

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET
DE LAVIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Thème

L'opérateur de Hille-Yosida et problème de Cauchy

Présenté par

Ghalem djamila

Soutenu le 22 /05/2017

Devant le jury

M. Menad Abdellah	Président		U. MOSTAGANEM.
M. Haoua Rabah	Examineur	MCB	U. MOSTAGANEM.
Mme. Limam	Encadreur	MCA	U. MOSTAGANEM.
M. Andasmas Maamar	Co-Encadreur	MCB	U. MOSTAGANEM.

Table des matières

Introduction	i
1 Rappels	1
1.1 Espace de Banach	1
1.2 Les opérateurs	2
1.3 Les semi-groupes	3
1.3.1 Théorème de Hille-Yosida	4
1.3.2 Approchants de Yosida.	4
1.3.3 Operateur de Hille-Yosida de type (M,ω)	5
2 Problème de Cauchy	7
2.0.4 Cas d'un scalair	7
2.0.5 Cas d'un opérateur borné	7
2.0.6 Cas d'un opérateur non borné	8
2.0.7 Les types des solutions	8
2.1 L'existence de la solution	11
2.2 L'unicité de la solution	13
2.3 Régularité temporelle	14
2.4 L^p et C -solutions	18
2.5 Solution intégrale	20

3	Régularité spatiale et le semigroupe d'un opérateur de Hille-Yosida.	24
3.1	Les classes de Favard	24
3.2	la régularité spatiale	27
3.3	Le semi groupe associe a un opérateur de Hille-Yosida	29
3.4	Solution intégrale dans L^1	32
3.5	Exemples	34
	Conclusion	37
	Bibliographie	38

INTRODUCTION

Dans ce travail on va étudier le problème de Cauchy abstrait régi par une équation différentielle de premier ordre suivante

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0, T],$$

(où $A : D(A) \rightarrow X$ est un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ inclus dans un espace de Banach complexe X , et $f : [0, T] \rightarrow X$, avec la condition initiale $u(0) = u_0 \in X$) sous l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} \text{Il existe } M, \omega \in \mathbb{R} \text{ telle que pour } \lambda > \omega \\ (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X); \|(\lambda - \omega)^n (\lambda - A)^{-n}\| \leq M \end{cases}$$

On dit que A est un opérateur de Hille-Yosida et on écrit

$$A \in HY(M, \omega).$$

On va introduire dans ce travail des nouveaux types de solutions (Solution intégrale, L^p -solution, C -solution, solution stricte, solution intégrale dans L^1) et on va montrer l'existence et l'unicité. Si

$$\overline{D(A)} = X,$$

alors A est un générateur de semi-groupe grâce au théorème de Hille-Yosida (voir [18]). Dans ce cas ($\overline{D(A)} = X$), le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

a été étudié par plusieurs auteurs par exemple en 1953, R. Phillips [16] a prouvé l'existence et l'unicité d'une solution stricte lorsque $f \in C^1(0, T; X)$ et $u_0 \in D(A)$. Ce résultat de régularité a été amélioré en 1985 par Da Prato et Sinestrari [4], [5] lorsque le second membre $f \in W^{1,1}(0, T; X)$ (espace de Sobolev), ils ont éliminé la condition $\overline{D(A)} = X$.

Diverses méthodes ont été utilisées pour retrouver ce résultat comme par exemple H. Kellermann et M. Hieber [11], A. Yagi [23], R. Nagel et E. Sinestrari [13], [14], F. Yao [6]).

Ce travail (synthèse sur l'article de Sinestrari [24]) est inspiré d'une conversation entre Kato et Sinestrari, l'idée repose sur l'approximation du problème de Cauchy inhomogène au lieu de l'homogène comme dans le théorème classique de Hille-Yosida. On va donner ici une preuve qui nécessite que les propriétés fondamentales des approximations de Yosida.

Ce mémoire est composé d'une introduction et trois chapitres principaux :

Le premier chapitre est consacré aux rappels fondamentaux et les outils nécessaires pour réaliser ce travail. Ils concernent les opérateurs, les semi-groupes, théorème de Hille-Yosida et les types de solutions.

Dans **le second chapitre**, on définit plusieurs types de solution pour un problème de Cauchy afin de prouver l'existence, l'unicité et la régularité temporelle de la solution.

Le troisième chapitre est consacré à la Régularité spatiale, pour cela on va introduire un espace d'interpolation F entre $D(A)$ et $\overline{D(A)}$ appelé la classe de Favard de l'opérateur A . On va parler aussi sur le semi groupe d'un opérateur de Hille-Yosida du type (M, ω) en définissant l'opérateur $A_0 : D(A_0) \subset X_0 \rightarrow X_0$ tel que

$$\begin{cases} X_0 = \overline{D(A)}, \\ D(A_0) = \left\{ x \in D(A) : Ax \in \overline{D(A)} \right\}, \\ A_0 x = Ax. \end{cases}$$

L'opérateur A_0 satisfait les conditions du théorème de Hille-Yosida avec les mêmes constantes M et ω , c'est le générateur d'un semi groupe $e^{A_0 t}$ dans X_0 . On termine ce chapitre par deux exemples.



Rappels

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1 Soit X un espace vectoriel normé, on dit que c'est un espace de Banach s'il est complet.

Autrement dit X est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente dans X .

Exemples. Soient Ω un ensemble mesurable et $T > 0$. Alors

- 1) Tout espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie est un espace complet pour n'importe quelle norme.
- 2) $L^1(\Omega)$ est complet pour la norme

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

- 3) $L^2(\Omega)$ est complet pour la norme

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

- 4) $\mathbb{C}^1([0, T])$ est complet pour sa norme usuelle :

$$\|f\|_{\mathbb{C}^1([0, T])} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|.$$

Cette propriété se généralise pour l'ensemble des fonctions de classe C^1 définie sur un compact de \mathbb{R}^n .

1.2 Les opérateurs

Soient X et Y deux espaces de Banach réels ou complexes.

On note par $\|\cdot\|_X$ la norme dans X ($\|\cdot\|$ s'il n'y a pas confusion).

Définition 1.2.1 *Un opérateur A de X dans Y est une application linéaire A définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeur dans Y , i.e pour toute $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*

(i) $A(x + y) = Ax + Ay.$

(ii) $A(\lambda x) = \lambda Ax.$

On appelle domaine de A et on note $D(A)$ le sous espace vectoriel des éléments x de X tels que Ax ait un sens dans Y .

Définition 1.2.2 (Opérateur borné) *Un opérateur A défini de X dans Y est borné si $D(A) = X$ et*

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty.$$

Dans la suite, A est un opérateur de X dans Y signifie que A est linéaire de $D(A) \subset X$ dans Y . On note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y et $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

Définition 1.2.3 (Opérateur fermé)

1) *On dit qu'un opérateur linéaire A est fermé si et seulement si son graphe*

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

est un sous espace vectoriel fermé de $X \times Y$.

D'une manière équivalente,

2) *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x \\ Ax_n \rightarrow y \end{cases}$$

On a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Définition 1.2.4 On dit qu'un opérateur A est fermable si et seulement si pour tout suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \rightarrow 0 \\ Ax_n \rightarrow y \end{cases} \implies y = 0$$

D'une manière équivalente, un opérateur A est dit fermable si la fermeture de son graphe est un graphe, i.e.

$$(0, y) \in \overline{G(A)} \implies y = 0$$

Alors, $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur fermé, qu'on appelle la fermeture de A et qu'on note \bar{A} .

On rappelle maintenant quelques propriétés importantes. Soit A un opérateur fermé. Alors,

i. $A + B$ (avec le domaine $D(A)$) est fermé pour chaque $B \in \mathcal{L}(X, Y)$.

ii. A^{-1} est fermé si A est injectif,

iii. A est borné si $D(A)$ est fermé dans X (théorème du graphe fermé),

Soit A un opérateur dans X . L'ensemble résolvant est

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) : D(A) \rightarrow X \text{ est bijectif et } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

On a $\rho(A) \neq \emptyset$ implique que A est fermé.

$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ est le spectre de A .

Exemple 1.2.1 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un interval, on considère dans l'espace $X = L^p(I)$, avec $1 \leq p \leq$

∞ les opérateurs

$$\begin{aligned} A &= \frac{d^2}{dx^2} & D(A) &= W^{2,p}(I) \\ B &= \frac{d}{dx} & D(B) &= W^{1,p}(I) \end{aligned}$$

sont fermés.

1.3 Les semi-groupes

Définition 1.3.1 Soit $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires dans X , on dit que cette famille forme un semi groupe dans X si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $G(0) = Id_{l(X)}$.

$$2. \forall (t, s) \geq 0, G(t + s) = G(t) \times G(s).$$

Lorsque la famille $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que la deuxième propriété est vérifiée pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ on dira qu'on a un groupe.

Définition 1.3.2 On dit qu'un semi groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application $t \rightarrow G(t)x$ est continue sur \mathbb{R}^+ , c'est-à-dire pour tout $x \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t)x - x\|_X = 0.$$

On dit aussi que $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi groupe.

Proposition 1.3.1 Soit $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi groupe, alors il existe $\omega \geq 0$, $M \geq 1$ tels que

$$\forall t \geq 0 \text{ on a } \|G(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Définition 1.3.3 Un semi groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ est appelé semi groupe uniformément continu d'opérateur linéaire borné si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

1.3.1 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.3.1 Soit A un opérateur fermé (non borné) à domaine dense dans X (i.e $\overline{D(A)} = X$) alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ si, et seulement s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \lambda_0\} \subset \rho(A) \text{ et } \|(A - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}; \lambda > \lambda_0.$$

1.3.2 Approchants de Yosida.

Introduisons la notion des approchants de Yosida.

Définition 1.3.4 Pour $\lambda > \lambda_0$, on définit les approchants de Yosida de A par

$$A_\lambda := \lambda A (\lambda I - A)^{-1} = \lambda^2 (\lambda I - A)^{-1} - \lambda I$$

A_λ est une approximation de A dans le sens suivant

Lemme 1.3.1 *Soit A un opérateur non borné vérifiant les hypothèses suivantes*

- 1) A est fermé
- 2) $\overline{D(A)} = X$
- 3) il existe $M, \lambda_0 > 0$ tels que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \lambda_0\} \subset \rho(A) \text{ et } \|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \lambda_0)}; \operatorname{Re} \lambda > \lambda_0.$$

Et soit A_λ son approximation de Yosida. Alors,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax \text{ pour } x \in D(A).$$

1.3.3 Opérateur de Hille-Yosida de type (M, ω)

Définition 1.3.5 *Soit X un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire.*

Si il existe $M, \omega \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\lambda > \omega$, on a $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|(\lambda - \omega)^n (\lambda - A)^{-n}\| \leq M.$$

on dit que A est un opérateur de Hille-Yosida de type (M, ω) (voir E. Sinestrari [18]) et on écrit $A \in HY(M, \omega)$.

Remarque. En vertu du théorème de Hille-Yosida, si on ajoute la condition $\overline{D(A)} = X$, alors A est le générateur d'un semi-groupe.

On va citer ci-dessous quelques propriétés de l'approximation de Yosida d'un opérateur de Hille-Yosida de type (M, ω) .

Théorème 1.3.2 *Soit $A \in HY(M, \omega)$ les propriétés suivantes sont vérifiées*

- (a) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda - A)^{-1}x = x$ si $x \in \overline{D(A)}$.
- (b) Posons pour $n \geq \omega$, $A_n := nA(n - A)^{-1}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax$ si $x \in \overline{D(A)}$ et $Ax \in \overline{D(A)}$.
- (c) $\|e^{A_n t}\| \leq M e^{\frac{n\omega t}{n-\omega}}$ pour $t \geq 0$ et $n > \omega$ et $\|e^{A_n t}\| \leq M e^{2|\omega|t}$ pour $t \geq 0$ et $n > 2\omega$.
- (d) $e^{A_n t} \in \overline{D(A)}$ pour $n \geq \omega, t \geq 0$ et $x \in X$.

(e) Soit $\lambda > \omega$, il existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$ telle que $n_\lambda > \omega$ et $(\lambda - A_n)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ pour $n > n_\lambda$. En plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda - A_n)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}\| = 0.$$

(f) Il existe

$$T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{A_n t} x$$

uniformément pour $x \in K$ un ensemble compact de $\overline{D(A)}$ et $t \in [0, T]$.

(g) Soit $\lambda > \omega$, on a

$$T(t)(\lambda - A)^{-1}x = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{A_n t} (\lambda - A_n)^{-1} x$$

uniformément pour $x \in H$ un ensemble compact de X et $t \in [0, T]$.

Preuve. Pour la preuve voir Pazy [15, sect 1.3].

Problème de Cauchy

Soit X un espace de Banach complexe. On considère le problème de Cauchy abstrait suivant

$$(P) \begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire de domaine $D(A) \subset X$, $u_0 \in X$ et $f : [0, T] \rightarrow X$.

2.0.4 Cas d'un scalaire

Si $A = \lambda$ est un scalaire réel ou complexe, on obtient le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u'(t) + \lambda u(t) = f(t) & \text{pour } t \in [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

la solution de ce problème est de la forme

$$u(t) = \left(u_0 + \int_0^t e^{\lambda s} f(s) ds \right) e^{-\lambda t}.$$

2.0.5 Cas d'un opérateur borné

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ et $f \in C([0; T]; X)$. Alors le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) & \text{pour } t \in [0, T[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (P)$$

admet une unique solution $u \in C^1([0; T]; X)$ qui vérifie (P) donnée par la formule

$$u(t) = e^{-tA} u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds.$$

2.0.6 Cas d'un opérateur non borné

On travaille ici avec des opérateurs linéaires non bornés définis sur un sous-espace vectoriel $D(A)$ de X et à valeurs dans X ; auxquels on essaye d'associer une famille $(T(t))_{t \geq 0}$ où chaque $T(t)$ joue le rôle de e^{tA} .

Le problème de Cauchy abstrait avec second membre nul i.e.

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 \text{ pour } t \in [0, T[\\ u(0) = u_o \end{cases}$$

admet une solution pour toute donnée initiale u_o dans le domaine de A si, et seulement si l'opérateur A est un générateur infinitésimal d'un C_0 - semigroupe.

2.0.7 Les types des solutions

Il existe plusieurs types de solution pour un problème de Cauchy. on va donner ici la définition d'une

1. Solution intégrale.
2. Solution dans L^p où L^p -Solution.
3. Solution dans C où C-Solution.
4. Solution stricte dans \mathbb{C} ou L^p .

Solution intégrale

Le premier type est introduit par G. Da Prato et E. Sinestrari dans [5]. Cette solution est obtenu par l'integration formelle du problème (P).

Définition 2.0.6 Soit $f \in L^1([0, T], X)$ et $u_0 \in X$. une fonction $u \in C([0, T], X)$ est une solution intégrale de (P) si

$$\int_0^t u(s)ds \in D(A), t \in [0, T]$$

et

$$u(t) = u_0 + A \int_0^t u(s)ds + \int_0^t f(s)ds, t \in [0, T] \tag{2.0.1}$$

on déduit que $u(0) = u_0$.

Solution dans L^p

D'autres définitions de solution sont obtenues en considérant la limite (dans diverses normes) des solutions de problème approché suivant

$$(P_k) \begin{cases} u'_k(t) = Au_k(t) + f(t), & t \in [0, T], \\ u_k(0) = u_0 \end{cases}$$

Définition 2.0.7 Soit $f \in L^p([0, T], X)$ et $u_0 \in X$. une fonction $u \in C([0, T], X)$ est appelée solution L^p de (P) s'il existe une suite $\{u_k\}$ telle que

$$u_k \in W^{1,p}([0, T], X) \cap L^p([0, T], D(A)), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.0.2)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u'_k - Au_k - f\|_{L^p([0, T], X)} = 0, \quad (2.0.3)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{L^p([0, T], X)} = 0, \quad (2.0.4)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k(0) - u_0\| = 0. \quad (2.0.5)$$

Remarques.

- 1) Dans l'article de G. Da Prato et P. Grisvard [3], ce type est appelé solutions de Friedrich.
- 2) On montre plus tard dans le théorème 2.5.4 qu'une définition équivalente peut être obtenue en supposant $u \in L^p([0, T], X)$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{C([0, T], X)} = 0$$

Solution dans C

Définition 2.0.8 Soit $f \in C([0, T], X)$ et $u_0 \in X$. Une fonction $u \in C([0, T], X)$ est appelée solution dans \mathbb{C} de (P) s'il existe $\{u_k\}$ telle que :

$$u_k \in C^1([0, T], X) \cap C([0, T], D(A)), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.0.6)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u'_k - Au_k - f\|_{C([0, T], X)} = 0, \quad (2.0.7)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{C([0, T], X)} = 0, \quad (2.0.8)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k(0) - u_0\| = 0. \quad (2.0.9)$$

on déduit que $u(0) = u_0$.

Solution stricte dans \mathbb{C}

Définition 2.0.9 Soit $f : [0, T] \rightarrow X$ et $u_0 \in X$. Une fonction

$$u \in \mathbb{C}^1([0, T], X) \cap \mathbb{C}([0, T], D(A))$$

est appelée une solution stricte dans \mathbb{C} de (P) si (P) est vérifié pour tout $t \in [0, T]$ et $u(0) = u_0$.

Si une telle solution existe alors on a

$$f \in \mathbb{C}([0, T], X) \text{ et } u_0 \in D(A).$$

Solution strict dans L^p

Définition 2.0.10 Soit $f : [0, T] \rightarrow X$ et $u_0 \in X$. Une fonction

$$u \in W^{1,p}([0, T], X) \cap L^p([0, T], D(A))$$

est appelé solution stricte dans L^p de (P) si (P) est vérifié pour presque tout $t \in]0, T[$ et $u(0) = u_0$.

si une telle solution existe alors on a $f \in L^p([0, T], X)$.

De ces définitions on peut deduire le théorème suivant

Théorème 2.0.3 ► Une solution dans \mathbb{C} est aussi une solution dans L^p pour tout $p \in [1, +\infty]$.

- Une solution stricte dans \mathbb{C} est aussi une solution stricte dans L^p pour tout $p \in [1, +\infty]$.
- Une solution stricte dans \mathbb{C} est aussi une solution dans \mathbb{C} .
- Une solution stricte dans L^p est aussi une solution dans L^p .

Théorème 2.0.4 Soit A un operateur fermé et u une solution dans L^p alors u est une solution intégrale et $u(0) = u_0$.

Remarque. Ces deux théorèmes prouvent qu'une solution de chaque type est une solution intégrale.

Preuve. Soit $\{u_k\}$ une suite de fonction vérifiant les relations (2.0.2)~(2.0.5). En remplaçant $\{u_k\}$ par une sous suite on peut supposer que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = u(t), \quad p.p \ t \in]0, T[. \quad (2.0.10)$$

En vertu des relations (2.0.2) et (2.0.4), on a pour $t \in [0, T]$

$$\int_0^t u_k(s) ds \in D(A) \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t u_k(s) ds = \int_0^t u(s) ds$$

$$A \int_0^t u_k(s) ds = \int_0^t [Au_k(s) - u'_k(s)] ds + u_k(t) - u_k(0).$$

En vertu des (2.0.3), (2.0.5) et (2.0.10), il existe pour presque tout $t \in]0, T[$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A \int_0^t u_k(s) ds = - \int_0^t f(s) ds + u(t) - u(0).$$

Comme A est fermé, on deduit que pour presque tout $t \in]0, T[$

$$\int_0^t u(s) ds \in D(A)$$

et

$$A \int_0^t u(s) ds = - \int_0^t f(s) ds + u(t) - u(0). \quad (2.0.11)$$

De la continuité de u et comme A est fermé on deduit que (2.0.11) est vérifiée pour tout $t \in [0, T]$. \square

On va montrer dans qu'une solution integrale est une solution dans C et L^p si

$$f \in L^p([0, T], X) \quad \text{où} \quad f \in \mathbb{C}([0, T], X).$$

2.1 L'existence de la solution

Théorème 2.1.1 *Une condition nécessaire pour l'existence de tout type de solution du problème (P) est*

$$u_0 \in \overline{D(A)} \quad \text{et} \quad f \in L^1([0, T], X). \quad (2.1.1)$$

Si u est une solution de (P) alors

$$u(t) \in \overline{D(A)}, \quad t \in [0, T].$$

Preuve. En vertu des théorèmes 2.0.3 et 2.0.4, il suffira de prouver que si u est une solution intégrale de (P) alors

$$u(t) \in \overline{D(A)} \quad (\text{en particulier } u_0 \in \overline{D(A)}).$$

Maintenant, si $t, t+h \in [0, T]$ et $h \neq 0$, on déduit de la définition d'une solution intégrale que

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s) ds \in D(A)$$

Comme $u \in \mathcal{C}([0, T], X)$, pour $h \rightarrow 0$ on obtient

$$u(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s) ds \in \overline{D(A)}.$$

Dans le théorème suivant on va donner la correspondance entre solution intégrale et stricte.

Théorème 2.1.2 Soit $f \in L^1([0, T], X)$ et $u \in \overline{D(A)}$.

Si u est une solution intégrale du problème (P) alors

$$v(t) = \int_0^t u(s) ds; \quad t \in [0, T]$$

est une solution stricte dans \mathcal{C} du problème

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + \int_0^t f(s) ds, & t \in [0, T] \\ v(0) = 0. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Inversement, si v est une solution stricte dans \mathcal{C} du problème (2.1.2), alors $u = v'$ est une solution intégrale du problème (P).

2.2 L'unicité de la solution

En utilisant les propriétés de l'approximation de Yosida d'un opérateur de Hille-Yosida de type (M, ω) , on déduit le lemme suivant et le théorème de l'unicité de la solution du problème (P).

Lemme 2.2.1 *Si $u \in W^{1,1}([0, T], X)$ et $u(t) \in \overline{D(A)}$ pour presque tout $t \in]0, T[$ et*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & p.p. t \in]0, T[\\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

alors $u(t) = 0, t \in [0, T]$.

Preuve. : Fixons $n > \omega$, $t \in [0, T]$ et définissons $v : [0, T] \rightarrow X$ par

$$v(s) = e^{A_n(t-s)}u(s), \quad 0 \leq s \leq t.$$

On a $v \in W^{1,1}([0, T], X)$, et de (2.2.1) on obtient pour presque tout $t \in]0, T[$

$$\begin{aligned} v'(s) &= -A_n e^{A_n(t-s)}u(s) + e^{A_n(t-s)}u'(s) \\ &= -e^{A_n(t-s)}A(n - A)^{-1}Au(s). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$u(t) = v(t) = \int_0^t v'(s)ds = - \int_0^t e^{A_n(t-s)}A(n - A)^{-1}Au(s)ds.$$

Choisissons $\lambda \in \rho(A)$ on déduit de (2.2.1) et le point (c) du théorème 1.3.2 pour $n > 2$

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A)^{-1}u(t)\| &= \left\| \int_0^t e^{A_n(t-s)}(\lambda - A)^{-1}A(n - A)^{-1}Au(s)ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t e^{A_n(t-s)}[\lambda(\lambda - A)^{-1} - I](n - A)^{-1}u'(s)ds \right\| \\ &\leq M e^{2|\omega|t} \|\lambda(\lambda - A)^{-1} - I\| \frac{M}{n - \omega} \|u'\|_{L^1([0, T], X)}. \end{aligned}$$

Quand $n \rightarrow \infty$ on obtient $\lambda(\lambda - A)^{-1}u(t) = 0$ et donc $u(t) = 0$.

Remarque. L'hypothèse $u \in W^{1,1}([0, T], X)$ est essentiel dans lemme précédent. En effet, Selon [21, p.408]), il existe une fonction continue non décroissante

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(t) = 0$ presque partout dans $]0, T[$. Choisissons $x \in X \setminus \{0\}$ et posons $u(t) = \varphi(t)x$ on obtient une solution non nulle quand $A = 0$.

Théorème 2.2.1 *Une solution de chaque type de problème (P) est unique s'il existe.*

Preuve. il suffit de prouver l'unicité de la solution intégrale.

Si $u \in \mathbb{C}([0, T], X)$ satisfait (2.0.1) avec $u_0 = 0$ et $f(t) \equiv 0$ alors

$$v(t) = \int_0^t u(s) ds, \quad t \in [0, T]$$

est une solution stricte dans \mathbb{C} de (2.2.1) et donc $v \equiv 0$, par conséquent $u \equiv 0$.

2.3 Régularité temporelle

Dans cette section on va montrer l'existence d'une solution stricte dans \mathbb{C} du problème (P) lorsque

$$f \in W^{1,1}([0, T], X)$$

par une procédure d'approximation (cette méthode est une généralisation du théorème de Hille-Yosida), et on va déduire l'existence des solutions de différents types sous différentes hypothèses.

Théorème 2.3.1 *Soient $u_0 \in D(A)$, $f \in W^{1,1}([0, T], X)$ tel que*

$$u_1 = Au_0 + f(0) \in \overline{D(A)} \tag{2.3.1}$$

Alors, il existe une unique solution stricte u dans \mathbb{C} du problème (P) et pour $t \in [0, T]$ on a :

$$\|u(t)\| \leq Me^{\omega t} \left(\|u_0\| + \int_0^t e^{-\omega s} \|f(s)\| ds \right), \tag{2.3.2}$$

$$\|u'(t)\| \leq M e^{\omega t} \left(\|u_1\| + \int_0^t e^{-\omega s} \|f'(s)\| ds \right). \quad (2.3.3)$$

Preuve. Dans la première partie de la preuve, on suppose que $f \in \mathbb{C}^2([0, T], X)$. Fixons $\lambda > \omega$ et supposons pour $n > n_\lambda$ (d'après le point (e) du théorème 1.3.2)

$$u_{0n} = (\lambda - A_n)^{-1}(\lambda - A)u_0 = (\lambda - A_n)^{-1}(\lambda u_0 - u_1 + f(0)) \quad (2.3.4)$$

Comme $A_n \in \mathcal{L}(X)$, alors le problème

$$\begin{cases} u'_n(t) = A_n u_n(t) + f(t), & t \in [0, T]; \\ u_n(0) = u_{0n} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

admet une solution unique définie par

$$u_n(t) = e^{A_n t} u_{0n} + \int_0^t e^{A_n(t-s)} f(s) ds, \quad t \in [0, T] \quad (2.3.6)$$

On montre que $\{u_n\}$ converge dans $\mathbb{C}^1([0, T], X)$ vers une solution de (P) vérifiant (2.3.2) et (2.3.3). Comme

$$u'_n(t) = u_{0n} + \int_0^t u'_n(s) ds, \quad t \in [0, T]$$

et $\lim_{h \rightarrow \infty} u_{0n} = u_0$ (voir le point (e) du théorème 1.3.2), il suffit de prouver que $\{u'_n\}$ converge dans $\mathbb{C}([0, T], X)$.

En remplaçant (2.3.6) dans (2.3.5) on obtient

$$u'_n(t) = e^{A_n t} A_n u_{0n} + \int_0^t A_n e^{A_n(t-s)} f(s) ds + f(t) \quad (2.3.7)$$

Comme $f \in \mathbb{C}^2([0, T], X)$ on peut intégrer deux fois par partie

$$\begin{aligned} \int_0^t A_n e^{A_n s} f(t-s) ds &= e^{A_n t} f(0) - f(t) + \int_0^t e^{(A_n - \lambda)s} e^{\lambda s} f'(t-s) ds \\ &= e^{A_n t} f(0) - f(t) - e^{A_n t} (\lambda - A_n)^{-1} f'(0) + (\lambda - A_n)^{-1} f'(t) \\ &\quad + \int_0^t e^{A_n s} (\lambda - A_n)^{-1} [\lambda f'(t-s) - f''(t-s)] ds \end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.3.7) on obtient

$$\begin{aligned} u'_n(t) &= e^{A_n t}(A_n u_{0n} + f(0)) - e^{A_n t}(\lambda - A_n)^{-1}f'(0) + (\lambda - A_n)^{-1}f'(t) \\ &\quad + \int_0^t e^{A_n s}(\lambda - A_n)^{-1} \left[\lambda f'(t-s) - f''(t-s) \right] ds \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Comme

$$\begin{aligned} A_n u_{0n} + f(0) &= A_n(\lambda - A_n)^{-1}(\lambda - A)u_0 + f(0) \\ &= -(\lambda - A)u_0 + \lambda(\lambda - A_n)^{-1}(\lambda - A)u_0 + f(0) \\ &= -\lambda u_0 + u_1 + \lambda(\lambda - A_n)^{-1}(\lambda - A)u_0 \end{aligned}$$

De théorème 1.3.2 On obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n u_{0n} + f(t) = u_1$$

Et donc de théorème 1.3.2, les points (c),(e),(f)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{A_n t}(A_n u_{0n} + f(0)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{A_n t}(A_n u_{0n} + f(0) - u_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} e^{A_n t}u_1 = T(t)u_1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} e^{A_n t}(\lambda - A_n)^{-1}f'(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{A_n t}[(\lambda - A_n)^{-1} - (\lambda - A)]f'(0) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} e^{A_n t}(\lambda - A)^{-1}f'(0) \\ &= T(t)(\lambda - A)^{-1}f'(0) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Uniformément pour $t \in [0, T]$.

Puisque les images de f' et $\lambda f' - f''$ sont des compactes dans X , on deduit de (2.3.8) en vertu de (2.3.9) et le théorème 1.3.2 (g) que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n(t) &= T(t)u_1 - T(t)(\lambda - A)^{-1}f'(0) + (\lambda - A)^{-1}f'(t) \\ &\quad + \int_0^t T(s)(\lambda - A)^{-1}[\lambda f'(t-s) - f''(t-s)]ds \end{aligned}$$

uniformément pour $t \in [0, T]$. Donc $\{u_n\}$ converge dans $\mathbb{C}^1([0, T], X)$ vers la fonction u .

Montrons maintenant que u est une solution stricte du probleme (P) dans C .

On a prouvé que $u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$ et $u'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n u_n(t) + f(t)$ uniformément pour $t \in [0, T]$. Par conséquent, Pour $\lambda > \omega$, on deduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda - A)u_n(t) = \lambda u(t) - u'(t) + f(t) \quad (2.3.10)$$

Si $n > n_\lambda$ (voir le théorème 1.3.2, (e)) et $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & \left\| u_n(t) + (\lambda - A)^{-1}[u'(t) - \lambda u(t) - f(t)] \right\| \\ & \leq \left\| (\lambda - A_n)^{-1} \right\| \left\| (\lambda - A_n)u_n(t) + u'(t) - \lambda u(t) - f(t) \right\| \\ & \quad + \left\| -(\lambda - A_n)^{-1} + (\lambda - A)^{-1} \right\| \left\| u'(t) - \lambda u(t) - f(t) \right\|. \end{aligned}$$

Par conséquent (en utilisant le point (e) du théorème 1.3.2 et (2.3.10)) lorsque $n \rightarrow \infty$

$$u(t) = -(\lambda - A)^{-1}[u'(t) - \lambda u(t) - f(t)].$$

On applique $\lambda - A$, il vient

$$u'(t) = Au(t) + f(t);$$

comme $u(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0) = u_0$, on conclut que u est une solution stricte dans \mathbb{C} du problème (P).

Pour les estimations (2.3.2) et (2.3.3). On remarque de (2.3.6) et théorème 1.3.2, (c) que pour $n > \omega$:

$$\|u_n(t)\| \leq M \left(e^{\frac{\omega n}{n-\omega} t} \|u_{0n}\| + \int_0^t e^{\frac{\omega n}{n-\omega} s} \|f(t-s)\| ds \right)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ on trouve l'estimation (2.3.2).

De (2.3.7) et par intégration par partie on obtient

$$u'_n(t) = e^{A_n t} \left(A_n u_{0n} + f(0) - \int_0^t e^{A_n s} f'(t-s) ds \right).$$

En procédant comme ci-dessus on déduit (2.3.3).

On suppose maintenant que $f \in W^{1,1}([0, T], X)$ et $\{g_n\} \subseteq \mathbb{C}^1([0, T], X)$ et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - f'\|_{L^1([0, T], X)} = 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$, posons

$$f_n(t) = f(0) + \int_0^t g_n(s) ds$$

on a $f_n \in \mathbb{C}^2([0, T], X)$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{C}([0, T], X)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f'_n - f' \right\|_{L^1([0, T], X)} = 0 \quad (2.3.11)$$

Comme $Au_0 + f_n(0) = u_1 \in \overline{D(A)}$, de la première partie de la preuve on déduit l'existence de u_n , l'unique solution stricte dans \mathbb{C} du problème

$$u'_n(t) = Au_n(t) + f_n(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.3.12)$$

De plus pour $m, n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$

$$\left\| u'_n(t) - u'_m(t) \right\| \leq Me^{|\omega|T} \left\| f'_n - f'_m \right\|_{L^1([0, T], X)}$$

donc $\{u'_n\}$ converge dans $\mathbb{C}([0, T], X)$, comme $u_n(0) = u_0, n \in \mathbb{N}$ on déduit l'existence de $u \in \mathbb{C}^1([0, T], X)$ telle que $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ dans $\mathbb{C}^1([0, T], X)$. De (2.3.12) on déduit aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Au_n(t) = u'(t) - f(t)$$

Comme A est fermé on obtient

$$u(t) \in D(A) \quad \text{et} \quad Au(t) = u'(t) - f(t)$$

En plus $u(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0) = u_0$.

En conclusion u est une solution stricte dans \mathbb{C} du problème (P).

En appliquant les estimations (2.3.2)-(2.3.3) au problème (2.3.12) on obtient des estimations similaires de la solution u du problème (P) car $\{u_n\}$ converge vers u dans $\mathbb{C}^1([0, T], X)$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Au_n(0) + f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n(0) = u'(0) = Au_0 + f(0) = u_1$$

L'unicité de la solution a été prouvée dans le théorème 2.2.1.

2.4 L^p et C -solutions

Ici, on va montrer à l'aide du théorème de la régularité temporelle (Voir la section précédente) l'existence de " L^p et C -solutions" sous l'hypothèse suivante sur la donnée $u_0 \in \overline{D(A)}$, lorsque le second membre f est dans $L^p([0, T], X)$ ou est dans $\mathbb{C}([0, T], X)$.

Théorème 2.4.1 Soient $u_0 \in \overline{D(A)}$, $f \in L^p([0, T], X)$, alors il existe une unique L^p -solution u du problème (P) et

$$\|u(t)\| \leq Me^{\omega t} \left(\|u_0\| + \int_0^t e^{-\omega s} \|f(s)\| ds \right), \quad t \in [0, T] \quad (2.4.1)$$

Preuve. Soit $u_{0n} = n(n-A)^{-1}u_0$, pour $n \in \mathbb{N}$; On a $u_{0n} \in D(A)$, $u_{0n} \in \overline{D(A)}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{0n} = u_0$.

Soit maintenant une suite $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}^1([0, T], X)$ telle que le support de f_n

$$\text{supp}\blacksquare(f_n) := \overline{\{t \in [0, T] : f_n(t) \neq 0\}}$$

est dans $]0, T[$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p([0, T], X)} = 0$.

Selon le théorème 2.3.1, on déduit l'existence de u_n solution stricte dans C du problème

$$\begin{cases} u_n'(t) = Au_n(t) + f_n(t), & t \in [0, T]; \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

De plus, pour $m, n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leq Me^{|\omega|T} \left(\|u_{0n} - u_{0m}\| + \int_0^t e^{-\omega s} \|f_n(s) - f_m(s)\| ds \right)$$

et donc $\{u_n\}$ converge dans $\mathcal{C}([0, T], X)$ vers une fonction $u \in \mathcal{C}([0, T], X)$. En plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u_n'(t) - Au_n - f \right\|_{L^p([0, T], X)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p([0, T], X)} = 0,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0) - u_0\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{0n} - u_0\| = 0$$

c'est à dire u est une L^p -solution du problème (P).

L'estimation (2.4.1) est une conséquence de l'estimation de chaque solution u_n comme une solution stricte de problème (2.4.2), L'unicité a été prouver dans théorème 2.2.1.

Théorème 2.4.2 Soient $u_0 \in \overline{D(A)}$, $f \in \mathcal{C}([0, T], X)$. Alors il existe unique C -solution u du problème (P) et

$$\|u(t)\| \in Me^{\omega t} \left(\|u_0\| + \int_0^t e^{-\omega s} \|f(s)\| ds \right), \quad t \in [0, T] \quad (2.4.3)$$

Preuve. Fixons $\lambda \in \rho(A)$ et définissons pour $n > \omega$,

$$u_{0n} := n(n-A)^{-1} [u_0 - (\lambda - A)^{-1}f(0)] + (\lambda - A)^{-1}f(0).$$

Comme

$$Au_{0n} = -n [u_0 - (\lambda - A)^{-1}f(0)] + n^2(\lambda - A)^{-1} [u_0 - (\lambda - A)^{-1}f(0)] - f(0) + (\lambda - A)^{-1}f(0)$$

nous déduisons

$$u_{0n} \in D(A), Au_0 + f(0) \in \overline{D(A)},$$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{0n} = u_0$.

Soit $\{g_n\} \subseteq \mathbb{C}^1([0, T], X)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - f\|_{\mathbb{C}([0, T], X)} = 0$. Posons

$$f_n(t) = g_n(t) - g_n(0) + f(0), \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T]$$

alors $\{f_n\} \subseteq \mathbb{C}^1([0, T], X)$,

$$f_n(0) = f(0), Au_{0n} + f_n(0) \in \overline{D(A)}$$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{C}([0, T], X)} = 0$.

En vertu du théorème 2.3.1, il existe u_n une unique solution stricte dans C du problème

$$\begin{cases} u'_n(t) = Au_n(t) + f_n(t), t \in [0, T]; \\ u_n(0) = u_{0n} \end{cases} \quad (2.4.4)$$

De plus pour $m, n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leq Me^{|\omega|T} \left(\|u_{0n} - u_{0m}\| + \int_0^t e^{-\omega s} \|f_n(s) - f_m(s)\| ds \right)$$

alors $\{u_n\}$ converge dans $\mathbb{C}([0, T], X)$ vers une fonction $u \in \mathbb{C}([0, T], X)$. En plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u'_n(t) - Au_n - f \right\|_{\mathbb{C}([0, T], X)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{C}([0, T], X)} = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0) - u_0\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{0n} - u_0\| = 0$$

i.e. u est une solution dans \mathbb{C} du problème (P).

L'estimation (2.4.3) est conséquence de l'estimation de chaque u_n solution stricte du problème (2.4.4). Pour l'unicité On applique le théorème 2.2.1.

2.5 Solution intégrale

Dans cette section, on va prouver l'existence de la solution intégrale sous des conditions nécessaire sur les données.

Commençons par prouver quelques résultats sur la solution intégrale.

Lemme 2.5.1 Soient $u_0 \in \overline{D(A)}$, $f \in L^p([0, T], X)$ et u une solution intégrale du problème (P).

(i) Si $u \in L^p([0, T], D(A))$ alors $u \in W^{1,p}([0, T], X)$ avec

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & \text{p.p. } t \in]0, T[\\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (2.5.1)$$

(ii) S'il existe $u'(t)$ pour presque tout $t \in]0, T[$, alors $u(t) \in D(A)$ pour $t \in]0, T[$ et le problème (2.5.1) est vérifié.

Preuve.

(i) Si $u \in L^p([0, T], D(A))$ alors, on a

$$u(t) = u_0 + \int_0^t Au(s)ds + \int_0^t f(s)ds; \quad t \in [0, T]$$

donc $u \in W^{1,p}([0, T], X)$ et (2.5.1) est vérifié.

(ii) Comme u est une solution intégrale du problème (P), on déduit pour $t, t+h \in [0, T]$ et $h \neq 0$ que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)ds &\in D(A), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)ds = u(t). \\ A \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)ds &= \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)ds. \end{aligned}$$

S'il existe $u'(t)$ pour presque tout $t \in]0, T[$, on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} A \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)ds = u'(t) - f(t).$$

Comme A est fermé on déduit $u(t) \in D(A)$, p.p. $t \in]0, T[$ avec (2.5.1).

Théorème 2.5.1 Soit u une solution intégrale du problème (P).

(i) Si $f \in L^p([0, T], X)$ et $u \in L^p([0, T], D(A))$ alors u est une solution stricte dans L^p .

(ii) Si $f \in L^p([0, T], X)$ et $u \in W^{1,p}([0, T], X)$ alors u est une solution stricte dans L^p .

(iii) Si $f \in C([0, T], X)$ et $u \in C([0, T], D(A))$ alors u est une solution stricte dans C .

(iv) Si $f \in C([0, T], X)$ et $u \in C^1([0, T], X)$ alors u est une solution stricte dans \mathbb{C} .

Preuve. Est une conséquence directe du lemme précédente.

Théorème 2.5.2 Si $u_0 \in \overline{D(A)}$ et $f \in L^1([0, T], X)$ alors le problème (P) admet une unique solution intégrale u vérifie l'estimation (2.4.1). Si en plus $f \in L^p([0, T], X)$ ou $f \in C([0, T], X)$ alors u est une L^p -solution ou C -solution.

Preuve. L'unicité a été prouvé dans le théorème 2.2.1.

Si $f \in L^p([0, T], X)$ alors (P) admet une unique L^p -solution en vertu du théorème 2.4.1, cette solutions est aussi une solution intégrale, de même si $f \in \mathbb{C}([0, T], X)$. Dans les deux cas, l'estimation (2.4.1) est vérifiée.

L'existence peut-être déduite directement du théorème 2.3.1, en considérant le problème suivant

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + u_0 + \int_0^t f(s)ds, & t \in [0, T] \\ v(0) = 0, \end{cases}$$

qui admet une solution stricte dans \mathbb{C} telle que :

$$\|v'(t)\| \leq Me^{\omega t} \left(\|u_0\| + \int_0^t \|f(s)\| ds \right), \quad t \in [0, T].$$

De théorème 2.1.2 on déduit que $u = v'$ est une solution intégrale du problème (P).

Remarque. Dans le cas où $f \in W^{1,1}([0, T], X)$ la dérivé de la solution stricte est une solution intégrale de probleme obtenus par la formule différentielle du (P).

Théorème 2.5.3 Soit $u_0 \in D(A)$ et $f \in W^{1,1}([0, T], X)$ telle que $Au_0 + f(s) \in \overline{D(A)}$. Si u est une solution stricte dans \mathbb{C} du problème (P) alors $v = u'$ est une solution intégrale du problème :

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + f'(t), & t \in [0, T], \\ v(0) = Au_0 + f(0). \end{cases} \quad (2.5.2)$$

Preuve. En vertu du théorème 2.5.2, il existe une solution intégrale du problème (2.5.2) qui

verifie

$$\begin{aligned} v(t) &= Au_0 + f(0) + A \int_0^t v(s) ds + \int_0^t f'(s) ds \\ &= A \left(u_0 + \int_0^t v(s) ds \right) + f(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Posons

$$w(t) = u_0 + \int_0^t v(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

w est une unique solution stricte dans \mathbb{C} du problème (P). Par conséquent $u = w$ et donc $u' = w' = v$.

Théorème 2.5.4 Soient $u_0 \in L^p([0, T], X)$ et $\{u_k\}$ une suite vérifie (2.0.2)-(2.0.5). Alors

$$u \in \mathbb{C}([0, T], X), \quad u(0) = u_0$$

et $\{u_k\}$ converge vers u dans $\mathbb{C}([0, T], X)$.

Preuve. Posons

$$f_k(t) = u_k'(t) - Au_k(t), \quad \text{p.p } t \in]0, T[$$

et $u_{0k} = u_k(0)$, on a $f_k \in L^p([0, T], X)$, et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{L^p([0, T], X)} = 0 \quad \text{et} \quad \|u_{0k} - u_0\| = 0$$

Par l'intégration on déduit :

$$u_k(t) = u_{0k} + A \int_0^t u_k(s) ds + \int_0^t f_k(s) ds, \quad t \in]0, T[$$

i.e u_k est une solution intégrale avec l'estimation

$$\|u_k(t) - u_h(t)\| \leq Me^{|\omega|T} \left(\|u_{0k} - u_{0h}\| + \int_0^t e^{-\omega s} \|f_k(s) - f_h(s)\| ds \right)$$

$h, k \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$, par conséquent $\{u_k\}$ converge vers u dans $C([0, T], X)$, en particulier

$$u(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{0k} = u_0.$$

Régularité spatiale et le semigroupe d'un opérateur de Hille-Yosida.

De la régularité temporelle on a montré que le problème (P) admet une solution stricte sous la régularité de f ,

Dans [10], Kato a trouvé le même resultat par exiger les conditions suivantes

$$\overline{D(A)} = X \text{ et } f \in ([0, T], D(A)).$$

Plus tard, Da Prato et Sinestrari [5] ont remplacé la condition sur f par l'hypothèse $f \in L^1([0, T], D(A))$ voir [5].

On va montrer qu'on peut remplacé $\overline{D(A)}$ par un espace d'interpolation F telle que

$$D(A) \subset F \subset \overline{D(A)}$$

cet espace est appelée la classe Favard de l'opérateur A (pour plus de détails sur cet espace voir [2]).

3.1 Les classes de Favard

Définition 3.1.1 Soit $A \in HY(M, \omega)$. Posons $\omega^* = \max(0, \omega + 1)$ on appelle la classe de Favard de A l'espace de Banach

$$F = \{x \in X : [x]_F^* := \sup_{\lambda > \omega^*} \|\lambda A (\lambda - A)^{-1} x\| < \infty\} \quad (3.1.1)$$

avec la norme

$$\|x\|_F = \|x\| + [x]_F^*$$

Théorème 3.1.1 *On a*

$$D(A) \hookrightarrow F \subseteq \overline{D(A)} \quad (3.1.2)$$

Preuve. Si $x \in D(A)$ et $\lambda > \omega^*$, alors

$$\|\lambda A(\lambda - A)^{-1}x\| \leq \frac{M\lambda}{\lambda - \omega} \|Ax\| \leq M(|\omega| + 1) \|Ax\|.$$

Par conséquent

$$[x]_F^* \leq M(|\omega| + 1) \|Ax\|$$

et donc

$$D(A) \hookrightarrow F$$

Si $x \in F$ et $\lambda > \omega^*$ on a

$$\|A(\lambda - A)^{-1}x\| \leq \frac{[x]_F^*}{\lambda}$$

et donc lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$ et à l'aide de l'identité de la résolvante $A(\lambda - A)^{-1} = -I + \lambda(\lambda - A)^{-1}$ on trouve

$$0 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|A(\lambda - A)^{-1}x\| = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|-x + \lambda(\lambda - A)^{-1}x\|,$$

qui implique que $x \in \overline{D(A)}$.

Dans le cas où $\overline{D(A)} = X$, le lemme suivant, due à W. Desch et N. Schappacher [7], est essentiel.

Lemme 3.1.1 *Si $f \in L^1([0, T], F)$ et u une solution intégrale du problème*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in [0, T]; \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Alors $u \in C([0, T], D(A))$, $Au(t) \in \overline{D(A)}$ et

$$\|u(t)\|_{D(A)} \leq M \int_0^t e^{\omega(t-s)} \|f(s)\|_F ds, \quad t \in [0, T] \quad (3.1.4)$$

Preuve. En premier lieu, on suppose $f \in W^{1,1}([0, T], F)$. Puisque $f(0) \in \overline{D(A)}$, de théorème 2.3.1 on déduit l'existence d'une solution stricte u dans C du problème 3.1.3. Puisque $f(t) \in \overline{D(A)}$ on déduit aussi que $Au(t) \in \overline{D(A)}$.

Posons maintenant pour $\lambda > \omega^*$,

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1}$$

on a $A_\lambda f \in W^{1,1}([0, T], X)$ et $A_\lambda f(t) \in \overline{D(A)}$.

Donc, en vertu du théorème 2.3.1, il existe une solution strict unique v dans \mathbb{C} du problème

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + A_\lambda f(t), & t \in [0, T]; \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

De 3.1.3 on déduit

$$\begin{cases} (Au)'(t) = AA_\lambda u(t) + A_\lambda f(t), & t \in [0, T]; \\ A_\lambda u(0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.6)$$

donc de l'unicité de la solution du problème (3.1.5), on trouve $v(t) = A_\lambda u(t)$ pour $t \in [0, T]$.

De l'estimation des solutions des problèmes (3.1.3) et (3.1.5), on obtient aussi

$$\begin{aligned} \|u(t)\| + \|A_\lambda u(t)\| &\leq M \int_0^t e^{\omega(t-s)} (\|f(s)\| + \|A_\lambda f(s)\|) ds \\ &\leq M \int_0^t e^{\omega(t-s)} \|f(s)\|_F ds \end{aligned}$$

Puisque $Au(t) \in \overline{D(A)}$ et lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$ on déduit (3.1.4).

Soit maintenant $f \in L^1([0, T], F)$. Il existe $\{f_n\} \subset W^{1,1}([0, T], F)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^1([0, T], F)} = 0. \quad (3.1.7)$$

De la première partie de la preuve, on déduit l'existence de la solution stricte u_n dans \mathbb{C} telle que $Au_n(t) \in \overline{D(A)}$, $t \in [0, T]$ du problème

$$\begin{cases} u_n'(t) = Au_n(t) + f_n(t), & t \in [0, T]; \\ u_n(0) = 0. \end{cases} \quad (3.1.8)$$

De plus de (3.1.4), et pour $n, m \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$ on a

$$\|u_n(t) - u_m(t)\|_{D(A)} \leq M \int_0^t e^{\omega(t-s)} \|f_n(s) - f_m(s)\|_F ds$$

Et grâce à (3.1.7) on déduit que $\{u_n\}$ converge dans $C([0, T], D(A))$.

Si u est une solution intégrale du problème (3.1.3) on déduit aussi que

$$\|u_n(t) - u(t)\| \leq M \int_0^t e^{\omega(t-s)} \|f_n(s) - f(s)\| ds \leq M \int_0^t e^{\omega(t-s)} \|f_n(s) - f(s)\|_F ds$$

alors de (3.1.7), on a $u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$ et par conséquent

$$u \in C([0, T], D(A)) \quad \text{et} \quad Au(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} Au_n(t) \in \overline{D(A)}.$$

En remplaçant dans (3.1.4), u par u_n et f par f_n et quand $n \rightarrow \infty$ on obtient le résultat.

3.2 la régularité spatiale

On donne maintenant le résultat de la régularité spatiale (voir Nagel, R., Sinestrari, E [14] le théorème 7.3).

Théorème 3.2.1 *Soient $f \in L^1([0, T], F)$, $u_0 \in D(A)$ telle que $Au_0 \in \overline{D(A)}$. Alors le problème (P) admet une unique solution stricte dans L^1 telle que*

$$u \in C([0, T], D(A)) \cap W^{1,1}([0, T], X). \quad (3.2.1)$$

De plus, pour toute $t \in [0, T]$, $Au(t) \in \overline{D(A)}$ et

$$\|u(t)\|_{D(A)} \leq Me^{\omega t} \left(\|u_0\|_{D(A)} + \int_0^t e^{-\omega s} \|f(s)\|_F ds \right) \quad (3.2.2)$$

Si en plus

$$f \in C([0, T], X) \quad (3.2.3)$$

on a aussi

$$u \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], X) \quad (3.2.4)$$

et l'équation dans (P) est satisfaite pour toute $t \in [0, T]$.

Preuve. L'unicité d'une solution qui vérifie (3.2.1) découle du théorème 2.2.1.

Pour prouver l'existence, on suppose $f \in L^1([0, T], F)$ et on considère la solution intégrale u_1 du problème

$$\begin{cases} u_1'(t) = Au_1(t) + f(t), & t \in [0, T] \\ u_1(0) = 0 \end{cases}$$

En vertu du lemme 3.1.1 on a $u_1 \in \mathcal{C}([0, T], D(A))$, $Au(t) \in \overline{D(A)}$ et

$$\|u_1(t)\|_{D(A)} \leq M \int_0^t e^{\omega(t-s)} \|f(s)\|_F ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.2.5)$$

Si $u_0 \in D(A)$ et $Au_0(t) \in \overline{D(A)}$, Alors par le théorème 2.3.1 il existe une solution stricte dans C du problème

$$\begin{cases} u_2'(t) = Au_2(t), & t \in [0, T] \\ u_2(0) = u_0 \end{cases}$$

et

$$\|u_2(t)\|_{D(A)} \leq M e^{\omega t} \|u_0\|_{D(A)} \quad (3.2.6)$$

Posons $u(t) := u_1(t) + u_2(t)$. Alors $u \in \mathcal{C}([0, T], D(A))$ est une solution intégrale du problème (P).

De (i) du théorème 2.5.1 on déduit que u est une solution stricte dans L^1 du problème (P) et donc (3.2.17.9) est vérifié. De l'équation de (P) on obtient $Au(t) \in \overline{D(A)}$, $t \in [0, T]$ et (3.2.5)-(3.2.6) implique (3.2.2).

En plus si $f \in C([0, T], X)$, et puisque $u \in C([0, T], D(A))$, on déduit

$$u' \in \mathcal{C}([0, T], X)$$

d'où le résultats.

Remarques.

i) Si $f \in \mathcal{C}([0, T], X) \setminus \mathcal{C}([0, T], X)$, On peut trouver un exemple d'une solution stricte dans L^1 mais non dans \mathcal{C} .

ii) On observe aussi que si (P) admet une solution stricte dans L^1 et $f \in L^1([0, T], \overline{D(A)})$, alors

$$u_0 \in D(A) \text{ et } Au_0 \in \overline{D(A)}$$

sont des conditions nécessaires.

iii) Dans le cas où $f \in L^1([0, T], D(A))$ et u une solution stricte dans L^1 du problème (P), alors Au est une solution intégrale du problème obtenu en appliquant formellement A l'équation dans (P).

Théorème 3.2.2 Soient $f \in L^1([0, T], D(A))$ et $u_0 \in D(A)$ telle que

$$Au_0 \in \overline{D(A)}.$$

Soit u une solution stricte dans L^1 du problème (P) donné par théorème 3.2.1. Alors Au est une solution intégrale du problème

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + Af(t), & t \in [0, T], \\ v(0) = Au_0. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Preuve. Puisque u est une solution intégrale du problème (P), alors on a pour $t \in [0, T]$

$$u(t) = u_0 + A \int_0^t u(s) ds + \int_0^t f(s) ds = u_0 + \int_0^t Au(s) ds + \int_0^t f(s) ds$$

qui implique

$$\int_0^t Au(s) ds \in D(A) \quad \text{et} \quad A \int_0^t Au(s) ds = Au(t) - Au_0 - \int_0^t Af(s) ds$$

pour $t \in [0, T]$, c'est à dire Au est une solution intégrale du problème (3.2.7).

3.3 Le semi groupe associe a un opérateur de Hille-Yosida

Soit $A : D(A) \subset X_0 \rightarrow X_0$ un opérateur de Hille-Yosida du type (M, ω) . On définit l'opérateur $A_0 : D(A_0) \subset X_0 \rightarrow X_0$ telle que

$$\begin{cases} X_0 = \overline{D(A)}, \\ D(A_0) = \left\{ x \in D(A) : Ax \in \overline{D(A)} \right\}, \\ A_0 x = Ax. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Selon Hille, E., Phillips, R. [9], A_0 est le générateur d'un semi groupe $e^{A_0 t}$ dans X_0 . Cet opérateur satisfait les conditions du théorème de Hille-Yosida avec les meme constantes M et ω .

Maintenant on peut déduire ce théorème à partir de théorème 2.3.1, en montrant que $T(t)$ (défini dans le théorème 1.3.2 (f)) peut être prolongé à un opérateur $e^{A_0 t} \in \mathcal{L}(X_0)$ et par prouver que $t \rightarrow e^{A_0 t}$ est un semi groupe dans X_0 avec le générateur A_0 .

Dans le cas où le domaine est dense la solution a une formule de représentation, cette formule a été généralisée par H.Thieme [22] dans le cas d'un opérateur de Hille-Yosida.

Lemme 3.3.1 Soit $A_0 : D(A_0) \subset X_0 \rightarrow X_0$ est le générateur d'un semigroupe associe a un l'opérateur de Hille-Yosida A .

Soit $u \in W^{1,1}([0, T]; X_0) \cap L^1([0, T]; D(A_0))$. Considérons le problème

$$\begin{cases} u'(t) - A_0 u(t) := f(t), & p.p t \in]0, T[\\ u(0) := u_0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

On a $f \in L^1([0, T]; X_0)$, $u_0 \in \overline{D(A)}$ et

$$u(t) = e^{A_0 t} u_0 + \int_0^t e^{A_0(t-s)} f(s) ds, \quad (3.3.3)$$

$$\|u(t)\| \leq M e^{\omega t} \left(\|u_0\| + \int_0^t e^{-\omega s} \|f(s)\| ds \right), \quad t \in [0, T]. \quad (3.3.4)$$

Preuve. Si $u \in C^1([0, T]; X_0) \cap C([0, T]; D(A_0))$, alors $f \in C([0, T]; X_0)$. Fixons $t \in]0, T[$.

Il existe pour $s \in [0, t]$

$$\frac{d}{ds} e^{A_0(t-s)} u(s) = -e^{A_0(t-s)} A_0 u(s) + e^{A_0(t-s)} u'(s) = e^{A_0(t-s)} f(s).$$

Donc $s \rightarrow e^{A_0(t-s)} u(s)$ appartient à $C^1([0, T]; X_0)$, En intégrant sur $[0, t]$ on obtient (3.3.3).

Si $u \in W^{1,1}([0, T]; X_0) \cap L^1([0, T]; D(A_0))$, alors $f \in L^1([0, T]; X_0)$. En intégrant (3.3.2),

il vient

$$u(t) = u_0 + A_0 \int_0^t u(s) ds + \int_0^t f(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

On pose pour $t \in [0, T]$

$$v(t) := \int_0^t u(s) ds, \quad g(t) = \int_0^t f(s) ds,$$

On trouve

$$v \in C^1([0, T]; X_0) \cap C([0, T]; D(A_0))$$

avec

$$\begin{cases} v'(t) = A_0 v(t) + g(t) + u_0, & t \in [0, T]; \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

De la première partie de la preuve on déduit

$$v(t) = \int_0^t e^{A_0 s} g(t-s) ds + \int_0^t e^{A_0 s} u_0 ds.$$

Puisque $g \in W^{1,1}([0, T]; X_0)$ et $g(0) = 0$, on obtient

$$v'(t) = \int_0^t e^{A_0 s} g'(t-s) ds + e^{A_0 t} u_0$$

par conséquent, on obtient les relations (3.3.3)-(3.3.4).

Théorème 3.3.1 (Formule de représentation de Thieme) *Etant donnée $u_0 \in \overline{D(A)}$ et $f \in L^1([0, T]; X)$, soit u une solution intégrale du problème (P). Alors on a*

$$u(t) = e^{A_0 t} u_0 + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{A_0(t-s)} \lambda(\lambda - A)^{-1} f(s) ds, \quad t \in [0, T] \quad (3.3.5)$$

et

$$\|u(t)\| \leq M e^{\omega t} \left(\|u_0\| + \int_0^t e^{-\omega s} \|f(s)\| ds \right), \quad t \in [0, T]. \quad (3.3.6)$$

Preuve. Posons pour $\lambda > \omega$ et $t \in [0, T]$

$$u_\lambda := \lambda(\lambda - A)^{-1} u(t), \quad u_{0\lambda} := \lambda(\lambda - A)^{-1} u_0, \quad f_\lambda(t) := \lambda(\lambda - A)^{-1} f(t).$$

En appliquant $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ à

$$u(t) = u_0 + A \int_0^t u(s) ds + \int_0^t f(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

On obtient

$$u_\lambda(t) = u_{0\lambda} - \lambda \int_0^t u(s) ds + \lambda \int_0^t u_\lambda(s) ds + \int_0^t f_\lambda(s) ds.$$

Comme $u(t) \in \overline{D(A)}$, alors $u_\lambda \in W^{1,1}([0, T]; X_0)$ et

$$\begin{cases} u'_\lambda(t) = -\lambda u(t) + \lambda u_\lambda(t) + f_\lambda(t) = A u_\lambda(t) + f_\lambda(t) \\ \quad = A_0 u_\lambda(t) + u_\lambda(t), \quad \text{p.p } t \in [0, T] \\ u_\lambda(0) = u_{0\lambda} \end{cases}$$

Comme $u_\lambda(t) \in L^1([0, T]; D(A_0))$, d'après le lemme 3.3.1 on trouve

$$u_\lambda(t) = e^{A_0 t} u_{0\lambda} + \int_0^t e^{A_0(t-s)} f(s) ds, \quad t \in [0, T] \quad (3.3.7)$$

Quand $\lambda \rightarrow +\infty$, on déduit (3.3.5).

L'estimation (3.3.6) a été prouvée dans le théorème 2.5.2 mais on peut la déduire de (3.3.7) car pour $\lambda > \omega$

$$\|u_\lambda(t)\| \leq M e^{\omega t} \|u_{0\lambda}\| + \frac{M^2 |\lambda|}{\lambda - \omega} \int_0^t e^{\omega(t-s)} \|f(s)\| ds, \quad t \in [0, T]$$

donc lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\|u(t)\| \leq M e^{\omega t} \|u_0\| + M^2 \int_0^t e^{\omega(t-s)} \|f(s)\| ds, \quad t \in [0, T] \quad (3.3.8)$$

Maintenant il existe une norme $\|\cdot\|_1$ dans X telle que (voir [15] page 17) pour tout $x \in X$

$$\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M \|x\|. \quad (3.3.9)$$

Notons X_1 l'espace X muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Dans X_1 , A est un opérateur de Hille- Yosida de type $(1, \omega)$ et donc en appliquant le résultat précédent à l'espace X_1 , l'estimation (3.3.8) est remplacé par

$$\|u(t)\| \leq e^{\omega t} \|u_0\|_1 + \int_0^t e^{\omega(t-s)} \|f(s)\|_1 ds, \quad t \in [0, T]$$

qui implique (3.3.6) en vertu de (3.3.9).

3.4 Solution intégrale dans L^1

Dans cette section on va donner une nouvelle définition d'une solution intégrale du problème (P). Ici, la donnée u_0 n'est pas nécessaire dans $\overline{D(A)}$.

Définition 3.4.1 Soit $f \in L^1([0, T]; X)$ et $u_0 \in X$. Une fonction $u \in L^1([0, T]; X)$ est appelé une solution intégrale dans L^1 du problème (P) si pour presque tout $t \in]0, T[$ on a $\int_0^t u(s) ds \in D(A)$ et

$$u(t) = u_0 + A \int_0^t u(s) ds + \int_0^t f(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.4.1)$$

On déduit que $u(t) \in \overline{D(A)}$ pour presque tout $t \in]0, T[$.

Si $u_0 \in \overline{D(A)}$ alors une solution intégrale est aussi une solution intégrale dans L^1 .

Théorème 3.4.1 *Deux solutions intégrale dans L^1 du problème (P) coïncident presque partout dans $]0, T[$.*

Preuve. Si $u \in L^1([0, T]; X)$ et (3.4.1) est satisfaite avec $u_0 = 0$ et $f \equiv 0$. Posons

$$v(t) := \int_0^t u(s) ds, \quad t \in [0, T]$$

alors, on a $v \in W^{1,1}([0, T]; X)$ et

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t), & p.p. \quad t \in [0, T] \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Du lemme 2.2.1, on déduit $v(t) = 0$, $t \in [0, T]$ et par conséquent $u = 0$ presque partout dans $]0, T[$.

Théorème 3.4.2 *Le problème (P) admet une solution intégrale si et seulement s'il existe une solution intégrale dans L^1 du problème*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \in [0, T] \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Où il existe une solution stricte dans L^1 du problème

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t), & p.p. \quad t \in]0, T[\\ v(0) = 0. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Preuve. Une solution intégrale u dans L^1 du problème (P), s'écrit comme $u = u_1 + u_2$ où u_1 (existe) est la solution intégrale du problème

$$\begin{cases} u_1'(t) = Au_1(t) + f(t), & t \in [0, T] \\ u_1(0) = 0. \end{cases}$$

et u_2 est une solution intégrale dans L^1 du problème (3.4.2). D'où la preuve de la première partie du théorème.

Pour la dernière partie, il suffit de poser

$$v(t) = \int_0^t u(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Pour la solution intégrale dans L^1 du problème (3.4.2), il y a une formule semblable à celle de Thieme.

Théorème 3.4.3 Soit $u_0 \in X$ et u une solution intégrale dans L^1 de (3.4.2). Alors on a pour p.p. $t \in]0, T[$

$$u(t) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{A_0 t} \lambda(\lambda - A)^{-1} u_0 \quad (3.4.4)$$

et

$$\|u(t)\| \leq M e^{\omega t} \|u_0\|. \quad (3.4.5)$$

Preuve. En appliquant $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ avec $\lambda > \omega$ à (3.4.1) avec $f \equiv 0$ on obtient pour p.p. $t \in]0, T[$

$$\lambda(\lambda - A)^{-1} u(t) = \lambda(\lambda - A)^{-1} u_0 - \lambda \int_0^t u(s) ds + \lambda^2 \int_0^t (\lambda - A)^{-1} u(s) ds. \quad (3.4.6)$$

Posons $u_\lambda := \lambda(\lambda - A)^{-1} u(t)$, p.p. $t \in]0, T[$ et $u_{0\lambda} = \lambda(\lambda - A)^{-1} u_0$ on déduit

$$u_\lambda \in L^1([0, T]; D(A_0)) \text{ et } u_{0\lambda} \in D(A_0)$$

et en plus de (3.4.6)

$$u_\lambda(t) = u_{0\lambda} - \lambda \int_0^t u(s) ds + \lambda \int_0^t u_\lambda(s) ds, \text{ p.p. } t \in]0, T[$$

le second membre \tilde{u} appartient à $W^{1,1}([0, T]; X_0)$ et

$$\begin{cases} \tilde{u}'_\lambda(t) = -\lambda u(t) + \lambda u_\lambda(t) = A u_\lambda(t) = A_0 \tilde{u}(t), & \text{p.p. } t \in]0, T[\\ \tilde{u}_\lambda(0) = u_{0\lambda} \end{cases}$$

de théorème 2.2.1 on déduit que $\tilde{u}(t) = e^{A_0 t} u_{0\lambda}$, p.p. $t \in]0, T[$. Mais $u(t) \in \overline{D(A)}$ pour presque tout $t \in]0, T[$, par conséquent $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda(t) = u(t)$ p.p. $t \in]0, T[$ et ainsi (3.4.4).

On procède comme la preuve du théorème 3.3.1 on déduit (3.4.5) de (3.4.4).

3.5 Exemples

On donne maintenant deux exemple montrons deux situations extrêmes. Dans

- la première il existe une solution intégrale dans L^1 pour tout $u_0 \in X$;
- la deuxième il n'existe pas une solution intégrale si $u_0 \notin \overline{D(A)}$.

Exemple 3.5.1 Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un générateur d'un semi groupe analytique fermé non continu en $t = 0$ (par conséquent $\overline{D(A)} \neq X$); voir Lunardi [12] et Sinestrari [17].

Pour tout $u_0 \in X$ le problème (3.4.2) admet une solution intégrale dans L^1 donné par

$$u(t) = e^{At} u_0$$

qui est continu si et seulement si $u_0 \in \overline{D(A)}$.

Exemple 3.5.2 Si $X = C(0, 1)$ avec la norme sup, alors $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ définie par

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in C^1(0, 1); u(0) = 0\}, \\ Au = -u' \end{cases}$$

est un opérateur de Hille-Yosida du type $(0, 1)$ (Pour plus de détail voir Da Prato et Sinestrari [5]). On a

$$X_0 = \overline{D(A)} = \{u \in C^1(0, 1); u(0) = 0\}$$

et pour le générateur $A_0 : D(A_0) \subset X_0 \rightarrow X_0$ de semi groupe associé à A on a la résolvante

$$((\lambda - A)^{-1} u_0)(x) = \int_0^x e^{\lambda(x-y)} u_0(y) dy, \quad x \in [0, 1]$$

pour $\lambda > 0$ et $u_0 \in X$. Et le semi groupe, pour $t \geq 0$ et $v \in X_0$

$$(e^{A_0 t} v)(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq t, x \leq 1, \\ v(x-t), & 0 \leq t \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Par conséquent pour $\lambda > 0$ et $u_0 \in X$, on a

$$(e^{A_0 t} \lambda (\lambda - A)^{-1} u_0)(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq t, x \leq 1 \\ \lambda e^{\lambda(x-t)} \int_0^x e^{\lambda y} u_0(y) dy, & 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.5.2)$$

Supposons qu'il existe une solution intégrale dans L^1 du (3.4.2) avec $u_0 \in X$. On va prouver nécessairement que $u_0(0) = 0$, c'est à dire $u_0 \in \overline{D(A)}$.

► Si $u_0(0) > 0$ et $0 < \varepsilon < u_0(0)$, il existe $\delta_\varepsilon \in]0, 1[$ telle que

$$-\varepsilon < u_0(y) - u_0(0), \quad 0 < y < \delta_\varepsilon \quad (3.5.3)$$

De (3.4.4), il existe $t_\varepsilon \in]1 - \delta_\varepsilon, 1[$ telle que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{A_0 t} \lambda (\lambda - A)^{-1} u_0 = u(t_\varepsilon). \quad (3.5.4)$$

En vertu de (3.5.2), on a pour $\lambda > 0$

$$(e^{A_0 t} \lambda (\lambda - A)^{-1} u_0)(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq t_\varepsilon. \quad (3.5.5)$$

et de (3.5.3) pour tout $t_\varepsilon \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} & (e^{A_0 t} \lambda (\lambda - A)^{-1} u_0)(x) \\ &= \lambda e^{-\lambda(x-t_\varepsilon)} \int_0^{x-t_\varepsilon} e^{\lambda y} [u_0(y) - u_0(0)] dy + \lambda e^{-\lambda(x-t_\varepsilon)} \int_0^{x-t_\varepsilon} e^{\lambda y} u_0(0) ds \\ &\geq -\varepsilon [1 - e^{-\lambda(x-t_\varepsilon)}] + u_0(0) [1 - e^{-\lambda(x-t_\varepsilon)}] \end{aligned}$$

De (3.5.4)-(??) on déduit pour $\lambda \rightarrow +\infty$

$$u(t_\varepsilon)(x) \begin{cases} = 0, & 0 \leq x \leq t_\varepsilon \\ \geq u_0(0) - \varepsilon > 0, & t_\varepsilon < x \leq 1 \end{cases}$$

Comme $u(t_\varepsilon) \in \mathcal{C}(0, 1)$, c'est une contradiction.

► Si $u_0(0) < 0$ et $u_0(0) < -\varepsilon < 0$, il existe $\delta_\varepsilon \in]0, 1[$ telle que

$$u_0(y) - u_0(0) < \varepsilon, \quad 0 < y < \delta_\varepsilon.$$

Il existe $t_\varepsilon \in]1 - \delta_\varepsilon, 1[$ telle que (3.5.4) est vérifié. En procédant comme ci-dessus, on obtient

$$u(t_\varepsilon)(x) \begin{cases} = 0, & 0 \leq x \leq t_\varepsilon \\ \leq \varepsilon + u_0(0) < 0, & t_\varepsilon < x \leq 1 \end{cases}$$

Ce qui est contradiction car $u(t_\varepsilon) \in C(0, 1)$. En conclusion $u_0(0) = 0$ i.e. $u_0 \in \overline{D(A)}$.

CONCLUSION

Dans ce travail, on a fait une synthèse sur l'article de Eugenio Sinestrari intitulé

"Hille-Yosida operators and Cauchy problems".

l'auteur a utilisé l'opérateur de Hille-Yosida pour montrer l'existence de nouveaux types de solutions (Solution intégrale, L^p -solution, C -solution, solution stricte, solution intégrale dans L^1) d'un problème abstrait Cauchy. Il a introduit les espaces de Favard (se sont des espaces d'interpolation entre le domaine de l'opérateur A et son adhérence $\overline{D(A)}$) pour montrer la régularité spaciaie.

On trouve aussi dans cet article une nouvelle preuve de la régularité temporelle.

-
- [1] Bénylan, P., Egberts, P. : Mild solutions. In : Semesterbericht Funktionalanalysis (Blau-beuren 1989), pp. 25–35.
- [2] Butzer, P.L., Berens, H. : Semi-Groups of Operators and Approximation. Springer, Berlin (1967)
- [3] Da Prato, G., Grisvard, P. : Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles. *J. Math. Pures Appl.* 54, 305–387 (1975) MATH
- [4] Da Prato, G., Sinestrari, E. : On the Phillips and Tanabe regularity theorems. In : Semesterbericht Funktionalanalysis (Sommersemester 1985), pp. 117–124
- [5] Da Prato, G., Sinestrari, E. : Differential operators with non dense domain. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* 14, 285–344 (1987)
- [6] de Laubenfels, R., Yao, F. : Regularized semigroups of bounded semivariation. *Semigroup Forum* 54, 43–57 (1997)
- [7] Desch, W., Schappacher, W. : Some Generation Results for Perturbed Semigroups. *Dekker Lecture Notes*, vol. 116, pp. 125–152. Dekker, New York (1989)
- [8] Goldstein, J.A. : *Semigroups of Operators and Applications*. Oxford University Press, London (1985)
- [9] Hille, E., Phillips, R. : *Functional Analysis and Semi-Groups*. American Mathematical Society, Providence (1957)
- [10] Kato, T. : On linear differential equations in Banach spaces. *Commun. Pure Appl. Math.* 9, 479–486 (1956)
- [11] Kellermann, H., Hieber, M. : Integrated semigroups. *J. Funct. Anal.* 84, 160–180 (1989)
- [12] Lunardi, A. : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*. Birkhäuser, Basel (1995)
- [13] Nagel, R., Sinestrari, E. : Inhomogeneous Volterra Integrodifferential Equations for Hille-Yosida Operators. *Dekker Lecture Notes*, vol. 150, pp. 51–70. Dekker, New York (1994)
- [14] Nagel, R., Sinestrari, E. : The Miller scheme in semigroup theory. *Adv. Differ. Equ.* 9, 387–414 (2004)
- [15] Pazy, A. : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, New York (1983)
- [16] Phillips, R. : Perturbation theory of semigroups of linear operators. *Trans. Am. Math.*

Soc. 74, 199–221 (1953)

[17] Sinestrari, E. : On the abstract Cauchy problem of parabolic type in space of continuous functions. *J. Math. Anal. Appl.* 107, 16–66 (1985)

[18] Sinestrari, E. : On the Hille-Yosida Operators. *Dekker Lecture Notes*, vol. 155, pp. 537–543. Dekker, New York (1994)

[19] Sinestrari, E. : Abstract hyperbolic equations in non-reflexive spaces. In : Lorenzi, A., Ruf, B. (eds.) *Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis*, pp. 339–351. Birkhäuser, Basel (2002)

[20] Sinestrari, E. : Product semigroups and extrapolation spaces. *Semigroup Forum* 71, 102–118 (2005)

[21] Taylor, A. : *General Theory of Functions and Integration*. Blaisdell Publ. Comp., Claremont (1965)

[22] Thieme, H. : Semiflows generated by Lipschitz perturbations of nondensely defined operators. *Differ. Int. Equ.* 3, 1035–1066 (1990)

[23] Yagi, A. : Generation theorem of semigroup for multivalued linear operators. *Osaka J. Math.* 28, 385–410 (1991).

[24] Sinestrari, E. : Hille-Yosida operators and Cauchy problems. *Semigroup Forum* 82 : 10–34 (2011).