{T-\lambda}^{(k)}$ ($\delta_{T-\lambda}^{(k)} = 0$), on obtient que pour certain éléments $\sum_{F \in P_k} x_F \otimes e_F$ de $\Lambda_n^{(k)}(\mathcal{H})$,

$$\sum_{G \in P_{K+1}} \left(\sum_{F \in P_k(G)} (-1)^s (T_r - \lambda_r) (x_F) \right) \otimes e_G = 0, \quad (3.31)$$

avec,

$$\sum_{F \in P_k} x_F \otimes e_F \neq \sum_{F \in P_K} \left(\sum_{R \in P_{k-1}(F)} (-1)^s (T_r - \lambda_r) (y_R) \right) \otimes e_F \quad (3.32)$$

pour tout vecteur $\sum_{R \in P_{k-1}} y_R \otimes e_R \in \Lambda_n^{(k-1)}(\mathcal{H})$.

Désignons par $\{e_F\}_{F \in P_K}$ la base de $\Lambda_n^{(k)}(\mathcal{H})$, $k = 0, 1, \dots, n$, il découle des relations (3.31) et (3.32) que,

$$\forall G \in P_{k+1} : \sum_{F \in P_k(G)} (-1)^s (T_r - \lambda_r) (x_F) = 0, \quad (3.33)$$

$$\exists F_0 \in P_k : x_{F_0} \neq \sum_{R \in P_{k-1}(F_0)} (-1)^{so} (T_{r_0} - \lambda_{r_0}) (y_R). \quad (3.34)$$

Or en vertu de la relation (3.33) on obtient :

$$\forall G \in P_{K+1}, L_T^* \left(\sum_{F \in P_k(G)} (-1)^s (T_r - \lambda_r) (x_F) \right) = 0. \quad (3.35)$$

Supposons, inversement qu'ils existe une famille de vecteurs $\{x_F\}_{F \in P_K}$ dans \mathcal{H} satisfaisant aux conditions du théorème. Comme $\ker(L_T L_T^*) = \{0\}$ (T complètement noncoisométrique), on a :

$$\begin{aligned} \forall G \in P_{K+1}, L_T^* \left(\sum_{F \in P_k(G)} (-1)^s (T_r - \lambda_r) (x_F) \right) &= 0, \\ \Rightarrow \forall G \in P_{K+1}, L_T L_T^* \left(\sum_{F \in P_k(G)} (-1)^s (T_r - \lambda_r) (x_F) \right) &= 0, \\ \Rightarrow \forall G \in P_{K+1}, \sum_{F \in P_k(G)} (-1)^s (T_r - \lambda_r) (x_F) &= 0, \\ \Rightarrow \delta_{T-\lambda}^{(k)} \left(\sum_{F \in P_k} x_F \otimes x_F \right) = 0 &\Rightarrow \sum_{F \in P_k} x_F \otimes x_F \in \ker \delta_{T-\lambda}^{(k)}. \end{aligned}$$

On conclut facilement de la deuxième condition du théorème que $\sum_{F \in P_k} x_F \otimes e_F \notin \mathfrak{Sm} \delta_{T-\lambda}^{(k-1)}$.

■

Corollaire 3.1 Soit $T = (T_1, \dots, T_n)$ une n -contraction commutative complètement noncoisométrique et $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Alors, $\lambda \in \sigma_{T_{ay}}^{(0)}(T)$ si et seulement si, il existe un vecteur non nul $x \in \mathcal{H}$ tel que :

$$T_p(x) = \lambda_p x, \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (3.36)$$

Preuve. Découle du fait que $(P_{-1} = \emptyset)$ et $P_1 = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$.

■

Corollaire 3.2 Soit $T = (T_1, \dots, T_n)$ une n -contraction commutative complètement noncoisométrique et $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Alors, $\lambda \in \sigma_{T_{ay}}^{(n)}(T)$ si et seulement si, l'application

$$\Psi_{T,\lambda} : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}; \quad \Psi_{T,\lambda}(h_1, \dots, h_n) = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} (T_p - \lambda_p) (h_p) \quad (3.37)$$

n'est pas surjective.

Preuve. Notons que $P_n = \{F = \{1, 2, \dots, n\}\}$ et que de plus grace à la relation (3.8), $\delta_A \left(\Lambda_n^{(n)}(\mathcal{H}) \right) = \{0\}$. Selon la deuxième condition du Théorème 3.2, il existe $x_F = x_{12\dots n} \in \mathcal{H} (i_q = q)$ tel que,

$$x_F \neq \sum_{R \in P_{n-1}(\{1, 2, \dots, n\})} (-1)^s (T_r - \lambda_r) (y_R), \quad \forall (y_R)_{R \in P_{n-1}} \subset \mathcal{H}. \quad (3.38)$$

Notons aussi que $s = q - 1$ pour chaque $R \in P_{n-1}$, d'après la formule (3.38) on conclut que

$$x_F \neq \sum_{q=1}^n (-1)^{q-1} (T_q - \lambda_q) (y_q), \quad \forall (y_q)_1^n \subset \mathcal{H}. \quad (3.39)$$

■

Le prochain résultat, donne un critère nécessaire d'appartenance au spectre de Taylor en termes de fonction caractéristique.

Proposition 3.1 *Soit $T = (T_1, \dots, T_n)$ une n -contraction commutative complètement noncoisométrique et $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Si $\lambda \in \sigma_{T_{\text{tay}}}^{(k)}(T)$ $k = 0, 1, \dots, n-1$ alors, l'équation*

$$\Theta_T(\lambda) D_T(X) = 0 \quad (3.40)$$

admet au moins C_n^{k+1} solutions dans \mathcal{H}^n .

Remarque 3.2 *Dans le cas des pures 2-contractions commutatives, vérifiant la condition supplémentaire $\lim_{q \rightarrow +\infty} (T_1 T_1^* + T_2 T_2^*)^q = 0$, ce critère est aussi suffisant[3].*

Preuve. (de la proposition). Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}^n$ est un élément du spectre de Taylor de T . En vertu du Théorème 3.2, il existe une famille de vecteurs $\{x_F\}_{F \in P_K}$ dans \mathcal{H} tel que

$$\forall G \in P_{K+1}, L_T^* \left(\sum_{F \in P_k(G)} (-1)^s (T_r - \lambda_r) (x_F) \right) = 0. \quad (3.41)$$

Pour chaque $G \in P_{K+1}$, posons :

$$X_G = \left(X_G^{(1)}, \dots, X_G^{(n)} \right); \quad X_G^{(p)} = \begin{cases} (-1)^s x_F & (\text{si } r = p) \\ 0 & (\text{si } r \neq p) \end{cases} \quad (3.42)$$

où s, r et $P_k(G)$ sont définis par les relations (3.10) et (3.11). On a alors,

$$\begin{aligned} L_T^* \left(\sum_{F \in P_k(G)} (-1)^s (T_r - \lambda_r) (x_F) \right) (z) &= L_T^* \left(\sum_{p=1}^n (T_p - \lambda_p) \left(X_G^{(p)} \right) \right) (z) \\ &= L_T^* ((T - \lambda) (X_G)) (z) = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

D'autre part selon la relation $TD_T = D_{T^*}T$, on a

$$\begin{aligned}
\Theta_T(\lambda)(D_T(X_G)) &= -TD_T(X_G) + D_{T^*}(I - \lambda T^*)^{-1} \Lambda D_T^2(X_G) \\
&= D_{T^*}[-T + (I - \lambda T^*)^{-1} \Lambda D_T^2](X_G) \\
&= D_{T^*}[-T + (I - \lambda T^*)^{-1}(\Lambda - \Lambda T^* T)](X_G) \\
&= D_{T^*}[-T + (I - \lambda T^*)^{-1}(\Lambda - T + T - \Lambda T^* T)](X_G) \\
&= D_{T^*}[-T + (I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda - T) + T](X_G) \\
&= D_{T^*}[(I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda - T)](X_G) \\
&= L_T^*((\lambda - T)(X_G))(\lambda) = 0
\end{aligned}$$

Pour achever la démonstration il suffit de remarquer que $\text{Card}(P_{k+1}) = C_n^{k+1}$. ■

Exemple 3.3 *Considérons dans \mathcal{H} le 2-uplet,*

$$T = (T_1, T_2) = (a1_H, b1_H), \quad |a|^2 + |b|^2 < 1$$

1. Application du Corollaire 3.1 :

$$\begin{aligned}
\lambda &= (\lambda_1, \lambda_2) \in \sigma_{Tay}^{(0)}(T) \iff \begin{cases} \exists x \in \mathcal{H} : x \neq 0, \\ (a - \lambda_1)x = 0 \\ (b - \lambda_2)x = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists x \in \mathcal{H} : x \neq 0, \\ a.x = \lambda_1.x \\ b.x = \lambda_2.x \end{cases} \iff \begin{cases} \exists x \in \mathcal{H} : x \neq 0, \\ T_1(x) = \lambda_1.x \\ T_2(x) = \lambda_2.x \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Application du Corollaire 3.2 :

$$\begin{aligned}
\lambda &= (\lambda_1, \lambda_2) \in \sigma_{Tay}^{(2)}(T) \iff \begin{cases} \exists y \in \mathcal{H}, y \neq 0 \\ y \neq (-1)^0(a - z_1)h_1 + (-1)^1(b - z_2)h_2, \\ \forall (h_1, h_2) \in \mathcal{H}^2. \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists y \in \mathcal{H}, y \neq 0, \forall (h_1, h_2) \in \mathcal{H}^2 : \\ \Psi_{T,\lambda}(h_1, h_2) \neq y \end{cases} \\
&\iff \Psi_{T,\lambda}(h_1, h_2) = \sum_{p=1}^2 (-1)^{p-1} (T_p - \lambda_p)(h_p) \text{ non surjective.}
\end{aligned}$$

3. Application de la proposition 3.1 :

a.

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \sigma_{Tay}^{(0)}(T) \iff \begin{cases} \exists x \in \mathcal{H} : x \neq 0, \\ a.x = \lambda_1.x \\ b.x = \lambda_2.x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} T \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1.x + \lambda_2.0 \\ T \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \lambda_1.0 + \lambda_2.x \end{cases}$$

Alors, l'équation $\theta_T(\lambda)D_T X = 0$ admet C_2^{0+1} solutions $X_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.

b.

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \sigma_{Tay}^{(1)}(T) \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in \mathcal{H}^2 : \\ (a - \lambda_1)x_1 - (b - \lambda_2)x_2 = 0 \\ (x_1, x_2) \neq ((a - \lambda_1)h, (b - \lambda_2)h), \forall h \in \mathcal{H} \end{array} \right\}$$

$$\iff T \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 (-x_2)$$

Donc l'équation $\theta_T(\lambda)D_T X = 0$ admet C_2^{1+1} solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$.

3.3 Spectre de Taylor et Automorphismes Involutifs

Dans cette section nous étudions le comportement du spectre de Taylor sous l'action des automorphismes involutifs de la boule d'unité ouverte \mathbb{B}^n . De tels automorphismes sont de la forme [24]

$$\Phi_b(z) = z_b = \frac{b - P_b z - s_b Q_b z}{1 - \langle z, b \rangle}, \quad (3.44)$$

où b est un élément non nul et fixé de \mathbb{B}^n , $s_b = \sqrt{1 - |b|^2}$, $Q_b = I - P_b$, P_b est la projection orthogonale de \mathbb{C}^n sur le sous-espace engendré par b défini par

$$P_b(z) = \frac{\langle z, b \rangle}{|b|^2} b. \quad (3.45)$$

Le lien entre les automorphismes de la boule d'unité et les multicontractions a été établi dans [7] et [9] où des propriétés intéressantes ont été mises en évidence dans ce sens. En particulier, si $A = (A_1, \dots, A_n)$ une n -contraction commutative, alors, on peut définir la n -contraction A_b .

$$A_b = \Phi_b(A) = (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} (B - P_b A - s_b Q_b A), \quad (3.46)$$

$$B = (b_1 I_{\mathcal{H}}, \dots, b_n I_{\mathcal{H}}), \quad P_b A = \frac{1}{|b|^2} AB^* B \quad \text{et} \quad Q_b A = A - P_b A. \quad (3.47)$$

Exemple 3.4 *Considérons dans \mathcal{H} le 2-uplet,*

$$A(x, y) = ax + by, \quad |a|^2 + |b|^2 < 1$$

Dans ce cas, et

$$B = (b_1 1_{\mathcal{H}}, b_2 1_{\mathcal{H}}), \quad B^* = \begin{pmatrix} \overline{b_1} 1_{\mathcal{H}} \\ \overline{b_2} 1_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}, \quad B^* B = \begin{bmatrix} |b_1|^2 & \overline{b_1} b_2 \\ \overline{b_2} b_1 & |b_2|^2 \end{bmatrix}.$$

Donc,

1)

$$P_b A = \frac{1}{\sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2}} (a.1_{\mathcal{H}}, b.1_{\mathcal{H}}) \begin{bmatrix} |b_1|^2 & \overline{b_1} b_2 \\ \overline{b_2} b_1 & |b_2|^2 \end{bmatrix},$$

2)

$$\begin{aligned} Q_b A &= A - P_b A = A \left(I_{\mathcal{H}} - \frac{1}{|b|^2} B^* B \right) \\ &= (a.1_{\mathcal{H}}, b.1_{\mathcal{H}}) \left(I_{\mathcal{H}} - \frac{1}{\sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2}} \begin{bmatrix} |b_1|^2 & \overline{b_1} b_2 \\ \overline{b_2} b_1 & |b_2|^2 \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

3)

$$(I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} = (1_{\mathcal{H}} - a\overline{b_1} - b|b_2|)^{-1}.$$

Par conséquent,

$$A_b = (1_{\mathcal{H}} - a\overline{b_1} - b|b_2|)^{-1} \left\{ \begin{array}{l} (b_1 1_{\mathcal{H}}, b_2 1_{\mathcal{H}}) - \frac{1}{\sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2}} (a.1_{\mathcal{H}}, b.1_{\mathcal{H}}) \begin{bmatrix} |b_1|^2 & \overline{b_1} b_2 \\ \overline{b_2} b_1 & |b_2|^2 \end{bmatrix} \\ -\sqrt{1 - |b_1|^2 - |b_2|^2} (a.1_{\mathcal{H}}, b.1_{\mathcal{H}}) \left(I_{\mathcal{H}} - \frac{1}{\sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2}} \begin{bmatrix} |b_1|^2 & \overline{b_1} b_2 \\ \overline{b_2} b_1 & |b_2|^2 \end{bmatrix} \right) \end{array} \right\}$$

Proposition 3.2 *Il existe un opérateur unitaire V défini de $\overline{L_A^*(\mathcal{H})}$ dans $\overline{L_{A_b}^*(\mathcal{H})}$ tel que*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad L_{A_b}^*(x)(\cdot) = \frac{s_b}{1 - \langle \cdot, b \rangle} [(V \circ L_A^*)(x)] \circ \Phi_b(\cdot) \quad (3.48)$$

Preuve. D'après [9] (voir corollaire 2.3 et le théorème 2.6) ,

$$\forall z \in \mathbb{B}^n, \quad (I_{\mathcal{H}} - ZA_b^*)^{-1} = (1 - \langle z, b \rangle)^{-1} (I_{\mathcal{H}} - BA^*) (I_{\mathcal{H}} - z_b A^*)^{-1} \quad (3.49)$$

et il existe un opérateur unitaire U défini de \mathcal{D}_{A^*} dans $\mathcal{D}_{A_b^*}$ satisfait la condition :

$$D_{A_b^*} = s_b U \circ D_{A^*} \circ (I_{\mathcal{H}} - BA^*)^{-1}. \quad (3.50)$$

Considérons maintenant l'opérateur V défini de $\overline{L_A^*(\mathcal{H})}$ dans $\overline{L_{A_b}^*(\mathcal{H})}$ par

$$V(L_A^*(x))(z) = V(D_{A^*} \circ (I_{\mathcal{H}} - ZA^*)^{-1}(x)) = U \circ D_{A^*} \circ (I_{\mathcal{H}} - ZA^*)^{-1}(x) \quad (3.51)$$

Il est clair que l'opérateur V est unitaire. D'ailleurs, on peut facilement vérifier que pour chaque $x \in H$ et $z \in \mathbb{B}^n$,

$$\begin{aligned} L_{A_b}^*(x)(z) &= D_{A_b^*} \circ (I_{\mathcal{H}} - ZA_b^*)^{-1}(x) \\ &= \frac{s_b}{1 - \langle z, b \rangle} U \circ D_{A^*} \circ (I_{\mathcal{H}} - Z_b A^*)^{-1}(x) \\ &= \frac{s_b}{1 - \langle z, b \rangle} V(D_{A^*} \circ (I_{\mathcal{H}} - Z_b A^*)^{-1}(x)) \\ &= \frac{s_b}{1 - \langle z, b \rangle} [V(L_A^*(x))](z_b) \\ &= \frac{s_b}{1 - \langle z, b \rangle} [V \circ L_A^*(x)] \Phi_b(z). \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.3 $\forall x \in \mathcal{H}, \quad L_{A_b}^*(x) = 0 \Leftrightarrow L_A^*(x) = 0.$

Lemme 3.1 *Soit $A = (A_1, \dots, A_n)$ une n -contraction commutative complètement noncoisométrique. Alors,*

1. $\Phi_b(A)$ est également une n -contraction commutative complètement noncoisométrique,
2. Pour tout $z \in B^n$,

$$A_b - Z = (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \left\{ \begin{array}{l} (1 - \langle z, b \rangle)(Z_b - A) + (s_b - 1)Q_b(Z - A) \\ + (AB^*Z - ZB^*A) \end{array} \right\} \quad (3.52)$$

Preuve. 1. D'après [9] (voir lemme 2.1),

$$I_H - \Phi_b(A)(\Phi_b(A))^* = (1 - |b|^2)(I_H - AB^*)^{-1}(I_H - AA^*)(I_H - BA^*)^{-1}, \quad (3.53)$$

ce qui prouve que $\Phi_b(A)$ est également une n -contraction commutative. Reste à démontrer que $\Phi_b(A)$ est complètement noncoisométrique (c.n.c). Soit $x \in \mathcal{H}$. Alors,

$$\begin{aligned}
L_{A_b} L_{A_b}^*(x) &= 0 \iff \langle L_{A_b} L_{A_b}^* x, x \rangle = 0 \\
&\iff \langle L_{A_b}^* x, L_{A_b}^* x \rangle = 0 \iff \|L_{A_b}^* x\| = 0 \iff L_{A_b}^* x = 0 \\
&\iff L_A^*(x) = 0 \quad (\text{corollaire précédent}) \\
&\iff L_A L_A^*(x) = (I_{\mathcal{H}} - A_{\infty})(x) = 0. \\
&\Rightarrow x = 0 \quad (A \text{ est cnc}) \\
&\Rightarrow \ker L_{A_b} L_{A_b}^* = \ker (I_{\mathcal{H}} - (A_b)_{\infty}) = \{0\} \\
&\Rightarrow A_b \text{ est complètement non coisométrique.}
\end{aligned}$$

2. D'après le résultat de [7]. On peut voir que pour tout $z \in \mathbb{B}^n$,

$$\begin{aligned}
A_b - Z &= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} (B - P_b A - s_b Q_b A) - Z \\
&= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \{B - P_b A - s_b Q_b A - Z + AB^* Z\} \\
&= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \{B - P_b A - s_b Q_b A - P_b Z - Q_b Z + AB^* Z\} \\
&= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \{B - P_b Z - s_b Q_b Z + (s_b - 1) Q_b Z - A + (1 - s_b) Q_b A + AB^* Z\} \\
&= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \{(1 - \langle z, b \rangle) Z_b - A + (s_b - 1) Q_b (Z - A) + AB^* Z\} \\
&= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \{(1 - \langle z, b \rangle) (Z_b - A) - \langle z, b \rangle A + (s_b - 1) Q_b (Z - A) + AB^* Z\} \\
&= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \{(1 - \langle z, b \rangle) (Z_b - A) + (s_b - 1) Q_b (Z - A) + (AB^* Z - ZB^* A)\}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 3.3 Si $n = 1$, alors $A_b - Z = (1 - z\bar{b}) (I_{\mathcal{H}} - \bar{b}A)^{-1} \left(\frac{b-z}{1-z\bar{b}} I_{\mathcal{H}} - A \right)$. En effet, on a dans ce cas,

$$P_b z = z, \quad B^*(x) = \bar{b}x \quad (x \in \mathcal{H}), \quad AB^*Z - ZB^*A = 0. \quad (3.54)$$

Remarque 3.4 En utilisant la relation (3.46), on a :

$$(A_b)_k = (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \left\{ (b_k - A_k) - (s_b - 1) A_k + \frac{s_b - 1}{|b|^2} \left(\sum_{p=1}^n A_p \bar{b}_p \right) b_k I_{\mathcal{H}} \right\}. \quad (3.55)$$

En effet,

$$A_b = \Phi_b(A) = (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} (B - P_b A - s_b Q_b A),$$

où,

$$B = (b_1 I_{\mathcal{H}}, \dots, b_n I_{\mathcal{H}}), \quad P_b A = \frac{1}{|b|^2} AB^* B \text{ et } Q_b A = A - P_b A.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} A_b &= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \left(B - \frac{1}{|b|^2} AB^* B - s_b (A - P_b A) \right) \\ &= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \left(B - \frac{1}{|b|^2} AB^* B - s_b A + A - A + s_b P_b A \right) \\ &= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \left(B - \frac{1}{|b|^2} AB^* B - s_b A + A - A + s_b \frac{1}{|b|^2} AB^* B \right) \\ &= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \left((B - A) - \frac{1}{|b|^2} AB^* B - (s_b - 1) A + s_b \frac{1}{|b|^2} AB^* B \right) \\ &= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \left((B - A) - (s_b - 1) A + \frac{(s_b - 1)}{|b|^2} AB^* B \right) \\ \implies (A_b)_k &= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \left[(b_k - A_k) - (s_b - 1) A_k + \frac{s_b - 1}{|b|^2} \left(\sum_{p=1}^n A_p \bar{b}_p \right) b_k I_{\mathcal{H}} \right]. \end{aligned}$$

Corollaire 3.4 Soit $A = (A_1, \dots, A_n)$ une n -contraction commutative complètement noncoisométrique et $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Alors, $\lambda \in \sigma_{\text{Tag}}^{(0)}(A_b)$ si et seulement si, il existe dans \mathcal{H} un vecteur non nul x tel que :

$$s_b A_k(x) = (b_k - \lambda_k) x + \left(\frac{s_b - 1}{|b|^2} b_k + \lambda_k \right) \sum_{p=1}^n \bar{b}_p A_p(x), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.56)$$

Preuve. Le résultat est une application directe du corollaire (3.1) à l'opérateur A_b . En effet, $\lambda \in \sigma_{\text{Tag}}^{(0)}(A_b)$ si et seulement si, il existe dans \mathcal{H} un vecteur non nul x tel que :

$$(A_b)_k(x) = \lambda_k x, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(A_b)_k &= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \left\{ (b_k - A_k) - (s_b - 1) A_k + \frac{s_b - 1}{|b|^2} \left(\sum_{p=1}^n A_p \bar{b}_p \right) b_k I_{\mathcal{H}} \right\} \\
\implies (A_b)_k(x) &= (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \left\{ (b_k - A_k) - (s_b - 1) A_k + \frac{s_b - 1}{|b|^2} \left(\sum_{p=1}^n A_p \bar{b}_p \right) b_k I_{\mathcal{H}} \right\} (x) \\
\implies (I_{\mathcal{H}} - AB^*)^{-1} \left\{ (b_k - A_k) - (s_b - 1) A_k + \frac{s_b - 1}{|b|^2} \left(\sum_{p=1}^n A_p \bar{b}_p \right) b_k I_{\mathcal{H}} \right\} (x) &= \lambda_k \cdot x \\
\implies \left\{ (b_k - A_k) - (s_b - 1) A_k + \frac{s_b - 1}{|b|^2} \left(\sum_{p=1}^n A_p \bar{b}_p \right) b_k I_{\mathcal{H}} \right\} (x) &= (I_{\mathcal{H}} - AB^*) (\lambda_k \cdot x) \\
\implies s_b A_k(x) + b_k \cdot x + \frac{s_b - 1}{|b|^2} \left(\sum_{p=1}^n A_p \bar{b}_p \right) (b_k \cdot x) &= \lambda_k x - \sum_{p=1}^n A_p \bar{b}_p (\lambda_k \cdot x) \\
\implies s_b A_k x &= (b_k - \lambda_k) \cdot x + \frac{s_b - 1}{|b|^2} \left(\sum_{p=1}^n A_p \bar{b}_p \right) b_k I_{\mathcal{H}} x + \sum_{p=1}^n A_p \bar{b}_p (\lambda_k x) \\
\implies s_b A_k x &= (b_k - \lambda_k) \cdot x + \left(\frac{(s_b - 1)}{|b|^2} b_k + \lambda_k \right) \sum_{p=1}^n \bar{b}_p A_p(x), \quad k = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.5 Soit $A = (A_1, \dots, A_n)$ une n -contraction commutative complètement noncoisométrique et $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Alors, $\lambda \in \sigma_{Tay}^{(n)}(A_b)$ si et seulement si, l'application

$$\Phi_{A,\lambda} : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}; \quad \Phi_{A,\lambda}(h_1, \dots, h_n) = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} (I_{\mathcal{H}} - AB^*) \left((A_b)_p - \lambda_p \right) (h_p) \quad (3.57)$$

n'est pas surjective.

Preuve. Notons que $(I_{\mathcal{H}} - AB^*) \left((A_b)_p - \lambda_p \right)$ est complètement défini par la formule (3.52). Par ailleurs, $\lambda \in \sigma_{Tay}^{(n)}(A_b)$ si et seulement si, l'application

$$\Psi_{A_b,\lambda} : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}; \quad \Psi_{A_b,\lambda}(h_1, \dots, h_n) = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \left((A_b)_p - \lambda_p \right) (h_p) \quad (3.58)$$

n'est pas surjective. Or la non surjectivité de $\Psi_{A_b,\lambda}$ est clairement équivalente à la non surjectivité de $\Phi_{A,\lambda} = (I_{\mathcal{H}} - AB^*) \Psi_{A_b,\lambda}$. ■

Proposition 3.3 Soit $A = (A_1, \dots, A_n)$ une n -contraction commutative complètement noncoisométrique et $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Si $\lambda \in \sigma_{Tay}^{(k)}(A)$ $k = 0, 1, \dots, n-1$ alors, l'équation

$$\Theta_A(\lambda_b) D_A(X) = 0 \quad (3.59)$$

admet au moins C_n^{k+1} solutions de la forme $X = (I_{\mathcal{H}} - B^*A)^{-1} D_B(Y)$, $Y \in \mathcal{H}^n$.

Preuve. Selon [7, 9], il existe un opérateur unitaire U de \mathcal{D}_{A^*} dans $\mathcal{D}_{A_b^*}$ et un opérateur unitaire V de \mathcal{D}_A sur \mathcal{D}_{A_b} tel que :

$$D_{A_b^*} = c_1 U D_{A^*} (I_{\mathcal{H}} - B^* A)^{-1} D_{B^*}, \quad (3.60)$$

$$D_{A_b} = c_2 V D_A (I_{\mathcal{H}} - B^* A)^{-1} D_B, \quad (3.61)$$

$$\Theta_{A_b}(\lambda) = U \Theta_A(\lambda_b) V^*, \quad (3.62)$$

avec c_1 et c_2 sont deux constantes strictement positives dans [7], ($c_1 = c_2 = 1$). Or, si $\lambda \in \sigma_{\text{Ray}}^{(k)}(A_b)$ alors, l'équation

$\Theta_{A_b}(\lambda) D_{A_b}(Y) = 0$ admet au moins C_n^{k+1} solutions dans \mathcal{H}^n . En remplaçant $\Theta_{A_b}(\lambda)$, D_{A_b} par leurs expressions correspondantes, on obtient :

$$[\Theta_{A_b}(\lambda) D_{A_b}(Y) = 0] \Leftrightarrow U \Theta_A(\lambda_b) V^* (c_2 V D_A (I_{\mathcal{H}} - B^* A)^{-1} D_B(Y)) = 0$$

$$\Leftrightarrow c_2 \Theta_A(\lambda_b) D_A (I_{\mathcal{H}} - B^* A)^{-1} D_B(Y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Theta_A(\lambda_b) D_A(X) = 0, \quad X = (I_{\mathcal{H}} - B^* A)^{-1} D_B(Y).$$

■

Chapitre 4

N-UPLET DISSIPATIFS ET FONCTIONS CARACTERISTIQUES ASSOCIEES

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on généralise les résultats obtenus par B. Sz. Nagy et C. Foias. Nous définissons le n-uplet dissipatif $A = (A_1, \dots, A_n)$ et sa transformée de Cayley $C(A) = (T_p)_{p=1}^n$,

$$T_p = \frac{1}{\sqrt{n}} [(A_p + iI_{\mathcal{H}}) - 2i] (A_p + iI_{\mathcal{H}})^{-1}, 1 \leq p \leq n.$$

on va aussi introduire la notion de la fonction caractéristique associée au n-uplet dissipatif A .

Commençons cette section par donner de nouvelles formulations aux théorèmes (2.1) et (2.2). Ces nouvelles formulations sont plus adaptées à ce qui suit.

Soit

$$\mathbb{B}_p^n = \left\{ w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w|^2 = |w_1|^2 + \dots + |w_n|^2 < \frac{1}{p} \right\}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Il est clair que \mathbb{B}_p^n est un disque ouvert $\mathbb{B}^n = \mathbb{B}_1^n \supseteq \mathbb{B}_2^n \supseteq \dots \supseteq \mathbb{B}_k^n \supseteq \dots$. D'après le principe du prolongement analytique [24], le théorème(2.1) peut être énoncée comme suit :

théorème 4.1 *Deux n -contractions commutatives pures sont unitairement équivalentes si et seulement si, leurs fonctions caractéristiques coïncident dans un certain \mathbb{B}_p^n .*

Considérons maintenant l'espace $H_{n,p}^2(\mathbb{C})$ des fonctions analytiques définies dans \mathbb{B}_p^n :

$$\mathbb{H}_{n,p}^2(\mathbb{C}) = \left\{ f(w) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k w^k, a_k \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{B}_p^n, \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{|a_k|^2}{\gamma_k} < \infty \right\} \quad (4.2)$$

Chaque élément de $\mathbb{H}_{n,p}^2(\mathbb{C})$ est la restriction à \mathbb{B}_p^n d'un et seulement un élément de $\mathbb{H}_{n,1}^2(\mathbb{C}) = \mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})$. En effet, l'application $\Phi_p : \mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}_{n,p}^2(\mathbb{C})$ définie :

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k, z \in \mathbb{B}^n \longrightarrow g(w) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k w^k, w \in \mathbb{B}_p^n \quad (4.3)$$

est linéaire et injective. D'autre part, l'espace $\Phi_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \subseteq \mathbb{H}_{n,p}^2(\mathbb{C})$ peut être muni d'une structure d'un espace de Hilbert en posant :

$$\begin{aligned} \|g\|_p^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{\gamma_k} = \|f\|_1^2, g = \Phi_p(f), \\ f(z) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k \in \mathbb{H}_{n,1}^2(\mathbb{C}) = \mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}), z \in \mathbb{B}_1^n \end{aligned} \quad (4.4)$$

Selon cette norme, l'application Φ_p induit un opérateur unitaire $\widehat{\Phi}_p$ de $\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})$ dans $\Phi_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}))$ avec $\widehat{\Phi}_1 = I_{\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})}$.

Lemme 4.1 *On a,*

$$\Phi_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*} = (\Phi_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \left(\widehat{\mathbb{H}} \right) \oplus M_{\theta_T^{(p)}}(\Phi_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_T), \quad (4.5)$$

où,

$$M_{\theta_T^{(p)}} : \Phi_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_T \longrightarrow \Phi_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*}, \left(M_{\theta_T^{(p)}}(f \otimes x) \right)(z) = f(z) \otimes \theta_T(z)x. \quad (4.6)$$

Preuve. Notons que l'opérateur $\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}$ est unitaire de $\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_{T^*}$ dans $\Phi_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*}$ et l'opérateur $\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}$ est son adjoint. De plus,

$$M_{\theta_T^{(p)}} \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_T} \right) = \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) M_{\theta_T} \text{ et } M_{\theta_T^{(1)}} = M_{\theta_T}. \quad (4.7)$$

Par conséquent, d'après la relation

$$(H_n^2 \otimes \mathcal{D}_T) = \widehat{\mathbb{H}} \oplus M_{\theta_T}(H_n^2 \otimes \mathcal{D}_{T^*}),$$

on a,

$$\begin{aligned} \Phi_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*} &= \widehat{\Phi}_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*} = \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) (\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_{T^*}) \quad (4.8) \\ &= \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \left(\widehat{\mathbb{H}} \oplus M_{\theta_T}(H_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_T) \right) \\ &= \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \left(\widehat{\mathbb{H}} \right) \oplus \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) M_{\theta_T}(H_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_T) \\ &= \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \left(\widehat{\mathbb{H}} \right) \oplus M_{\theta_T}^{(p)} \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) (H_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_T) \\ &= \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \left(\widehat{\mathbb{H}} \right) \oplus M_{\theta_T}^{(p)} (\Phi_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_T) \end{aligned}$$

■

Remarque 4.1 *On a les identifications suivantes*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}) \simeq \Phi_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})), p = 1, 2, \dots \\ \mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_T \simeq \Phi_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_T, p = 1, 2, \dots \\ \mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_{T^*} \simeq \Phi_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*}, p = 1, 2, \dots \\ M_{\theta_T}(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_T) \simeq M_{\theta_T}^{(p)}(\Phi_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_T), p = 1, 2, \dots \\ \widehat{\mathbb{H}} \simeq \widehat{\mathbb{X}}_P, \text{ avec } \widehat{\mathbb{X}}_P = \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \left(\widehat{\mathbb{H}} \right), p = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Corollaire 4.1 *Soit $P_{\widehat{\mathbb{X}}_P}$ l'orthoprojecteur de $\Phi_P(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*}$ sur $\widehat{\mathbb{X}}_P$. Alors,*

$$P_{\widehat{\mathbb{H}}} \left(\widehat{\Phi}_P^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) = \left(\widehat{\Phi}_P^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) P_{\widehat{\mathbb{X}}_P}. \quad (4.10)$$

Preuve. Pour démontrer la relation (4.10) il suffit de voir que pour chaque opérateur linéaire est inversible $A : \mathcal{H} \longrightarrow A(\mathcal{H})$, vérifiant la condition $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, on a :

$$P_{A(\mathcal{H}_1)} = AP_{\mathcal{H}_1}A^{-1}. \quad (4.11)$$

Posons $A = \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right)$ et $\mathcal{H}_1 = \widehat{\mathbb{H}}$. Alors,

$$P_{\widehat{\mathbb{X}}_P} = P_{(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}})(\widehat{\mathbb{H}})} = \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) P_{\widehat{\mathbb{H}}} \left(\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right). \quad (4.12)$$

Par conséquent,

$$P_{\widehat{\mathbb{H}}} \left(\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) = \left(\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) P_{\widehat{\mathbb{X}}_P}.$$

■

Soit maintenant $S_{k,p}$ l'opérateur de multiplication par la variable indépendante w_k (schift) dans l'espace $\widehat{\Phi}_p(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}))$. Il est facile de voir que

$$S_{k,p}\widehat{\Phi}_p = \widehat{\Phi}_p S_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad \text{avec } S_k = M_{z_k} \quad (4.13)$$

En effet, Soit $f(z) \in \mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_p S_k \widehat{\Phi}_p^* (\widehat{\Phi}_p f(z)) &= \widehat{\Phi}_p S_k (f(z)) = \widehat{\Phi}_p (z_k f(z)) \\ &= w_k \widehat{\Phi}_p (f(z)) = S_{k,p} \left(\widehat{\Phi}_p f(z) \right). \end{aligned}$$

Maintenant, le théorème (2.2) peut être reformulé comme suit :

théorème 4.2 Soit $T = (T_1, \dots, T_n)$ une n -contraction pure et commutative dans l'espace \mathcal{H} . Alors T est unitairement équivalent à la n -contraction $\widehat{\Pi} = (\widehat{\Pi}_1, \dots, \widehat{\Pi}_n)$.

L'opérateur $\widehat{\Pi}_{k,p}$ est défini dans l'espace $\widehat{\mathbb{X}}_p$ par la formule :

$$\widehat{\Pi}_{k,p} = P_{\widehat{\mathbb{X}}_p} (S_{k,p} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \Big|_{\widehat{\mathbb{X}}_p}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Preuve. Il suffit de montrer qu'il existe un opérateur unitaire U de $\widehat{\mathbb{H}}$ dans $\widehat{\mathbb{X}}_p$ tel que $\Pi_k = U^{-1} \widehat{\Pi}_{k,p} U$, $k = 1, 2, \dots, n$. Pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} P_{\widehat{\mathbb{H}}} (S_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) &= P_{\widehat{\mathbb{H}}} (\widehat{\Phi}_p^* S_{k,p} \widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \\ &= P_{\widehat{\mathbb{H}}} (\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) (S_{k,p} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\ &= \left(\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) P_{\widehat{\mathbb{X}}_p} (S_{k,p} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Pi_k &= P_{\widehat{\mathbb{H}}} (S_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \Big|_{\widehat{\mathbb{H}}} = \left(\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) P_{\widehat{\mathbb{X}}_p} (S_{k,p} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \left(\left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \Big|_{\widehat{\mathbb{H}}} \right) \\ &= \left(\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) P_{\widehat{\mathbb{X}}_p} \left((S_{k,p} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \Big|_{\widehat{\mathbb{X}}_p} \right) \left(\left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \Big|_{\widehat{\mathbb{H}}} \right) \\ &= \left(\left(\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \Big|_{\widehat{\mathbb{X}}_p} \right) \widehat{\Pi}_{k,p} \left(\left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \Big|_{\widehat{\mathbb{H}}} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Soit $U_p = \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \Big|_{\widehat{\mathbb{H}}}$. Pour achever la preuve, notons que l'opérateur U_p est unitaire de $\widehat{\mathbb{H}}$ dans $\widehat{\mathbb{X}}_p$ et son adjoint est l'opérateur $U_p^* = \left(\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \Big|_{\widehat{\mathbb{X}}_p}$. ■

Comme annoncé précédemment, il existe un opérateur $L_T : H_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_{T^*} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que

$$T_k L_T = L_T (S_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.16)$$

$$I_{\mathcal{H}} - L_T^* L_T = T_\infty \quad (4.17)$$

$$L_T^* L_T + M_{\Theta_T} M_{\Theta_T}^* = I_{H_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_{T^*}} \quad (4.18)$$

Considérons maintenant l'opérateur

$$J_p = L_T \left(\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) : \Phi_p (H_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*} \longrightarrow \mathcal{H}. \quad (4.19)$$

Proposition 4.1 *Si $T = (T_1, \dots, T_n)$ est une n -contraction commutative dans l'espace \mathcal{H} . Alors,*

$$T_k J_p = J_p (S_{k,p} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.20)$$

$$I_{\mathcal{H}} - J_p J_p^* = T_\infty \quad (4.21)$$

$$J_p^* J_p + M_{\Theta_T}^{(p)} \left(M_{\Theta_T}^{(p)} \right)^* = I_{\Phi_p(H_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*}} \quad (4.22)$$

Preuve. D'après les relations (4.19) , (4.16) et (4.13), on a

1.

$$\begin{aligned} T_k J_p &= T_k L_T \left(\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) = L_T (S_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \left(\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \quad (4.23) \\ &= L_T \left(S_k \widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) = L_T \left(\widehat{\Phi}_p^* S_{k,p} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\ &= \left(L_T \left(\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \right) (S_{k,p} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \\ &= J_p (S_{k,p} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \end{aligned}$$

2. En utilisant les relations (4.19) et (4.17) on obtient,

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{H}} - J_p J_p^* &= I_{\mathcal{H}} - L_T \left(\widehat{\Phi}_p^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \left(\widehat{\Phi}_p \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) L_T^* \quad (4.24) \\ &= I_{\mathcal{H}} - L_T^* L_T = T_\infty \end{aligned}$$

3. On a,

$$\begin{aligned}
J_p^* J_p + M_{\Theta_T}^{(p)} \left(M_{\Theta_T}^{(p)} \right)^* &= \left(\widehat{\Phi}_P \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) L_T^* L_T \left(\widehat{\Phi}_P^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\
&\quad + M_{\Theta_T}^{(p)} \left(\widehat{\Phi}_P \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \left(\widehat{\Phi}_P^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \left(M_{\Theta_T}^{(p)} \right)^* \\
&= \left(\widehat{\Phi}_P \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) L_T^* L_T \left(\widehat{\Phi}_P^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\
&\quad + \left(\widehat{\Phi}_P \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) M_{\Theta_T} M_{\Theta_T}^* \left(\widehat{\Phi}_P^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\
&= \left(\widehat{\Phi}_P \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \left(L_T^* L_T + M_{\Theta_T} M_{\Theta_T}^* \right) \left(\widehat{\Phi}_P^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\
&= \left(\widehat{\Phi}_P \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) I_{H_n^2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{D}_{T^*}} \left(\widehat{\Phi}_P^* \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\
&= I_{\Phi_P(H_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*}}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

■

Corollaire 4.2 *La n -contraction commutative $T = (T_1, \dots, T_n)$ dans l'espace \mathcal{H} est pure si et seulement si, J_p est coisométrique (i.e J_p^* est isométrique).*

Preuve. On a,

$$T \text{ pure} \Leftrightarrow T_\infty = 0 \tag{4.26}$$

$$\Leftrightarrow I_{\mathcal{H}} - J_p J_p^* = 0 \Leftrightarrow J_p J_p^* = I_{\mathcal{H}}.$$

■

4.2 N -Uplet Dissipatif et transformée de Cayley

définition 4.1 *Un opérateur linéaire B défini sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} est dit que :*

1. B est positif si,

$$\langle Bx, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H} \tag{4.27}$$

2. B est dissipatif si,

$$\left\langle \frac{B - B^*}{2i} x, x \right\rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{4.28}$$

Exemple 4.1 *Comme exemples d'opérateurs dissipatifs, on peut citer les opérateurs A_1 et A_2 , définis dans l'espace $L_{[0,1]}^2$ par les formules :*

$$(A_1 f)(x) = i \int_x^1 f(t) dt, \quad A_2 f = i f. \tag{4.29}$$

En effet,

$$A_2^* f = -if \Rightarrow \prec \frac{A_2 - A_2^*}{2i} f, f \succ = \langle f, f \rangle \geq 0.$$

Par ailleurs, un calcul direct permet d'établir que,

$$A_1^* f(x) = -i \int_0^x f(t) dt.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \prec \frac{A_1 - A_1^*}{2i} f, f \succ = \prec \frac{1}{2} \left(\int_x^1 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \right), f \succ \\ & = \frac{1}{2} \prec \int_0^1 f(t) dt, f \succ = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt \prec I_{L^2_{[0,1]}} f \succ \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt \int_0^1 \overline{f(t)} dt = \frac{1}{2} \left| \int_0^1 f(t) dt \right|^2 \succeq 0. \end{aligned}$$

définition 4.2 Soit $A = (A_1, \dots, A_n)$ un n -uplet défini dans \mathcal{H} . A est dit dissipatif si, A_p est dissipatif pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, n\}$.

définition 4.3 Soit $A = (A_1, \dots, A_n)$ un n -uplet dissipatif défini dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} . La transformée de Cayley de A est le n -uplet $T = C(A) = (T_1, \dots, T_n)$, avec :

$$T_k = \frac{1}{\sqrt{n}} (A_k - iI_{\mathcal{H}}) (A_k + iI_{\mathcal{H}})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} (I_{\mathcal{H}} - 2i (A_k + iI_{\mathcal{H}})^{-1}) \quad (4.30)$$

Il est clair que dans le cas $n = 1$, on retrouve la transformée de Cayley d'un opérateur dissipatif définie dans [19].

Exemple 4.2 Trouver $T = C(A) = (T_1, T_2)$ où $A = (A_1, A_2)$ et A_1, A_2 sont donnés dans l'exemple précédent.

La transformée de Cayley de A est le 2-uplet $T = C(A) = (T_1, T_2)$:

$$T_k = \frac{1}{\sqrt{n}} (A_k - iI_{\mathcal{H}}) (A_k + iI_{\mathcal{H}})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} (I_{\mathcal{H}} - 2i (A_k + iI_{\mathcal{H}})^{-1}), \quad i \in \{1, 2\}.$$

On a donc,

$$A_2 = iI_{\mathcal{H}} \Rightarrow T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_2 - iI_{\mathcal{H}}) (A_2 + iI_{\mathcal{H}})^{-1}.$$

Par ailleurs, si f et g sont deux éléments de $L^2_{[0,1]}$. Alors,

$$(A_1 + iI_{\mathcal{H}})^{-1} f = g \iff f = (A_1 + iI_{\mathcal{H}}) g$$

$$f(x) = i \int_x^1 g(t) dt + ig(x), \quad (x \in [0, 1]).$$

Posons

$$G(x) = \int_x^1 g(t) dt$$

On obtient ainsi une équation différentielle du premier ordre :

$$\begin{cases} G'(x) - G(x) = if(x) \\ G(1) = 0 \end{cases}.$$

La solution de cette équation est la fonction :

$$G(x) = ie^x \int_x^1 f(t) e^{-t} dt.$$

Soit finalement :

$$g(x) = -G'(x) = -if(x) - ie^x \int_x^1 f(t) e^{-t} dt.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} T_1 f(x) &= (I_{\mathcal{H}} - 2i(A_1 + iI_{\mathcal{H}})^{-1}) f(x) \\ &= f(x) - 2i \left[-if(x) - ie^x \int_x^1 e^{-t} f(t) dt \right] \\ &= -f(x) - 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt. \end{aligned}$$

Remarque 4.2 Si A est un n -uplet commutatif alors , sa transformée de Cayley $C(A)$ est aussi commutative.

Proposition 4.2 Soit $A = (A_1, \dots, A_n)$ un n -uplet dissipatif commutatif défini dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} . Alors $T = C(A)$ est un n -uplet commutatif contractif.

Preuve. On doit prouver seulement que le n -uplet $T = C(A)$ est contractif. Soit $B = I_{\mathcal{H}} - \sum_1^n T_k T_k^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
B &= I_{\mathcal{H}} - \sum_1^n \frac{1}{n} (A_k - iI_{\mathcal{H}})(A_k + iI_{\mathcal{H}})^{-1} (A_k^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1} (A_k^* + iI_{\mathcal{H}}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_1^n [I_{\mathcal{H}} - (A_k - iI_{\mathcal{H}})(A_k + iI_{\mathcal{H}})^{-1} (A_k^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1} (A_k^* + iI_{\mathcal{H}})] \\
&= \frac{1}{n} \sum_1^n (A_k + iI_{\mathcal{H}})^{-1} [(A_k + iI_{\mathcal{H}})(A_k^* - iI_{\mathcal{H}}) - (A_k - iI_{\mathcal{H}})(A_k^* + iI_{\mathcal{H}})] (A_k^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1} \\
&= \frac{1}{n} \sum_1^n (A_k + iI_{\mathcal{H}})^{-1} [A_k A_k^* - iA_k + iA_k^* + iA_k^* - iA_k - A_k A_k^*] (A_k^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1} \\
&= \frac{1}{n} \sum_1^n (A_k + iI_{\mathcal{H}})^{-1} [2i(A_k^* - A_k)] (A_k^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1}. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Soit

$$Q_k = \frac{A_k - A_k^*}{2i}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Puisque tous les A_k sont dissipatifs, on obtient finalement,

$$I_{\mathcal{H}} - \sum_1^n T_k T_k^* = \frac{4}{n} \sum_1^n (A_k + iI_{\mathcal{H}})^{-1} Q_k (A_k^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1} \geq 0.$$

■

Proposition 4.3 *Si $A = (A_1, \dots, A_n)$ est un n -uplet dissipatif et $T = (T_1, \dots, T_n)$ est sa transformée de Cayley alors,*

$$A_p = i(I_{\mathcal{H}} + \sqrt{n}T_p)(I_{\mathcal{H}} - \sqrt{n}T_p)^{-1}, \quad p = 1, 2, \dots, n \tag{4.32}$$

Preuve. Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}
T_p &= \frac{1}{\sqrt{n}} [(A_p + iI_{\mathcal{H}}) - 2i] (A_p + iI_{\mathcal{H}})^{-1} \\
&\Rightarrow \sqrt{n}T_p = [(A_p + iI_{\mathcal{H}}) - 2i] (A_p + iI_{\mathcal{H}})^{-1} = I_{\mathcal{H}} - 2i(A_p + iI_{\mathcal{H}})^{-1} \\
&\implies (A_p + iI_{\mathcal{H}}) = 2i(I_{\mathcal{H}} - \sqrt{n}T_p)^{-1} \\
&\implies A_p = -iI_{\mathcal{H}} + 2i(I_{\mathcal{H}} - \sqrt{n}T_p)^{-1} = i(I_{\mathcal{H}} + \sqrt{n}T_p)(I_{\mathcal{H}} - \sqrt{n}T_p)^{-1}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 4.3 *Notons que si $T = (T_1, \dots, T_n)$ est la transformée de Cayley du n -uplet dissipatif $A = (A_1, \dots, A_n)$ alors,*

$$\|T_p\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall p = 1, \dots, n. \tag{4.33}$$

Ceci découle immédiatement de la relation

$$\frac{A_p - A_p^*}{2i} = (I_{\mathcal{H}} - \sqrt{n}T_p^*)^{-1} (I_{\mathcal{H}} - nT_p^*T_p) (I_{\mathcal{H}} - \sqrt{n}T_p)^{-1} \geq 0.$$

Proposition 4.4 Soit $A = (A_1, \dots, A_n)$ et $A' = (A'_1, \dots, A'_n)$ sont deux n -uplets dissipatifs, $T = (T_1, \dots, T_n)$ et $T' = (T'_1, \dots, T'_n)$ respectivement leur transformées Cayleys. Alors

T est unitairement équivalent à $T' \Leftrightarrow A$ est unitairement équivalent à A' .

Preuve. Supposons que $T = (T_1, \dots, T_n)$ est unitairement équivalent à $T' = (T'_1, \dots, T'_n)$. Il existe alors un opérateur unitaire U défini de \mathcal{H} dans \mathcal{H}' tels que :

$$T_p = U^{-1}T'_pU, \quad p = 1, \dots, n.$$

Par conséquent, pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} A_p &= i (I_{\mathcal{H}} + \sqrt{n}T_p) (I_{\mathcal{H}} - \sqrt{n}T_p)^{-1} \\ &= i (U^{-1}U + \sqrt{n}U^{-1}T'_pU) (U^{-1}U - \sqrt{n}U^{-1}T'_pU)^{-1} \\ &= iU^{-1} (I_{\mathcal{H}'} + \sqrt{n}T'_p) (I_{\mathcal{H}'} - \sqrt{n}T'_p)^{-1} U = U^{-1}A'_pU. \end{aligned}$$

L'inverse peut être obtenu de la même manière. ■

définition 4.4 On dira qu'un n -uplet dissipatif commutatif est pure si sa transformée de Cayley est pure.

Pour $1 \leq k \leq n$, considérons dans l'espace $\mathbb{H}_{n,n}^2(\mathbb{C})$ l'opérateur de multiplication \widehat{M}_k avec la variable indépendante $w_k = i \frac{1+z_k\sqrt{n}}{1-z_k\sqrt{n}}$, ($z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{B}_n^n$). On a,

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{B}_n^n \Rightarrow \begin{cases} |z_k| < \frac{1}{\sqrt{n}} & 1 \leq k \leq n \\ \operatorname{Im} \left(i \frac{1+z_k\sqrt{n}}{1-z_k\sqrt{n}} \right) > 0 & 1 \leq k \leq n \end{cases} \quad (4.34)$$

Par conséquent, le n -uplet $\widehat{M} = (\widehat{M}_1, \dots, \widehat{M}_n)$ est dissipatif, sa transformée de Cayley est la n -contraction $\widehat{S} = (\widehat{S}_1, \dots, \widehat{S}_n)$, $\widehat{S}_k = S_{k,n}$ ($1 \leq k \leq n$).

Proposition 4.5 Soit $A = (A_1, \dots, A_n)$ un n -uplet dissipatif commutatif alors,

$$A_k J_n = J_n \left(\widehat{M}_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.35)$$

Preuve. Soit $T = (T_1, \dots, T_n) = C(A)$. Alors, pour $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned}
T_k J_n &= J_n \left(\widehat{S}_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\
&\Rightarrow (I_{\mathcal{H}} - \sqrt{n} T_k) J_n = J_n \left(\left(I_{\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}))} - \sqrt{n} \widehat{S}_k \right) \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\
&\Rightarrow (I_{\mathcal{H}} - \sqrt{n} T_k)^{-1} J_n = J_n \left(\left(I_{\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}))} - \sqrt{n} \widehat{S}_k \right) \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right)^{-1} \\
&= J_n \left(\left(I_{\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}))} - \sqrt{n} \widehat{S}_k \right)^{-1} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\
&\Rightarrow (I_{\mathcal{H}} + \sqrt{n} T_k) (I_{\mathcal{H}} - \sqrt{n} T_k)^{-1} J_n \\
&= (I_{\mathcal{H}} + \sqrt{n} T_k) J_n \left(\left(I_{\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}))} - \sqrt{n} \widehat{S}_k \right)^{-1} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\
&= J_n \left(\left(I_{\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}))} + \sqrt{n} \widehat{S}_k \right) \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \left(\left(I_{\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}))} - \sqrt{n} \widehat{S}_k \right)^{-1} \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\
&= J_n \left(\left(\left(I_{\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}))} + \sqrt{n} \widehat{S}_k \right) \left(I_{\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}))} - \sqrt{n} \widehat{S}_k \right)^{-1} \right) \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\
&\Rightarrow A_k J_n = J_n \left(\left(\left(I_{\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}))} + \sqrt{n} \widehat{S}_k \right) \left(I_{\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C}))} - \sqrt{n} \widehat{S}_k \right)^{-1} \right) \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \\
&\Rightarrow A_k J_n = J \left(\widehat{M}_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right).
\end{aligned}$$

■

théorème 4.3 Soit $A = (A_1, \dots, A_n)$ un n -uplet dissipatif commutatif est pure . Alors, A est unitairement équivalent au n -uplet $\widehat{A} = (\widehat{A}_1, \dots, \widehat{A}_n)$ où,

$$\widehat{A}_k = P_{\widehat{\mathbb{X}}}(\widehat{M}_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}}) \Big|_{\widehat{\mathbb{X}}}, \quad \widehat{\mathbb{X}} = \widehat{\mathbb{X}}_n.$$

Preuve. Puisque A est pure alors, selon le corollaire 4.2, l'opérateur J_n^* est isométrique de \mathcal{H} dans $\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*}$. Ainsi, \mathcal{H} est isométrique avec $\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*}$ par l'identification de \mathcal{H} avec le sous-espace fermé $J_n^*(\mathcal{H})$. $J_n^* J_n$ est maintenant l'orthoprojecteur de $\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*}$ dans $J_n^*(\mathcal{H})$. D'ailleurs, selon la proposition 4.1, $J_n^* J_n$ et $M_{\Theta_T}^{(n)} \left(M_{\Theta_T}^{(n)} \right)^*$ sont les projections mutuellement orthogonales avec l'identité. Alors,

$$J_n^*(\mathcal{H}) = (\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*}) \ominus M_{\Theta_T}^{(n)} (\Phi_n(\mathbb{H}_n^2(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_T) = \left(\widehat{\Phi}_n \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \left(\widehat{\mathbb{H}} \right) = \widehat{\mathbb{X}} \quad (4.36)$$

De plus,

$$\left(\widehat{M}_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right)^* J_n^* = J_n^* A_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

On remarque que le sous-espace fermé $\widehat{\mathbb{X}} = J_n^*(\mathcal{H})$ est invariant pour $\left(\widehat{M}_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right)^*$

et $A_k^* = J_n \left(\widehat{M}_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right)^* J_n^*$. Soit maintenant $P_{\widehat{\mathcal{X}}}$ (respectivement $P_{\widehat{\mathcal{X}}^\perp}$) l'orthoprojection de $\Phi_n (\mathbb{H}_n^2 (\mathbb{C})) \otimes \mathcal{D}_{T^*}$ dans $\widehat{\mathcal{X}}$ (respectivement dans $\widehat{\mathcal{X}}^\perp$). Alors,

$$\begin{aligned} A_k^* &= J_n \left(\widehat{M}_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right)^* J_n^* = J_n \left(P_{\widehat{\mathcal{X}}} + P_{\widehat{\mathcal{X}}^\perp} \right) \left(\widehat{M}_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right)^* J_n^* \quad (4.37) \\ &= J_n P_{\widehat{\mathcal{X}}} \left(\widehat{M}_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right)^* J_n^* = J_n P_{\widehat{\mathcal{X}}} \left(\widehat{M}_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right)^* P_{\widehat{\mathcal{X}}} J_n^*. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$A_k = J_n P_{\widehat{\mathcal{X}}} \left(\widehat{M}_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) P_{\widehat{\mathcal{X}}} J_n^* = J_n \left(P_{\widehat{\mathcal{X}}} \left(\widehat{M}_k \otimes I_{\mathcal{D}_{T^*}} \right) \Big|_{\widehat{\mathcal{X}}} \right) J_n^*.$$

Pour finir la preuve il est suffisant de remarquer que J_n^* définit un opérateur unitaire de \mathcal{H} dans $\widehat{\mathcal{X}} = J_n^* (\mathcal{H})$. ■

4.3 Fonction Caractéristique d'un n - Uplet Dissipatif

Le but de cette section est de définir la fonction caractéristique $\theta_A(\lambda)$ associée au n -uplet dissipatif A en utilisant sa transformée de Cayley $T = C(A)$. La démarche suivie, sera la même que celle adoptée dans le cas d'un seul opérateur dissipatif [19]. On a

$$I_{\mathcal{H}} - \sum_1^n T_k T_k^* = \frac{4}{n} \sum_1^n (A_k + iI_{\mathcal{H}})^{-1} Q_k (A_k^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1}, \quad Q_k = \frac{A_k - A_k^*}{2i}. \quad (4.38)$$

Considérons maintenant les operateurs :

$$J : \mathcal{H}^n \longrightarrow \mathcal{H}, \quad J(h_1, \dots, h_n) = \frac{2i}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (A_k + iI_{\mathcal{H}})^{-1} h_k, \quad (4.39)$$

$$Q : \mathcal{H}^n \longrightarrow \mathcal{H}^n, \quad Q(h_1, \dots, h_n) = (Q_1 h_1, \dots, Q_n h_n).$$

Le résultat suivant peut être facilement vérifié.

Proposition 4.6 *Les operateurs J et Q satisfont les conditions :*

1. $Q = Q^*$ et $Q \geq 0$,
2. L'opérateur adjoint $J^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^n$ est défini comme suit,

$$J^*(h) = -\frac{2i}{\sqrt{n}} \left((A_1^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1} h, \dots, (A_n^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1} h \right) \quad (4.40)$$

L'opérateur $I - T^*T$ est défini dans \mathcal{H}^n par la relation,

$$(I - T^*T)(h_1, \dots, h_n) = (y_1, \dots, y_n), \quad y_k = \sum_{q=1}^n (\delta_{kq} - T_k^*T_q) h_q. \quad (4.41)$$

En remplaçant T_k^*, T_q dans $\delta_{kq} - T_k^*T_q$ respectivement par leur transformées de Cayley, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_{kq} - T_k^*T_q &= \delta_{kq} - \frac{1}{n} (A_k^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1} (A_k^* + iI_{\mathcal{H}}) (A_q - iI_{\mathcal{H}}) (A_q + iI_{\mathcal{H}})^{-1} \\ &= \frac{4}{n} (A_k^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1} \left[\frac{1 + n\delta_{kq}}{2} Q_{qk} + \frac{n\delta_{kq} - 1}{4} (I + A_k^*A_q) \right] (A_q + iI_{\mathcal{H}})^{-1} \end{aligned} \quad (4.42)$$

avec,

$$Q_{qk} = \frac{A_q - A_k^*}{2i}. \quad (4.43)$$

Finalement,

$$y_k = \sum_{q=1}^n \frac{4}{n} (A_k^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1} \left[\frac{1 + n\delta_{kq}}{2} Q_{qk} + \frac{n\delta_{kq} - 1}{4} (I + A_k^*A_q) \right] (A_q + iI_{\mathcal{H}})^{-1} h_q$$

Considérons maintenant les opérateurs σ et R définis dans \mathcal{H}^n comme suit :

$$[\sigma(h_1, \dots, h_n)]_k = \frac{2i}{\sqrt{n}} (A_k + iI_{\mathcal{H}})^{-1} h_k, \quad (4.44)$$

$$[R(h_1, \dots, h_n)]_k = \sum_{q=1}^n \left(\frac{1 + n\delta_{kq}}{2} Q_{qk} + \frac{n\delta_{kq} - 1}{4} (I + A_k^*A_q) \right) h_q. \quad (4.45)$$

Proposition 4.7 *Les opérateurs σ et R satisfont les conditions :*

1. L'opérateur σ est inversible et $[\sigma^{-1}(h_1, \dots, h_n)]_k = \frac{\sqrt{n}}{2i} (A_k + iI_{\mathcal{H}}) h_k$,
2. $\sigma^* : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}^n : [\sigma^*(h_1, \dots, h_n)]_k = -\frac{2i}{\sqrt{n}} (A_k^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1} h_k$,
3. $R^* : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}^n :$
 $[R^*(h_1, \dots, h_n)]_k = \sum_{q=1}^n \left(\frac{1 + n\delta_{kq}}{2} Q_{qk}^* + \frac{n\delta_{kq} - 1}{4} (I + A_q^*A_k) \right) h_q$
4. $I_{\mathcal{H}^n} - T^*T = \sigma^*R\sigma$,
5. L'opérateur R est positif.

Preuve. Les quatre premières affirmations sont évidentes. Prouvons que R est positif. Soit $h \in \mathcal{H}^n$ alors,

$$\begin{aligned} \langle R(h), h \rangle &= \langle R\sigma\sigma^{-1}(h), \sigma\sigma^{-1}(h) \rangle = \langle \sigma^*R\sigma\sigma^{-1}(h), \sigma^{-1}(h) \rangle \\ &= \langle (I_{\mathcal{H}} - T^*T)\sigma^{-1}(h), \sigma^{-1}(h) \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

■

Remarque 4.4 Dans le cas $n = 1$, on a $\sigma = J$ et $R = Q$. En effet,

i. soit $h \in \mathcal{H}$. Alors,

$$Jh = 2i(A + iI)^{-1}h = \frac{2i}{\sqrt{n}}(A + iI_{\mathcal{H}})^{-1}h = \sigma h.$$

ii. Puisque $I_{\mathcal{H}^n} - T^*T = \sigma^*R\sigma$ et dans le cas $n = 1$, $I_{\mathcal{H}} - T^*T = \sigma^*Q\sigma$ alors, $R = Q$.

Les operateurs :

$$\tau : D_T(x) \longrightarrow R^{\frac{1}{2}}\sigma(x), x \in \mathcal{H}^n \quad \text{et} \quad \tau_* : D_{T^*}(y) \longrightarrow Q^{\frac{1}{2}}J^*(y), y \in \mathcal{H} \quad (4.46)$$

sont isometriques. Par consequent, ils peuvent être prolongés par continuité à des transformations unitaires notées aussi τ et τ_*

$$\tau : \mathcal{D}_T \longrightarrow \mathcal{E} = \overline{R\mathcal{H}^n} \quad \text{et} \quad \tau_* : \mathcal{D}_{T^*} \longrightarrow \mathcal{F} = \overline{Q\mathcal{H}^n}.$$

Il s'ensuit que les fonctions caracteristiques, $(\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*}, \theta_T(z))$ et $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \tau_*\theta_T(z)\tau^{-1})$ coïncident.

Posons :

$$\theta_A(\lambda) = \tau_*\theta_T(z)\tau^{-1}, \quad \left\{ \lambda_k = i \frac{1 + \sqrt{n}z_k}{1 - \sqrt{n}z_k} \right\}, \quad z \in \mathbb{B}_n^n. \quad (4.47)$$

définition 4.5 La fonction $\theta_A(\lambda)$ définie par la formule (4.47), sera appelé la fonction caracteristique du n -uplet dissipatif A .

Remarque 4.5 La fonction caracteristique est analytique dans $(\mathbb{C}^{+*})^n$ et pour chaque $\lambda \in (\mathbb{C}^{+*})^n$, $\theta_A(\lambda)$ est un élément de $\mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

En utilisant la relation

$$\theta_T(z) D_T = D_{T^*} (I_{\mathcal{H}} - ZT^*)^{-1} (Z - T), \quad (4.48)$$

on peut voir que pour chaque $x \in \mathcal{H}^n$,

$$\begin{aligned}
\theta_A(\lambda) \left(R^{\frac{1}{2}} \sigma(x) \right) &= \tau_* \theta_T(z) \tau^{-1} \left(R^{\frac{1}{2}} \sigma(x) \right) \\
&= \tau_* D_{T^*} (I_{\mathcal{H}} - ZT^*)^{-1} (Z - T)(x) \\
&= \tau_* D_{T^*} (I_{\mathcal{H}} - ZT^*)^{-1} (Z(I_{\mathcal{H}} - T^*T) - (I_{\mathcal{H}} - ZT^*)T)(x) \\
&= \tau_* D_{T^*} (I_{\mathcal{H}} - ZT^*)^{-1} (Z\sigma^* R\sigma - (I_{\mathcal{H}} - ZT^*)T)(x) \\
&= -\tau_* D_{T^*} T(x) + \tau_* D_{T^*} (I_{\mathcal{H}} - ZT^*)^{-1} Z\sigma^* R\sigma(x) \\
&= -\tau_* T D_T(x) + \tau_* D_{T^*} (I_{\mathcal{H}} - ZT^*)^{-1} Z\sigma^* R\sigma(x) \\
&= -\tau_* T \tau^{-1} \left(R^{\frac{1}{2}} \sigma(x) \right) + \tau_* D_{T^*} (I_{\mathcal{H}} - ZT^*)^{-1} Z\sigma^* R\sigma(x) \\
&= \left(-\tau_* T \tau^{-1} + Q^{\frac{1}{2}} J^* (I_{\mathcal{H}} - ZT^*)^{-1} Z\sigma^* R^{\frac{1}{2}} \right) \left(R^{\frac{1}{2}} \sigma(x) \right) \tag{4.49}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$-\tau_* T \tau^{-1} \left(R^{\frac{1}{2}} \sigma(x) \right) = \tau_* \theta_T(0) \tau^{-1} \left(R^{\frac{1}{2}} \sigma(x) \right) = -Q^{\frac{1}{2}} J^* C(A)(x), \quad C(A) = T$$

Soit finalement,

$$\begin{aligned}
\theta_A(\lambda) &= A_0 + Q^{\frac{1}{2}} J^* (I_{\mathcal{H}} - ZT^*)^{-1} Z\sigma^* R^{\frac{1}{2}} \\
&= A_0 + Q^{\frac{1}{2}} J^* (I_{\mathcal{H}} - C(\Lambda) C(A)^*)^{-1} C(\Lambda) \sigma^* R^{\frac{1}{2}}, \tag{4.50}
\end{aligned}$$

où A_0 est l'opérateur défini de \mathcal{E} dans \mathcal{F} par :

$$A_0 \left(R^{\frac{1}{2}} \sigma(x) \right) = -Q^{\frac{1}{2}} J^* C(A)(x), \tag{4.51}$$

Λ est le n -uplet dissipatif défini dans \mathcal{H} par : $\Lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, $C(\Lambda)$ est sa transformée de Cayley. Notons que pour $n = 1$, on retrouve le résultat de [19] :

$$\theta_A(\lambda) = \left[I_{\mathcal{H}} + 2iQ^{\frac{1}{2}} (A^* - \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1} Q^{\frac{1}{2}} \right]. \tag{4.52}$$

.En effet, d'après les définitions (4.46) de τ et τ_* et les relations (4.47) (4.48), on

peut voir que,

$$\begin{aligned}
\theta_A(\lambda) \left(R^{\frac{1}{2}} \sigma(x) \right) &= \tau_* \theta_T(z) \tau^{-1} \left(Q^{\frac{1}{2}} J(x) \right) \\
&= Q^{\frac{1}{2}} J^* \left((A^* - \lambda I_{\mathcal{H}}) (A^* - iI_{\mathcal{H}})^{-1} \right)^{-1} (-A + \lambda I_{\mathcal{H}}) (A + iI_{\mathcal{H}})^{-1} (x) \\
&= Q^{\frac{1}{2}} J^* (A^* - iI_{\mathcal{H}}) (A^* - \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1} (-2iQ - (A^* - \lambda I_{\mathcal{H}})) (A + iI_{\mathcal{H}})^{-1} (x) \\
&= -2iQ^{\frac{1}{2}} (A^* - \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1} (-2iQ - (A^* - \lambda I_{\mathcal{H}})) (A + iI_{\mathcal{H}})^{-1} (x) \\
&= 2iQ^{\frac{1}{2}} (A + iI_{\mathcal{H}})^{-1} (x) - 4Q^{\frac{1}{2}} (A^* - \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1} Q (A + iI_{\mathcal{H}})^{-1} (x) \\
&= \left(I_{\mathcal{H}} + 2iQ^{\frac{1}{2}} (A^* - \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1} Q^{\frac{1}{2}} \right) \left(2iQ^{\frac{1}{2}} (A + iI_{\mathcal{H}})^{-1} (x) \right) \\
&= \left(I + 2iQ^{\frac{1}{2}} (A^* - \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1} Q^{\frac{1}{2}} \right) \left(Q^{\frac{1}{2}} J(x) \right).
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Le résultat suivant prouve que comme dans le cas de deux n -contractions commutatives pures, la fonction caractéristique est un invariant unitaire pour les n -uplets dissipatifs, commutatifs et pures.

théorème 4.4 *Soit A et B deux n -uplets pures et multidissipatifs. Alors, A est unitairement équivalent à B si et seulement si leur fonctions caractéristiques sont égales $\theta_A \simeq \theta_B$.*

Preuve. Soit $T = (T_1, \dots, T_n) = C(A)$ et $\tilde{T} = (\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n) = C(B)$. Supposons que A et B sont unitairement équivalent. Alors, ■

A est unitairement équivalent à $B \Leftrightarrow T = C(A)$ est unitairement équivalent à $\tilde{T} = C(B)$

$$\Leftrightarrow \theta_T(z) \simeq \theta_{\tilde{T}}(z), \quad z \in \mathbb{B}_n^n \tag{4.54}$$

$$\Leftrightarrow \theta_A(\lambda) \simeq \theta_B(\lambda), \quad \lambda \in (\mathbb{C}^{+*})^n.$$

Chapitre 5

Conclusion-Perspectives

Dans le cas $n = 1$, le spectre d'une contraction complètement non unitaire est parfaitement déterminé par la fonction caractéristique associée. Pour les n -contractions, la fonction caractéristique permet (pour le moment) de donner un critère nécessaire d'appartenance au spectre de Taylor.

Se pose donc la question naturelle suivante :

-Sous quelles conditions supplémentaires, ce critère est-il aussi suffisant ?

Notons que ce problème a été résolu par B. BENDOUKHA (Serdica Journal) pour les pure 2-contraction, vérifiant la condition supplémentaire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_1 T_1^* + T_1^* T_1)^n = 0.$$

Parailleurs, nous avons pu caractériser totalement les parties $\sigma_{\text{Taylor}}^{(0)}(T)$ et $\sigma_{\text{Taylor}}^{(n)}(T)$ du spectre de Taylor. Qu'en est-il pour les parties intermédiaires

$\left\{ \sigma_{\text{Taylor}}^{(k)}(T), 1 \prec k \prec n \right\}$?

Tout ce qui précède, peut aussi être envisagé pour les opérateurs n -dissipatifs.

Enfin, les spécialistes soviétiques, ont dans le cas $n = 1$, utilisé la fonction caractéristique pour la construction de modèles très pratiques dans les espaces des fonctions à carrés intégrables. Peut-on faire de même pour le cas $n \succ 1$.

Bibliographie

- [1] N.Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Transactions of the American Mathematical Society, volume 68, 1950, 337-404.
- [2] W. Arveson, *Subalgebras of C^* -algebras. III. Multivariable operator theory*, Acta Math. 181 (1988), 159-228.
- [3] B. Bendoukha, Taylor spectrum and characteristic functions of commuting 2-contractions, Serdica Math. J. 34 (2008), 543-556.
- [4] B. Bendoukha, On a certain class of nonstationary sequences in Hilbert space, International Journal of Mathematics and Mathematical sciences, Issue 29, Mai 2003, 1855-1866.
- [5] B. Bendoukha, Suites non stationnaires dans un espace de Hilbert, Thèse de Ph-D, Université d'état de Kharkov (Ukraine), mars 1990.
- [6] B. Bendoukha, F. Z. Delali, Taylor Spectrum Of Commuting N -Contractions, Quaestiones Mathematicae, volume 38, 2015, page 413-422 .
- [7] C. Benhida, D. Timotin, *Characteristic functions for multicontractions and automorphisms of the unit ball*, Integr. Equat. Oper ; Th., 57 (2007) n°2, pp. 153-166.
- [8] T. Bhattacharyya, J. Eschmeier, J. Sarkar, *Characteristic function of a pure contractive tuple*, Integral equations, Operator Theory 53, 1 (2005), pp. 23-32.
- [9] T. Bhattacharyya, J. Eschmeier, J. Sarkar, On C.N.C. *commuting contractive tuples*, Proceedings of Indian Academy of Sciences : Mathematical Sciences, vol. (116) 4, pp. 299-316, (2006).
- [10] Unitary colligations and their characteristic functions, Uspekhi. Mat. Nauk, 33, pp. 141-168.
- [11] R. Curto, *Application of several complex variables to multiparameter spectral theory* (Eds J. B. Conway and B. B. Morell) Surveys of some recent results in operator theory, Vol. II, Longman Publ. Co., London (1988), 25-90.
- [12] G. Dloussky, Produit tensoriel, produit ext erieur, applications 2013-2014.
- [13] A. E. Frazho, Models for noncommuting operators, J. Funt. Anal., 48 (1982), 1-11.

-
- [14] H. Helson, Lectures on invariant subspaces, New-York - London, 1964.
- [15] B. Sz. Nagy and C. Foias, Modèles fonctionnels des contractions de l'espace de Hilbert. La fonction caractéristique, C. R., 256 (1963), 3236-3239.
- [16] B. Sz. Nagy and C. Foias, Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification des des contractions, C. R., 256 (1963), 3413-3415.
- [17] M. C. Livshits, Sur une classe d'opérateurs linéaires de l'espace de Hilbert, Mat. Sb., 19 (1946), 239-260.
- [18] M. C. Livshits, Opérateurs isométriques à indices de défaut égaux, opérateurs quasunitaires, Mat. Sb., 26 (1950), 247-264.
- [19] B. Sz. Nagy and C. Foias, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North-Holland Publishing, Co, 1970.
- [20] V. T. Polyatskii, Réduction à la forme triangulaire des opérateurs quasiunitaires, Doctad. Acad. Nauk URSS, 113 (1957), 756-759.
- [21] G. Popescu, Characteristic functions for infinite sequences of noncommuting operators, J. Oper. Th., 22 (1989), 51-71.
- [22] G. C. Rota, On models for linear operators, Comm. pure appl. math. 3 (1960), 468-472.
- [23] J. Rovnyak, Some Hilbert spaces of analytic functions, Yale diss., 1963.
- [24] W. Rudin, *Function theory in the unit ball of \mathbb{C}^n* , Springer-Verlag, New York - Berlin, 1980.
- [25] A. A. Yantsevich, Nonstationary sequences in Hilbert space. 1. Correlation theory, Journal of Soviet Mathematics, 02/1990, 48 (4), 491-493.