REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQU

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

Par

DJILALI BEKAI

Option : Analyse Spectrale et Micro-localisation

sujet du magister

LES SOLUTIONS BKW ET LEUR EXTENSION AU VOISINAGE DES CAUSTIQUES ET A L'EXTERIEUR

Soutenu le.. /06 /2012 devant le Jury

Ahmed MEDEGHERI	Président	Prof	U.MOSTAGANEM
Djillali BOUAGADA	Examinateur	M.C	U.MOSTAGANEM
Sidi Mohamed BAHRI	Examinateur	M.C	U.MOSTAGANEM
Amina LAHMAR-BENBERNOU	Encadreur	Prof	U.MOSTAGANEM

Dédicaces

Je dédie ce travail pour mon regrette chèr père , et ma chère mère

A mon épouse

A mes enfants

A ma famille et mes amis

A mes collègues de poste de graduation

Remerciements

Je tiens à remercier

Madame Amina LAHMAR-BENBERNOU professeur à l'université de Mostaganem, qui a accepté la direction de cette thèse, et a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires ainsi que ses conseils et sa présence pendant la réalisation de ce travail.

Monsieur Ahmed MEDEGHERI professeur à l'université de Mostaganem, qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Monsieur Djillali BOUAGADA Maître de Conférences à l'université de Mostaganem, qui a accepté d'analyser ce travail et me fait l'honneur d'être Examinateur.

Monsieur Sidi Mohamed BAHRI Maître de Conférences à l'université de Mostaganem, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et me fait l'honneur d'être Examinateur.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce travail est l'extension de la solutions $B.K.W$ (Brillouin-Kramer-Wentzel) au voisinage de la caustique et à l'extérieur de l'île.
A l'origine de la création des résonances de Formes Helffer et Sjöstrand qui ont étudié l'opérateur de Schrödinger dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$P = -h^2\Delta + V(x),$$

Où le potentiel $V(x)$ est supposé globalement analytique sur $\mathbb{R}^n$. Dans ce mémoire nous nous intéressons à l'analyticité seulement à l'infini(le potentiel non globalement analytique).
La théorie des résonances pour P a été développée dans un très grand nombre d'articles ([1], [4], [16], [14], [11],...) Précisons dans un premier temps les hypothèses sur le potentiel

1. $V \in C^\infty$ à valeur rèel, et verifie : $V(x) \to 0$ lorsque $|\mathrm{Re}\, x| \to \infty$
2. Il existe un compact K_0 de $\mathbb{R}^n$ tel que V est analytique sur $K_0^c = \mathbb{R}^n / K_0$, et se prolonge en une fonction holomorphique dans le secteur

$$D_0 = \{x \in \mathbb{C}^n : |\mathrm{Im}\, x| < \sigma_0 |\mathrm{Re}\, x|, \mathrm{Re}\, x \in K_0^c\} \quad \text{ou} \quad \sigma_0 > 0$$

Ceci nous permet de définir les résonances près de l'axe réel comme des valeurs propres complexes de l'opérateur distordu de P que l'on note $P_\theta = \tilde{P}_{i\theta}$ pour θ suffisamment petit où $\tilde{P}_\nu = U_v P\, U_{-v}$ est l'opérateur conjugué et U_v l'opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ (v étant un nombre réel assez petit) défini par $U_v(\phi(x)) = \det(1+vdF(x))^{\frac{1}{2}}\phi(x+vF(x))$. Alors le spectre essentiel est donné par $\sigma_{ess}(P_\theta) = e^{-2i\theta}\mathbb{R}_+ = (1+i\theta)^{-2}\mathbb{R}_+$ (Théorème de Perturbation de Weyl) et le spectre $\sigma(P_\theta)$ dans le secteur

$$S_\theta = \{E \in \mathbb{C}\ ; -2\theta < \arg E < 0\}$$

Est discret . Les éléments de $\sigma(P_\theta) \cap S_\theta$ sont appelés les resonances. En outre si u_θ est une fonction propre de P_θ, il existe alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ holomorphique dans D_0 telle que $u_\theta = U_{i\theta}u$, de telles fonctions u sont appelés les états résonants de P.

L'étude de la décroissance des fonctions propres pour des opérateurs aux dérives partiels du second ordre, assosiés à des valeurs du spectre essentiel, qui a été étudié par Agmon. Cette étude a donné la naissance à une pseudo-métrique riemannienne construite à partir d'un potentiel et de l'énergie appelée métrique d'Agmon sur $\mathbb{R}^n$. Elle montre comment le potentiel contrôle la décroissance .

Il est important de noter que la métrique d'Agmon dépend du potentiel V et de l'énergie E. Elle est dégénérée car il peut exister des surfaces non vide $\partial\ddot{O} = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = E\}$, et des régions classiquement interdites $\{x \in \mathbb{R}^n /\ V(x) > E\}$ .Ces ensembles jouent un rôle très important dans cette théorie. La surface $\partial\ddot{O}$ marque la limite de notion classique de la particule en mouvement sous l'influence d'un potentiel V. Elle contrôle la décroissance da la fonction propre au niveau d'énergie E vérifiant $E < \inf \sigma_{ess}(H)$.

Le principe de ce travail est de monter le théorème (4.1.1) qui sera énoncer ultérieurement et ce travail constitué des chapitres suivants :

Le premier chapitre est un rappel de notions de bases introduites dans ce travail. Dans le deuxième chapitre on pose le problème, en introduisant les hypothèses. Dans le chapitre trois on définit la caustique et l'extension de la solution $B.K.W$. Dans le chapitre quatre on donne la conclusion et les perspectives

Chapitre 2

Préliminaire

Nous rappelons dans cette partie des notions et résultats que nous avons utilisé dans ce mémoire

2.1 Estimations d'Agmon et opérateur de Schrödinger à deux corps

L'étude systématique de la décroissance des fonctions propres pour des opérateurs aux dérivées partielles du second ordre, correspondantes aux valeurs du spectre essentiel, a été fondée par Agmon. Le rôle clé est donné par la métrique d'Agmon sur $\mathbb{R}^n$. Cette pseudo-métrique Riemannienne a été construite directement à partir du potentiel et de l'énergie. La fonction distance correspondante à la métrique d'Agmon mesure comment le potentiel contrôle la décroissance.

Définition 2.1.1 *Soit V une fonction à valeurs réelles bornée sur $\mathbb{R}^n$, et soit $E \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\xi, \eta \in T_x(\mathbb{R}^n) \sim \mathbb{R}^n$, l'espace tangent de $\mathbb{R}^n$ en x, on définit un produit non dégénéré sur $T_x(\mathbb{R}^n)$ par*

$$\langle \xi, \eta \rangle = (V(x) - E)_+ \langle \xi, \eta \rangle_E \tag{2.1.1}$$

où $\langle ., . \rangle_E$ est le produit Euclidien interne usuel et $f(x)_+ = \max\{f(x), 0\}$. La pseudo-métrique correspondante est appelée la métrique d'Agmon liée par le potentiel V à l'énergie E.

Il est important de noter que la métrique d'Agmon dépend du potentiel V et de l'énergie E. La métrique d'Agmon sur $\mathbb{R}^n$ est dégénérée parce qu'il peut exister des surfaces tournantes non vides $\{x \in \mathbb{R}^n / V(x) = E\}$, et des régions classiquement interdites $\{x \in \mathbb{R}^n / V(x) > E\}$. Ces ensembles jouent un rôle très important dans cette théorie. La surface tournante marque la limite de notion classique de la particule en mouvement sous l'influence d'un potentiel V, telle que la particule ne peut pas passer dans la région classiquement interdite. Par conséquent , la fonction d'onde en mécanique quantique est petite dans la région classiquement interdite. On utilise la structure donnée dans la définition pour construire une fonction distance (ou une métrique) sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ une courbe différentiable sur $\mathbb{R}^n$. La dérivée $\dot{\gamma}(t)$ appartient à l'espace tangent au point $\gamma(t)$. Pour toute métrique Riemanienne g sur une variété de $\mathbb{R}^n$, la longueur de γ est donnée par l'intégrale

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}\, dt \tag{2.1.2}$$

où $\|\xi\|_x = \langle \xi, \xi \rangle_x^{1/2}$, pour $\xi \in T_x(\mathbb{R}^n)$. Dans la structure d'Agmon (2.1.1), la longueur de la courbe γ (2.1.2) est

$$L_A(\gamma) = \int_0^1 (V(\gamma(t)) - E)_+^{\frac{1}{2}} \|\dot{\gamma}(t)\|_E\, dt \tag{2.1.3}$$

où $\|.\|_E$ est la norme Euclidienne usuelle. Une courbe γ est une géodésique si elle minimise la fonctionnelle d'énergie.

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}^2\, dt \tag{2.1.4}$$

Définition 2.1.2 *Soient V un potentiel réel borné et soit E l'énergie, la distance entre $x, y \in \mathbb{R}^n$ dans la métrique d'Agmon est*

$$\rho_E(x,y) = \inf_{\gamma \in P_{x,y}} L_A(\gamma) \tag{2.1.5}$$

où

$$P_{x,y} \equiv \{\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n / \ \gamma(0) = x, \gamma(1) = y, \ \gamma \in \mathcal{AC}\,[0,1]\}$$

Définition 2.1.3 *L'ensemble $\mathcal{AC}\,[0,1]$ est l'espace des fonctions absolument continues sur $[0,1]$. La distance entre $x, y \in \mathbb{R}^n$ par la métrique d'Agmon est la longueur du plus court chemin entre x et y. La fonction de distance ρ_E dans (2.1.5) est réduite au facteur BKW* *usuel pour le cas unidimensionnel,*

$$\rho_E(x, y) = \int_x^y (V(s) - E)_+^{\frac{1}{2}} ds \tag{2.1.6}$$

La métrique d'Agmon a plusieurs propriétés, elle satisfait l'inégalité triangulaire, et elle est Lipschitz continue. Le résultat de cette partie est que la métrique d'Agmon au niveau d'énergie E, *contrôle la décroissance de la fonction propre en énergie* E, *présenté par* $E < \inf \sigma_{ess}(H)$.

Théorème 2.1.1 *Soit un niveau d'énergie* $E \in \mathbb{R}$ *et soit* $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\|u\| = 1$ *et vérifiant*

$$P_V u = Eu \tag{2.1.7}$$

alors $\forall \varepsilon > 0$ *et* $\forall \varphi$ *vérifiant*

$$|\nabla_x \varphi|^2 \leq V(x) - E - \varepsilon \tag{2.1.8}$$

sur le Suppφ, *on obtient*

$$\|u\|^2 = \mathcal{O}(e^{-\varphi(x)/h}) \tag{2.1.9}$$

uniformément quand $h \longrightarrow 0_+$

Remarque 2.1.1 *La phase* $\varphi(x)$ *désigne la métrique d'Agmon et* $\varphi(x) \sim (V(x))^{\frac{1}{2}}$ *pour* $\|x\| \to \infty$

2.2 Le probleme de Dirichlet pour le laplacien

Nous expliquons le problème de Dirichlet comme suit , la théorie des fonctions holomorphes permet de résoudre le probleme de Dirichlet : étant donnée une fonction u_0 continue sur le bord du disque unité ouvert D de $\mathbb{C}$, trouver une fonction harmonique u dans D , continue sur $\bar{D}$, valant u_0 sur le bord ∂D . la formulation abrégée de ce problème est alors de trouver u telle que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{dans } D \\ u/_{\partial D} = u_0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

où

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

2.3 Méthode BKW (historique)

La méthode BKW nomée Brillouin, Kramers, et Wentzel est une technique de l'expansion asymptotique pour trouver des solutions approximatives pour certains types de problèmes . La plus connue des applications de cette méthode est l'obtention des solutions de l'équation de Schrödinger, independent du temps en mécanique quantique.
Comme Brillouin, Kramers, et Wentzel ont beaucoup contribué au développement de cette méthode, leur application devient la plus populaire. Certain l'appellent la méthode de Liouville et Green qui avaient fait en 1937 une publication sur cette procédure, cependant le père de cette méthode est peut être l'un de ces cinq hommes, mais aussi Carlini qui a utilisé en 1817 une variation de l'approximation pour étudier les orbites elliptiques du planètes.Cette méthode est appelée WBK, $KXWB$ on Hollande, BKW en France, ou $WBKJ$(pour Jeffrie qui l'a utilisé dans les optiques géométriques et les approximations acoustiques), cette méthode a des applications dans plusieurs disciplines, notamment, sur les équations différentielles linéaires d'ordre quelconque, les problèmes de valeurs propres, les problèmes de valeurs initiales ou valeurs bornées ainsi que pour l'évaluation des intégrales des solutions des équations différentielles.
L'approximation de la solution de l'équation différentielle linéaire a une structure simple aussi si la solution exacte est connue, il s'agit d'une intégrale élémentaire des fonctions algébriques bien définies d'un ordre à un autre en puissance de h, comme les fonctions d'Airy, fonctions de Bessel, et les fonctions paraboliques cylindriques.

2.4 Eléments de théorie des opérateurs

2.4.1 Théorèmes fondamentaux d'analyses spectrale

Lemme 2.4.1 *Soit $(\mathcal{D}_A, A)$ un opérateur autoajoint ,et $(\mathcal{D}_B, B)$ un opérateur tel que $(\mathcal{D}_B, B) \subset (\mathcal{D}_A, A)$.$B$ est $A-$borné si et seulement si il existe $z \in \rho(A)$ tel que $B\mathcal{R}_A(z)$ est un opérateur borné. La borne relative a de B pour A est donnée par*

$$a = \lim_{\lambda \to +\infty} \|B\mathcal{R}_A(\pm i\lambda)\|$$

Théorème 2.4.1 (Kato Rellich) *Soit $(\mathcal{D}_A, A)$ un opérateur auto-adjoint (resp.essentiellement* *auto-adjoint), et* $(\mathcal{D}_B, B)$ *un opérateur* $A-$*borné de borne relative inférieure à 1. Alors* $(\mathcal{D}_A, A+B)$ *est auto-adjoint (resp.essentiellement auto-adjoint)*

Lemme 2.4.2 *Soit* $(\mathcal{D}_A, A)$ *un opérateur fermé et* $(\mathcal{D}_B, B)$ *un opérateur tel que* $(\mathcal{D}_B, B) \subset (\mathcal{D}_A, A)$. B *est* $A-$*compact s'il existe* $z \in \rho(A)$ *tel que* $B\mathcal{R}_A(z)$ *est compact. Si* B *est* $A-$*compact alors* B *est* $A-$*borné de borne relative* 0*, on a alors*

$$B\mathcal{R}_A(i\lambda) = (B\mathcal{R}_A(i))((A+i)\mathcal{R}_A(i\lambda))$$

où le premier opérateur est compact et le second tend vers 0 *quand* $\lambda \to +\infty$.

Remarque 2.4.1 *Le Lemme précédent est une conséquence du Théorème de Kato-Rellich, car pour un opérateur autoadjoint on a*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \|\mathcal{R}_A(z)\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\ z|}$$

Lemme 2.4.3 *Si* $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ *tend vers* 0 *à l'infini , alors* V *est* $-\triangle$*compact*

Théorème 2.4.2 (Théorème de Weyl) *Si* $(\mathcal{D}_A, A)$ *est un opérateur autoadjoint, et* $(\mathcal{D}_B, B)$ *un opérateur symétrique* $A-$*compact, alors* $(\mathcal{D}_A, A+B)$ *est autoadjoint et on a*

$$\sigma_{ess}(A+B) = \sigma_{ess}(A)$$

2.4.2 Théorèmes d'analyses complexes

Définition 2.4.1 *L'espace* $\mathfrak{F}$ *des fonctions entières est l'espace des fonctions* f *qui ont la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall z \in C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n, |\mathrm{Im}\, z| \leq (1-\varepsilon)\,|\mathrm{Re}\, z|\}\,, \forall k \in \mathbb{N} \quad \textit{on ait} \lim_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in C_\varepsilon}} |z|^k\,|f(z)| = 0$$

Définition 2.4.2 *L'espace* $\mathcal{A}$ *des fonctions analytiques dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *est l'espace des fonctions* $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *vérifiant :*

$$\exists f \in \mathfrak{F} \ \textit{tel que}\ \psi(x) = f(x)$$

Théorème 2.4.3 (Extension presque analytique) *[16] Soit $V = V(x)$ une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n$ uniformément bornée ainsi que toutes ses dérivées . Une fonction $\widetilde{V}(x,y)$ sur $\mathbb{R}^{2n}$ est dite extension presque analytique de V si,*

$$\widetilde{V}(x,0) = V(x), \tag{2.4.1}$$

et

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\widetilde{V}(x,y) = \mathcal{O}(|y|^\infty), \tag{2.4.2}$$

quand $|y| \to 0_+$, uniformément par rapport à x.

Remarque 2.4.2 *On peut construire une extension presque analytique en posant,*

$$\widetilde{V}(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{(iy)^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha V(x)\left(1 - \chi\left(\frac{\epsilon_\alpha}{|y|}\right)\right), \tag{2.4.3}$$

où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction de troncature égale à 1 près de 0, et $(\epsilon_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ une suite positive décroissante de nombres positives convergeant vers 0 assez rapidement . Plus précisément, on choisit ε_α telle que, pour tout $\beta \leq \alpha$, on a,

$$|y| \sup |(1 - \chi(\varepsilon_\alpha/|y|))\partial^{\alpha+\beta}V| \leq \alpha!.$$

2.5 Théorie des opérateurs pseudodifférentiels

2.5.1 Introduction aux opérateurs pseudo-différentiels

La notion d'opérateurs pseudo-différentiels généralise la notion d'opérateurs différentiels. Commençons par un exemple très simple : soit l'opérateur différentiel semi-classique donné par :

$$P(x, hD_x) = \sum_{|\alpha|\leq\, m} a_\alpha(x)(hD_x)^\alpha$$

où les coefficients $a_\alpha(x)$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. Si on remplace hD_x par ξ on obtient :

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

qui est appelé symbole de l'opérateur différentiel semi-classique $P(x, hD_x)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier $\mathcal{F}_h$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on représente l'opérateur $P(x, hD_x)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(P(x,hD_x)\varphi)(x) &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)((hD_x)^\alpha\varphi)(x)\\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\mathcal{F}_h^{-1}(\mathcal{F}_h((hD_x)^\alpha\varphi)(x)\\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\mathcal{F}_h^{-1}(\xi^\alpha\mathcal{F}_h(\varphi))(x)\\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\frac{1}{(2\pi h)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi/\hbar}\xi^\alpha\mathcal{F}_h(\varphi)(\xi)d\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi h)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi/\hbar}(\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha)\mathcal{F}_h(\varphi)(\xi)d\xi\end{aligned}$$

On a donc

$$(P(x,hD_x)\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi h)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi/\hbar}p(x,\xi)\mathcal{F}_h(\varphi)(\xi)d\xi$$

Nous notons cette représentation intégrale de l'opérateur différentiel par $(Op_h(p))\varphi(x)$

$$\begin{aligned}(Op_h(p))\varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi h)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi/\hbar}p(x,\xi)\mathcal{F}_h(\varphi)(\xi)d\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi h)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi/\hbar}p(x,\xi)\varphi(y)dyd\xi\end{aligned}$$

Cette représentation nous suggère de généraliser cette notion à d'autres opérateurs que les opérateurs différentiels et de remplacer le symbole $p(x,\xi)$ par un symbole plus général $a(x,\xi)$ qui sera défini ultérieurement pour donner un sens aux opérateurs du type :

$$A\varphi(x) = (Op_h(a))\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi h)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi/\hbar}a(x,\xi)\varphi(y)dyd\xi$$

Il est important pour nous d'étudier l'existence d'un tel opérateur pour cela nous commençons par définir l'espace auxquels doit appartenir le symbole $a(x,\xi)$, que nous appelons espace de symboles , ce symbole peut également dépendre du paramètre h, et la représentation intégral devient :

$$(Op_h(a))\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi h)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi/\hbar}a(x,\xi;h)\varphi(y)dyd\xi$$

On peut également noter

$$(Op_h(a))\varphi(x;h) = \langle \varphi(y), K_a(x,y;h)\rangle$$

où K_a est le noyau distribution donné par :

$$K_a(x,y;h) = \frac{1}{(2\pi h)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi/\hbar} a(x,\xi;h) d\xi$$

2.5.2 Espaces de Symboles

Nous allons, dans cette partie, nous intéressé particulièrement à la notion des symboles et décrire l'espace auxquels ils doivent appartenir pour que la représentation intégrale ait un sens. Dans ce que nous abordons ici, nous utilisons une définition très simplifiée de symboles.

Définition 2.5.1 *([19]).*

1. *Soit g une fonction réelle définie sur un ensemble E, on note par $\mathcal{O}(g)$ toute fonction f définie sur E telle que*

$$\exists C > 0, \quad f(x) \leq Cg(x), \quad \forall x \in E.$$

2. *On appelle fonction d'ordre toute fonction $g \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+^*\right)$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$*

$$\partial_x^\alpha g = \mathcal{O}(g)$$

uniformément sur $\mathbb{R}^d$.

Example 1 *La fonction définit par*

$$\begin{array}{rccl} \langle x\rangle^m : & \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \langle x\rangle^m = \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \end{array}$$

où $m \in \mathbb{R}$, est une fonction d'ordre.

On définit l'espace semi-classique des symboles par

Définition 2.5.2 *([19])*

1. *Soit g une fonction d'ordre, on appelle espace de symboles et on note $S_d(g)$ l'espace des fonctions $a = a(x;h)$ définie sur $\mathbb{R}^d \times (0, h_0[$ pour $h_0 > 0$ indéfiniment dérivable par rapport à x tel que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$*

$$\partial_x^\alpha a(x;h) = \mathcal{O}(g(x))$$

uniformément sur $\mathbb{R}^d \times (0, h_0[$

2. *On appelle un symbole classique toute fonction $a = a(x;h)$ de $S_d(g)$ définie sur $\mathbb{R}^d \times (0, h_0[$ ($h_0 > 0$) pour la quel il existe une suite $(a_j)_{j\geq 0}$ telle que*

$$a \sim \sum_{j\geq 0} a_j(x) h^j$$

On note $S_d^{cl}(g)$ l'ensemble des symboles classiques.

Remarque 2.5.1 *Si $a_1 \in S_d(\langle x\rangle^{m_1})$ et $a_2 \in S_d(\langle x\rangle^{m_2})$ alors $a_1.a_2 \in S_d\left(\langle x\rangle^{m_1+m_2}\right)$*

L'ellipticité des symboles étant importante, on la définit par

Définition 2.5.3 *([19]) Un symbole $a \in S_d(g)$ est dit elliptique s'il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$|a(x,h)| \geq \frac{1}{C} g(x)$$

$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^d \times (0, h_0[$ *avec* $h_0 > 0$.

On a également le résultat suivant

Proposition 2.5.1 *([19])Si $a \in S_d(g)$ et est elliptique alors : $\frac{1}{a} \in S_d\left(\frac{1}{g}\right)$*

Le Développpement asymptotique semi-classique des symboles jouant un rôle important dans l'analyse des symboles, il est introduit dans ce qui suit :

2.5.3 Développement semi-classique des symboles

Définition 2.5.4 *([19]) Soient $a \in S_d(g)$ et $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de symboles dans $S_d(g)$ .On dit que a est asymptotiquement équivalent à la série formelle $\sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j$ dans $S_d(g)$ et on note*

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j$$

si et seulement si pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe $h_{N,\alpha} > 0$ et $C_{N,\alpha} > 0$ tel que

$$\left|\partial^\alpha \left(a - \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j\right)\right| \leq C_{N,\alpha} h_{N,\alpha}^N g \tag{2.5.1}$$

uniformément sur $\mathbb{R}^d \times (0, h_{N,\alpha}[$. En particulier quand tout les a_j sont identiquement nuls on dira que $a = \mathcal{O}(h^\infty)$ dans $S_d(g)$.

Proposition 2.5.2 *([19]). Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de symboles dans $S_d(g)$ alors il existe $a \in S_d(g)$ tel que $a \sim \sum\limits_{j=0}^{\infty} h^j a_j$ dans $S_d(g)$, on l'appelle une resommation de ($\sum\limits_{j=0}^{\infty} h^j a_j$). a est unique modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ dans le sens ou la différence entre deux symboles est $\mathcal{O}(h^\infty)$ dans $S_d(g)$.*

2.5.4 Opérateurs pseudo-différentiels

Les opérateurs pseudo-différentiels sont un outil puissant qui nous permet de passer de la théorie des opérateurs à celles des symboles, notamment d'inverser des opérateurs elliptiques. Leur construction passe par les intégrales oscillantes, pour plus de détail voir [19] .

Définition 2.5.5 *([19]) Soit $a = a(x, y, \xi; h) \in S_{3n}(\langle\xi\rangle^m)$, pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur $Op_h(a)$ de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n)$ défini par*

$$\forall (x; h) \in \mathbb{R}^d \times (0, h_0], \qquad Op_h(a) u(x; h) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\zeta/h} a(x, y, \xi; h) u(y) \, dy d\xi \tag{2.5.2}$$

est appelé opérateur pseudo-différentiel semi-classique de symbole a.

Nous illustrons ce résultat par l'exemple suivant

Example 2 *L' opérateur différentiel semi-classique $P(x, hD)$ vérifiant*

$$P(x, hD) = \sum_{|\alpha| \leq \ m} b_\alpha(x)(hD_x)^\alpha$$

avec $b_\alpha \in S_{2n}(1)$, est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $\sum\limits_{|\alpha|\leq \ m} b_\alpha(x)\xi^a$.

L'opérateur pseudo-différentiel $Op_h(a)$ est bien défini au sens des intégrales oscillantes, $\forall m \in \mathbb{R}$ et on a le théorème suivant :

Théorème 2.5.1 *([19]) Pour tout* $a = a(x, y, \xi; h) \in S_{3n}(\langle\xi\rangle^m)$,

1. $Op_h(a)$ *est un opérateur linéaire continu de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
2. *L'opérateur* $Op_h(a)$ *se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *où* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *l'espace des distributions tempérés*
3. *Si* $a \in S_{3n}(1)$ *alors* $Op_h(a)$ *est borné de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$. *(Théorème de Caldéron Vaillancourt).*

Il important pour nous de rappeler la définition de microsupport et de la caractéristique

Définition 2.5.6 (microsupport) *Soit* u_h *une (famille de) distributions de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *On dit que* $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *n'est pas dans le microsupport de* u_h, *lorsqu'il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* (x_0, ξ_0), *et deux réels* $\delta > 0$ *et* $h_0 > 0$ *tels que*

$$\forall h \in]0, h_0], \forall (x, \xi) \in \mathcal{V}, T(u_h)(x, \xi, h) = \mathcal{O}(e^{-\delta/h})$$

ou T la transformation FBI (Fourier-Bros-Iagolnitzer)
Le complémentaire de tels points est appelé le microsupport de u_h, il est noté $MS(u_h)$. C'est un fermé de $\mathbb{R}^{2n}$

Définition 2.5.7 (Caractéristique) *On appelle ensemble caractéristique de* $P = Op_h(p)$ *où* $p \in S_{2n}(\langle\xi\rangle^m)$, *et on note* $Char(P)$ *l'hypersurface* $p_0^{-1}(0)$ *de* $\mathbb{R}^{2n}$, *que l'on définit également par*

$$Char(P) = \left\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : p_0(x, \xi) = 0\right\}$$

où p_0 *est le symbole principal de* P.

La proposition suivante décrit la relation entre le microsupport et la caractéristique

Proposition 2.5.3 *Soit* $u = (u_h) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ *avec* $\| u_h \|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1$.
si $Op_h(p)u = 0$ *avec* $p \in S_{2n}(\langle\xi\rangle^m)$ *alors* $MS(u) \subset Char(Op_h(p))$

Chapitre 3

Position du Problème Pour un potentiel non globalement analytique

3.1 Position du problème et Hypothèses

On se propose d'étudier l'opérateur de Schrödinger P dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$P = -h^2\Delta + V(x),$$

Nous précisons les hypothèses suivantes sur le potentiel $V(x)$

$H1$ hypothèse générale sur V

1. $V \in C^\infty$ a valeur réel et analytique à l'infini sur $K_0^c = \mathbb{R}^n \setminus K_0$ ou K_0 est un compact de $\mathbb{R}^n$

2. V se prolonge holomorphiquement dans le secteur

$$D_0 = \{x \in \mathbb{C}^n : |\mathrm{Im}\, x| < \sigma_0 \, |\mathrm{Re}\, x| \, , \mathrm{Re}\, x \in K_0^c\} \quad \text{ou} \quad \sigma_0 > 0$$

3. $V(x) \to 0 \qquad$ lorsque $\qquad |\mathrm{Re}\, x| \to \infty.$

   L'objectif de l'hypothèse $H1$ est de définir les résonances prés de l'axe réel comme des valeurs propres complexes de l'opérateur distordu de P que l'on note $P_\theta = \tilde{P}_{i\theta}$ pour θ suffisamment petit et pour ν un réel assez petit $\tilde{P}_v = U_v P \; U_{-v}$ ou U_v la distorsion défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$U_v(\phi(x)) = \det(1 + v dF(x))^{\frac{1}{2}} \phi(x + vF(x))$$

Tel que $\left\{ \begin{array}{ll} F(x) = 0 & x \in K_0 \\ F(x) = x & x \in K_0^C \end{array} \right.$

Lemme 3.1.1 *soit $v \in \mathbb{R}$ assez petit, U_v est un opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$*

Preuve. On a

$$U_v \text{ est unitaire} \Leftrightarrow U_v U_v^* = U_v^* U_v = I_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\begin{aligned} U_v(\phi(x)) &= \det(1 + vdF(x))^{\frac{1}{2}} \phi(x + vF(x)) \\ &= \det(d(x + vF(x)))^{\frac{1}{2}} \phi(x + vF(x)) \\ &= (\det d\Phi_v(x))^{\frac{1}{2}} \phi(\Phi_v(x)) \end{aligned}$$

telque

$$\begin{aligned} \Phi_v(x) &= x + vF(x) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} x & x \in k_0 \\ (1+v)x & x \in k_0^C \end{array} \right. \end{aligned}$$

a) soit $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \langle U_v f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} U_v(f(x)) \overline{g(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\det d\Phi_v(x)|^{\frac{1}{2}} f(\Phi_v(x)) \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

$$\Phi_v(x) = y \Leftrightarrow x = \Phi_v^{-1}(y), \text{d'ou } dx = \left|\det d\Phi_v^{-1}(y)\right| dy$$

Car Φ_v est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n$.

donc :

$$\langle U_v f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\det d\Phi_v(\Phi_v^{-1}(y))\right|^{\frac{1}{2}} f(y) \overline{g(\Phi_\nu^{-1}(y))} \left|\det d\Phi_v^{-1}(y)\right| dy$$

puisque $\Phi_v(\Phi_v^{-1}(y)) = y$ alors $d\ \Phi_v(\Phi_v^{-1}(y)) = 1$

d'ou :

$$d\Phi_v(\Phi_v^{-1}(y)).d\Phi_v^{-1}(y) = 1$$

d'où on a

$$\det d\Phi_v(\Phi_v^{-1}(y)).\ \det\left[d\Phi_v^{-1}(y)\right] = 1 \tag{3.1.1}$$

$$
\begin{aligned}
\langle U_v f, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\det d\Phi_v^{-1}(y)\right|^{\frac{-1}{2}} f(y)\overline{g(\Phi_v^{-1}(y))}\left|\det d\Phi_v^{-1}(y)\right| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\det d\Phi_v^{-1}(y)\right|^{\frac{1}{2}} f(y)\overline{g(\Phi_\nu^{-1}(y))}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{|\det d\Phi_v^{-1}(y)|^{\frac{1}{2}} g(\Phi_v^{-1}(y))}dy \\
&= \langle f, U_v^* g\rangle
\end{aligned}
$$

on a donc

$$U_\nu^* g(y) = \left|\det d\Phi_\nu^{-1}(y)\right|^{\frac{1}{2}} g(\Phi_\nu^{-1}(y))$$

b) Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$
\begin{aligned}
U_v U_v^*(f)(x) &= U_v\left[U_v^*(f)\right](x) \\
&= \left|\det d\Phi_v(x)\right|^{\frac{1}{2}}\left[U_v^*(f)\right](\Phi_v(x)) \\
&= \left|\det d\Phi_v(x)\right|^{\frac{1}{2}}\left|\det d\Phi_v^{-1}(\Phi_v(x))\right|^{\frac{1}{2}} f(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

car d'aprés 3.1.1 on a

$$\left|\det d\Phi_v(x)\right|^{\frac{1}{2}}\left|\det d\Phi_v^{-1}(\Phi_v(x))\right|^{\frac{1}{2}} = \left|\det d\Phi_v(x)\det d\Phi_v^{-1}(\Phi_v(x))\right|^{\frac{1}{2}} = 1$$

d'autre part pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$
\begin{aligned}
U_v^* U_v(f)(y) &= U_v^*\left[U_v(f)\right](y) \\
&= \left|\det d\Phi_v^{-1}(y)\right|^{\frac{1}{2}}\left[U_v(f)\right](\Phi_v^{-1}(y)) \\
&= \left|\det d\Phi_v^{-1}(y)\right|^{\frac{1}{2}}\left|\det d\Phi_v(\Phi_v^{-1}(y))\right|^{\frac{1}{2}} f(\Phi_v(\Phi_v^{-1}(y)) \\
&= \left|\det d\Phi_v^{-1}(y)\right|^{\frac{1}{2}}\left|\det d\Phi_v(x)\right|^{\frac{1}{2}} f(y) \\
&= f(y)
\end{aligned}
$$

Car

$$\left|\det d\Phi_v^{-1}(y)\right|^{\frac{1}{2}}.\left|\det d\Phi_v(x)\right|^{\frac{1}{2}} = \left|\det d\Phi_v^{-1}(y).\det d\Phi_v(x)\right|^{\frac{1}{2}} = 1$$

et

$$x = \Phi_v^{-1}(y)$$

On en déduit que $U_v U_v^* = U_v^* U_v = I_{L^2((\mathbb{R}^n)}$ c'est à dire que U_v est unitaire. $\square$

3.1.1 Le caractère auto-adjoint de l'opérateur

Une des premières questions à traiter lors de l'étude spectrale d'un opérateur est celle du caractère auto-adjoint, ou à défaut du caractère essentiellement auto-adjoint. Rappelons que un opérateur linéaire A est essentiellement auto-adjoint si son unique fermeture $\overline{A}$ est auto-adjointe, quel est l' intérêt du caractère auto-adjoint. Il ya au moins deux bonnes raisons d'en parler

1. Si A est auto-adjoint on a déjà une première information spectrale importante :le spectre de l'opérateur A est une partie de $\mathbb{R}$.
2. le caractère auto-adjoint assure en mécanique quantique l'unicité de la solution de

l équation de Schrödinger
De plus l'hypothèse $H1-3$ nous donne

Proposition 3.1.1 *L'opérateur* $P(h) = -h^2\triangle + V$ *est essentiellement auto-adjoint de domaine* $H^2(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n), \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$

Preuve. $P_0(h) = -h^2\Delta$ est essentiellement auto-adjoint de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$ avec $\sigma_{ac}(-\Delta) = [0, +\infty[$
D'aprés l'hypothèse $H1-3, V \to 0$ a l'infini alors V est $(-\Delta)$ compact (lemme **2.3.2**) ce qui entraîne que V est $\Delta-$borné de borne relative inférieur à 1(lemme **2.3.1**) d'aprés théoréme de Kato-Rellich $(H^2(\mathbb{R}^n), P)$ est essentiellement auto-adjoint. □
Le théoreme de Weyl permet d'afirmer que le spectre essentiel de P_θ est

$$\sigma_{ess}(P_\theta) = e^{-2i\theta}\mathbb{R}^+ = (1+i\theta)^{-2}\mathbb{R}^+$$

Le spectre de P_θ est discret dans le secteur

$$S_\theta = \{E \in \mathbb{C} \ : -2\theta < \arg E < 0\}$$

Les éléments de $\sigma(P_\theta) \cap S_\theta$ sont appelés les resonances
En outre si u_θ est une fonction propre de P_θ, il existe alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ holomorphique dans D_0 telle que $u_\theta = U_{i\theta}u$ (voir [11]) de telles fonctions u sont appelés les états résonants de P
La deuxième hypothèse décrit la forme de potentiel dans l'île

$H2$

Il existe un ouvert borné $\ddot{O} \in \mathbb{R}^n$, un point x_0 et un nombre E_0 vérifie

$$V(x_0) = E_0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial x}(x_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_0) > 0$$

Et

$$V(x) > E_0 \text{ dans } \ddot{O} \diagup \{x_0\} \ \ , \ V(x) = E_0 \text{ sur } \partial\ddot{O}$$

Nous introduisons la distance Agmon d associer à la pseudo-métrique $d\,s^2 = \max(V(x), 0)\,dx^2$, et la réalisation Dirichlet P_D de l'opérateur P sur le domaine $\overline{B_d(x_0, S-\eta)}$ pour η suffisamment petit ou $S = d\left(x_0, \partial\ddot{O}\right)$ la distance minimum de x_0 au bord de l'ile $\ddot{O}$ et $B_d(x_0, S) = \{x;\ d(x, x_0) < S\}$ la boule ouverte de centre x_0 et rayon S .

On a alors le résultat suivant est due a Helffer et Sjostrand

Théorème 3.1.1 (Helffer-Sjostrand) *Soit $\lambda_D(h)$ la première valeur propre de P_D. Alors $\lambda_D(h)$ a un développement asymptotique classique complet par rapport à h :*

$$\lambda_D(h) = E_0 + E_1 h + E_2 h^2 + \cdots , \tag{3.1.2}$$

où

$$E_1 = \operatorname{tr}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_0)}$$

est la première valeur propre correspondante à l'oscillateur harmonique $-\Delta + \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_0)x, x\right\rangle$. De plus au voisinage $\mathcal{W}$ de x_0 , $u_D(x,h)$ peut s'écrire sous la forme B.K.W :

$$u_D(x,h) = h^{-\frac{n}{4}} a(x,h)\, e^{-d(x_0,h)/h} \tag{3.1.3}$$

Ou a est la réalisation de symbole classique

$$a(x,h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)\, h^j \ , \qquad\qquad a_0(0) > 0 \tag{3.1.4}$$

Au déssus de la mer $\ddot{O}^c$, d'autre part on supposera la condition de *non-trapping* : que nous traduisons par l'hypothèse

$H3$

La troisième hypothèse concerne la condition de non trapping (non capture prés d'un niveau energie E)

Nous supposerons qu'il ya pas de trajectoires captées au dessus de la mer $\ddot{O}^c$ pour le niveau d'énergie E_0. dans le sens suivant

E_0 est un niveau d'énergie non trapping sur $\ddot{O}^c$ si et seulement si

$$K_0 = \left\{(x,\xi) \in p^{-1}(E_0)/\ x\ \in \ddot{O}^c,\ |\exp tH_P(x,\xi)| \nrightarrow \infty \text{ quand } |t| \longrightarrow \infty\right\} = \emptyset$$

ie Pour toute $(x,\xi) \in p^{-1}(E_0)$ avec $x \in \ddot{O}^c$, la quantité $|\exp tH_P(x,\xi)|$ tend vers infini lorsque $|t| \to \infty$

où

$$H_P = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) = 2\xi.\frac{\partial}{\partial x} - \partial_x V(x).\frac{\partial}{\partial \xi}$$

est le champ hamiltonien de $p(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$. en particulier dans le bord de $\ddot{O}$, le seul $\xi \in \mathbb{R}^n$ vérifie $p(x,\xi) = E_0$ est le 0 en effet

$$P(x,\xi) = E_0$$

d'ou

$$\xi^2 + V(x) = E_0$$

donc

$$\xi^2 + E_0 = E_0$$

alors

$$\xi^2 = 0$$

ceci implique que

$$\xi = 0$$

et $H_p = -\nabla V(x).\frac{\partial}{\partial \xi}$ donc $H3$ implique aussi $\nabla V(x) \neq 0$.

L'objectif de cette hypothèse est de déterminer le domaine ou les résonances n'existent pas

Sous les conditions $(H1), (H2), (H3)$, on a le théorème suivant

Théorème 3.1.2 *On suppose* $(H1)-(H3)$ *alors il existe une unique résonance* $\rho(h)$ *de* P *tel que*

$$h^{-1}|\rho(h)-\lambda_D(h)| \to 0 \quad \textit{lorsque } h \to 0$$

Et verifie

$$|\lambda_D(h)-\rho(h)| = \mathcal{O}\left(e^{-(2S-\epsilon(\eta))/h}\right) \tag{3.1.5}$$

En notant par $u(x,h)$ *l'état résonant correspondent , on a*

$$|u_D(x,h)-u(x,h)| = \mathcal{O}\left(e^{-(2S-d(x_0,x)-\epsilon(\eta))/h}\right). \tag{3.1.6}$$

uniformement dans $\overline{B_d(x_0,S-\eta)}$ *ou* $\epsilon(\eta) \to 0$ *lorsque* $\eta \to 0$, *et pour tout compact* $K \subset \mathbb{R}^n$ *, il existe* $N_K \in \mathbb{N}$ *telle que*

$$\left\|e^{s(x)/h}u(x,h)\right\|_{H^1(K)} = \mathcal{O}\left(h^{-N_k}\right) \tag{3.1.7}$$

uniformement lorsque $h \to 0$ *, où* $\begin{cases} s(x) = d(x_0,x) & \textit{si } x \in B_d(x_0,S) \\ s(x) = S & \textit{ailleurs} \end{cases}$

On définit l'espace de sobolev $H^1(k)$ comme suit

Définition 3.1.1 *l'espace de sobolev* $H^1(k)$ *est définit par*

$$H^1(k) = \left\{u \in L^2(k) \textit{ tel que } \forall i \in [1,n] \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(k)\right\}.$$

Il s'agit bien d'un espaces de Hilbert .Sa norme est notée $\|.\|_{H^1}$
tel que

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{(u,u)_{H^1}}$$

ou $(.,.)_{H^1}$ est le produit scalaire dans $H^1(k)$

$H4$

Finalement on suppose quelque conditions concernant l'ensemble $\partial\ddot{O} \cap \overline{B_d(x_0,S)}$ et l'ensemble caustique $\mathcal{C}$ définie par

$$\mathcal{C} = \overline{\left\{x \in \ddot{O} : d(x_0,x) = d\left(x,\partial\ddot{O}\right) + d\left(x_0,\partial\ddot{O}\right)\right\}}$$

Les points de l'ensemble $\partial\ddot{O} \cap \overline{B_d(x_0,S)}$ sont appelle point de type 1 (voir[12])

Notre condition supplémentaire est

$\partial\ddot{O} \cap \overline{B_d(x_0, S)}$ est la sous variété Γ de $\partial\ddot{O}$ et $\mathcal{C}$ a un contact d'ordre 2 exactement avec $\partial\ddot{O}$ sur Γ .On note par n_Γ $(\leq n-1)$ la dimension de Γ

Sous les conditions $H1 - H4$ on a le théorème suivant

Théorème 3.1.3 *sous les hypothèses $H1 - H4$ il éxiste un symbole classique*

$$f(x) = \sum_{j\geq 0} h^j f_j \tag{3.1.8}$$

avec $f_0 > 0$ tel que

$$\operatorname{Im} \rho(h) = -h^{(1-n_\Gamma)/2} f(h) e^{-2S/h} \tag{3.1.9}$$

Chapitre 4

Extension de la solution BKW

L'objectif de cette section est de prolonger la solution BKW au voisinage d'un point x^1 de type 1 ($x^1 \in \Gamma$).
La solution BKW au voisinage de point x_0 a été obtenue on approximant l'opérateur P par l'opérateur de Dirichlet P_D sur la boule $\overline{B_d\left(x_0, S-\eta\right)}$

4.1 prolongement de la solution de puits à la caustique

Nous commençons par énoncer le théorème principale suivant

Théorème 4.1.1 *Sous les hypothèses* $H1 - H4$

L'opérateur P admet (**théorème** 3.1.1) une solution BKW de la forme

$$\omega \approx h^{\frac{-n}{4}} a\left(x, h\right) e^{-d(x_0, x)/h}$$

Ce développement BKW se prolonge le long des géodésiques minimales incluse dans $\ddot{O}$ jusqu'à l'ensemble caustique $\mathcal{C}$ où

$$\mathcal{C} = \overline{\left\{x \in \ddot{O} : d\left(x_0, x\right) = d\left(x, \partial\ddot{O}\right) + d\left(x_0, \partial\ddot{O}\right)\right\}}$$

Pour la preuve de ce théorème nous devons énoncer certains propositions et lemmes pour cela.
Soit d'abord Λ la variété lagrangienne sortante définie par $\Lambda = \left\{\left(x, \nabla\phi\left(x\right)\right) : x \in \Omega\right\}$ où $\phi(x) = d\left(x_0, x\right) - S$.

Λ est associe au champ hamiltonien H_q en point $(x_0, 0)$ (puits) où $H_q = 2\xi.\frac{\partial}{\partial x} + \partial_x V(x).\frac{\partial}{\partial \xi}$ et q la caractéristique définie par $q(x,\xi) = \xi^2 - V(x)$.

Soit $\widetilde{\gamma}(t) = \left(\widetilde{x}(t), \widetilde{\xi}(t)\right)$ une bicaractéristique de H_q commencant en $\widetilde{\gamma}(0) = \left(\widetilde{x}(0), \widetilde{\xi}(0)\right) = (x^1, 0)$ et vérifiant $\widetilde{\gamma}(-\infty) = (x_0, 0)$.

La projection $\Pi_x \gamma$ est l'unique géodésique minimale de x_0 à x^1 dans $\ddot{O} \cup \{x^1\}$, ce qui fait de ϕ une fonction C^∞ au voisinage Ω de $\tilde{x}([-\infty, 0))$ et Λ de dimension n

de plus nous avons la proposition suivante

Proposition 4.1.1 *La variété lagrangienne Λ vérifie*

1. Λ est H_q invariante
2. $\widetilde{\gamma}([-\infty, 0[) \subset \Lambda$
3. Λ peut être prolonger par le flot de H_q à La variété lagrangienne $\tilde{\Lambda}$ et $\widetilde{\gamma}([-\infty, 0]) \subset \tilde{\Lambda}$ pour simplifier la notation on désigne par Λ pour le prolongement de Λ
4. La projection $\Pi \begin{cases} \Lambda \to \mathbb{R}^n_x \\ (x, \nabla\phi(x)) \to x \end{cases}$ est singulière en $\widetilde{\gamma}(0) = (x^1, 0)$

Preuve. les propriétés 1 et 2 découlent de la construction de Λ

la troisième propriété découle du fait que H_q ne s'annule pas en $\widetilde{\gamma}(-\infty) = (x_0, 0)$ et la condition $H3$

la quatrième propriété est une conséquence de la troisième propriété, rappelons juste que La projection naturelle $\Pi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est à différentielle bijective en tout point $\widetilde{\gamma}(t)$ avec $t < 0$. Puisque $\Pi(\Lambda) \subset \overline{\ddot{O}}$, $d\Pi$ ne peut pas être bijective en $\widetilde{\gamma}(0) = (x^1, 0)$. Par ailleurs $kerd\Pi(x^1, 0)$ contient le vecteur non nul H_q. Dans ([14]), il est montré que

$$rang\left(d\Pi(x^1, 0)\right) = (n-1) \text{ et } (ker\left(d\Pi(x^1, 0)\right) = H_q).$$

□

Nous définissons le lemme suivant qui nous permet de déterminer le potentiel par un changement en cordonnés locales sur le fibré tangent

$$T_{x^1}\partial\ddot{O} : \begin{cases} x_n = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \text{ est la normale extérieure de } \ddot{O} \text{ en ce point .} \end{cases}$$

Lemme 4.1.1 *Sous les conditions du théorème précédent près du niveau d'énergie E_0 et du voisinage de x^1 il existe une constante $c_0 > 0$ et une fonction W vérifiant*

$$W(x) = c_0 x_n + V(x) - E_0$$

$$\textit{avec} \qquad W(x) = \mathcal{O}(|x|^2)$$

Preuve. En appliquant le développement de Taylor sur V en x^1

$$\begin{aligned} V(x) &= V(x^1) + (x - x^1)V'(x^1) + \frac{1}{2}(x - x^1)^2 V''(x^1) \\ &= E_0 + ((x' - x'), (x_n - 0))\begin{pmatrix} \frac{\partial V(x^1)}{\partial x'} \\ \frac{\partial V(x^1)}{\partial x_n} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|x|^2) \\ &= E_0 + x_n \frac{\partial V(x^1)}{\partial x_n} + W(x) \quad \text{avec } W(x) = \mathcal{O}(|x|^2) \end{aligned}$$

d'ou

$$W(x) = -x_n \frac{\partial V(x^1)}{\partial x_n} + V(x) - E_0$$

En dehors de l'île au voisinage de $x^1 \in \partial \ddot{O}$ on a $V(x)$ décroissante et $(V(x) < E_0)$ ie $\frac{\partial V(x^1)}{\partial x_n} < 0$ en note $\partial V / \partial x_n = -c_0 \ \ (c_0 > 0)$

Donc

$$W(x) = c_0 x_n + V(x) - E_0 \quad \text{ou} \ \ c_0 > 0 \text{ et } W(x) = O(|x|^2)$$

□

Nous énonçons le lemme (4.1.2) qui dèfinira la variété Lagrangienne sortante Λ

Lemme 4.1.2 *au voisinage du point $\tilde{\gamma}(0)$ il existe une fonction $g(x', \xi_n) \in C^\infty$ vérifiant $g(0) = 0$ et $dg(0) = 0$ tel que*

$$\Lambda = \left\{ (x, \xi) : \xi' = \frac{\partial g}{\partial x'}(x', \xi_n) \ , x_n = -\frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x', \xi_n) \right\}$$

Preuve. Supposons qu'une telle fonction existe elle devrait vérifie

$$\xi' = \frac{\partial g}{\partial x'}(x', \xi_n), \ x_n = -\frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x', \xi_n)$$

Comme l'équation caracteristique vérifie

$$q(x, \xi) + E_0 = 0 \text{ ie } \ |\xi|^2 - (V(x) - E_0) = 0$$

en utilisant le lemme (4.1.1) on obtient donc

$$|\xi'|^2 + |\xi_n|^2 - (-C_0 x_n + W(x)) = 0$$

d'ou

$$(\frac{\partial g}{\partial x'}(x', \xi_n))^2 + \xi_n^2 - C_0 \frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x', \xi_n) - W(x', x_n) = 0$$

alors

$$(\frac{\partial g}{\partial x'}(x', \xi_n))^2 + \xi_n^2 - C_0 \frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x', \xi_n) - W(x', -\frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x', \zeta_n)) = 0 \tag{4.1.1}$$

Dérivons maintenant (**??**) par rapport à ξ_n on obtient

$$2\frac{\partial g}{\partial x'}\frac{\partial^2 g(x', \xi_n)}{\partial \xi_n \partial x'} + 2\xi_n - C_0 \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2}(x', \xi_n) + W(x', -\frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x', \zeta_n))\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2} = 0$$

donc

$$C_0 \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2} = 2\xi_n + 2\frac{\partial g}{\partial x'}\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n \partial x'} + W(x', -\frac{\partial g}{\partial \xi_n})\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2}$$

d'ou

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2} = \frac{2}{C_0}\xi_n + \mathcal{O}(|(x', \xi_n)|^2) \tag{4.1.2}$$

et

$$\frac{\partial^3 g}{\partial \xi_n^3} = \frac{2}{C_0} + \mathcal{O}(|(x', \xi_n)|) \tag{4.1.3}$$

Π devient singuliere sur l'hypersurface $H \subset \Pi$ et le point critique ξ_n^c vérifie

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2}(x', \xi_n^c(x')) = 0$$

d'ou

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2} = \frac{2}{C_0}\xi_n + \mathcal{O}(|x', \xi_n|^2) = 0$$

donc par le théorème des fonctions implicites $\xi_n = \xi_n^c(x') = \mathcal{O}(\left|x'\right|^2)$

Dans un voisinage de $\widetilde{\gamma}\,([-\varepsilon_0, 0[)$ on peut representer ϕ par la formule

$$\phi\,(x) = V.C_{\xi_n}(x_n \xi_n + g\,(x', \xi_n))$$

par le développement de Taylor de g en $\xi_n^c(x')$ on trouve que

$$\begin{aligned} g(x',\xi_n) &= g(x',\xi_n^c(x')) + (\xi_n - \xi_n^c(x'))\frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x',\xi_n^c(x')) + \\ & \frac{1}{2!}(\xi_n - \xi_n^c(x'))^2\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2}(x',\xi_n^c(x')) + \\ & \frac{1}{3!}(\xi_n - \xi_n^c(x'))^3\frac{\partial^3 g}{\partial \xi_n^3}(x',\xi_n^c(x')) \end{aligned}$$

puisque $\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2}(x',\xi_n^c(x')) = 0$ donc

$$\begin{aligned} g(x',\xi_n) &= g(x',\xi_n^c(x')) + (\xi_n - \xi_n^c(x'))\frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x',\xi_n^c(x')) + \frac{1}{3!}(\xi_n - \xi_n^c(x'))^3\frac{\partial^3 g}{\partial \xi_n^3}(x',\xi_n^c(x')) \\ &= a(x') + b(x')(\xi_n - \xi_n^c(x')) + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 g}{\partial \xi_n^3}(x',\xi_n^c(x'))(\xi_n - \xi_n^c(x'))^3 \end{aligned}$$

tel que

$$a(x') = g(x',\xi_n^c(x')) \quad \text{et} \quad b(x\prime) = \frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x',\xi_n^c(x'))$$

on substitue 4.1.3 alors

$$\begin{aligned} g(x',\xi_n) &= a(x') + b(x')(\xi_n - \xi_n^c(x')) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{C_0} + \mathcal{O}(|x',\zeta_n|)\right)(\xi_n - \xi_n^c(x'))^3 \\ &= a(x') + b(x')(\xi_n - \xi_n^c(x')) + \frac{1}{3}\mathcal{V}_0(x',\xi_n)(\xi_n - \xi_n^c(x'))^3 \qquad (4.1.4) \\ \text{avec} \quad \mathcal{V}_0 &= \frac{1}{C_0} + O(|x',\xi_n|) = \frac{1}{C_0} + \mathcal{O}(|x'| + |\xi_n|) \end{aligned}$$

Dérivons (4.1.4) par rapport a ξ_n on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x',\xi_n) &= b(x') + \mathcal{V}_0(x',\xi_n)(\xi_n - \xi_n^c(x'))^2 + \frac{1}{3}\frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial \xi_n}(x',\xi_n)(\xi_n - \xi_n^c(x'))^3 \\ \frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x',\xi_n) &= b(x') + (\xi_n - \xi_n^c(x'))^2\left[\mathcal{V}_0(x',\xi_n) + \frac{1}{3}\frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial \xi_n}(x',\xi_n)(\xi_n - \xi_n^c(x'))^2\right] \\ \frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x',\xi_n) &= b(x') + \mathcal{V}_1(x',\xi_n)(\xi_n - \xi_n^c(x'))^2 \\ \text{tel que} \quad \mathcal{V}_1 &= \mathcal{V}_0 + \mathcal{O}(|\xi_n - \xi_n^c(x')|) \end{aligned}$$

$\square$

Pour terminer la preuve de théorème utilisons les résultats des lemmes (4.1.1) et (4.1.2).

Au voisinage de la caustique sachant il n'ya pas de régularité (car la phase ϕ s'annule prés de $(x^1, 0)$) et la caustique $\mathcal{C}$ est déterminer par

$$\mathcal{C} = \{x \ / \ x_n + b\,(x') = 0\}$$

alors il existe une constante positive c vérifiant

$$\phi\,(x)|_{\mathcal{C}} \geq c\,(V\,(x) - E_0) \tag{4.1.5}$$

utilisant le fait que

$$V|_{\mathcal{C}} \geq 0 \text{ et } \nabla\,(V|_{\mathcal{C}}) = \mathcal{O}\left(\sqrt{V|_C}\right)$$

et le fait que l'on ait les hypothèses $(H3)$ et $(H4)$ montre que $\phi\,(x)|_{\mathcal{C}} > 0$ et quadratique le long de Γ avec $\phi|_{\Gamma} = 0$.

Soit $\tilde{\Omega}$ un petit voisinage de $\gamma\,([-\infty, 0])$ et soit

$$\tilde{\Omega}_+ = \left\{x \in \tilde{\Omega} : x_n + b(x') > 0\right\}$$

$$\tilde{\Omega}_- = \tilde{\Omega} \setminus \left(\tilde{\Omega}_+ \cup \mathcal{C}\right)$$

Alors la fonction de phase $\phi(x) = d(x_0, x) - S$ est C^∞ sur $\tilde{\Omega}_-$, le symbole $a(x, h)$ peut être prolongeable à $\tilde{\Omega}_-$ en résolvant successivement pour a_j dans (3.1.4) Les équations de transport le long de courbe intégrale de H_q.

C.Q.F.D

4.2 Prolongement le long de l'ensemble caustique

Pour prolonger la solution $B.K.W$ ω le long de l'ensemble caustique , l'idée est de représenter $h^{\frac{n}{4}} e^{\frac{S}{n}} \omega$ dans la forme intégrale suivante qui nous notons

$$I\,[c]\,(x, h) = h^{-1/2} \int_{\gamma(x)} e^{-(x_n \xi_n + g(x', \xi_n))/h} c\,(x', \xi_n, h)\, d\xi_n.$$

Nous énoncons le théoréme suivant

Théorème 4.2.1 *Sous les hypothèses précedentes la solution BKW sous sa forme intégrale s'écrit pour* $x \in \tilde{\Omega}_-$ $(x_n + b(x') < 0)$ *proche de* x^1

$$\begin{aligned} h^{\frac{n}{4}} e^{\frac{S}{n}} \omega &= I\left[c\right](x,h) \\ &= h^{-1/2} \int_{\gamma(x)} e^{-(x_n\xi_n + g(x',\xi_n))/h} c\left(x',\xi_n,h\right) d\xi_n \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

où γ est un chemin à déterminer et le symbole c vérifie

$$c(x',\xi_n,h) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi^{-1}(a_j) \quad \text{avec} \quad c_0(x',\xi_n^+(x)) = \sqrt{\frac{r(x)}{\pi}} a_0(x)$$

telle que ψ soit une fonction bijective $\begin{cases} \psi : \widetilde{U} \to U \\ \quad b_j \to c_j \end{cases}$

où $\widetilde{U}$ un petit voisinage de x dans $\tilde{\Omega}_-$, $U = \left\{ \left(x',\xi_n^+(x)\right) \ ; x \in \widetilde{U} \right\}$ et $\xi_n^+(x)$ est le point critique de la phase $\phi(x) = x_n\xi_n + g(x',\xi_n)$.

Preuve de théorème.

Recherche du point critique de la phase $\phi(x) = x_n\xi_n + g(x',\xi_n)$

Pour $x \in \tilde{\Omega}_-$ $(x_n + b(x) < 0)$ proche de x^1 la phase $\phi(x) = x_n\xi_n + g(x',\xi_n)$ admet deux points critiques réels.

En effet

Soit $x \in \tilde{\Omega}_-$ proche de x^1, $\widetilde{U}$ un petit voisinage de x, les points critiques de la phase $\phi(x) = x_n\xi_n + g(x',\xi_n)$ sont les zéros de la dérivé de la phase.

$$x_n + \frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x',\xi_n) = 0$$

d'ou

$$x_n + b(x') + \mathcal{V}_1\left(x',\xi_n\right)\left(\xi_n - \xi_n^c\left(x'\right)\right)^2 = 0$$

donc

$$\left(\xi_n - \xi_n^c\left(x'\right)\right)^2 = \frac{-(x_n + b(x'))}{\mathcal{V}_1\left(x',\xi_n\right)}$$

alors

$$(\xi_n^{\pm}(x)) \sim \xi_n^c(x) \pm \sqrt{\frac{-(x_n + b(x'))}{\mathcal{V}_1(x', \xi_n)}}$$

Définition de contour γ

$\gamma(x)$ est un petit intervalle réel qui contient $\xi_n^+(x)$, dans le quel $\xi_n^+(x)$ est le seul point non degénéré minimal de $x_n\xi_n + g(x', \xi_n)$. la valeur minimal est

$$\phi(x) = x_n\xi_n^+ + g(x', \xi_n^+(x))$$

Développement asymptotique par la méthode du col

Appliquant la méthode du col on obtient un développement asymptotique

quand $h \to 0$ de $I[c]$.

$$I[c](x,h) \sim e^{-\phi(x)/h} \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x) h^j \text{ pour des fonctions } b_j(x) \in C^{\infty} \text{ définie sur } \widetilde{U} \tag{4.2.2}$$

en particulier

$$b_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{r(x)}} c_0(x', \xi_n^+(x)) \tag{4.2.3}$$

ou

$$r(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2}(x', \xi_n^+(x)) \tag{4.2.4}$$

en outre la fonction ψ de $(b_j(x)) \in \widetilde{U}$ à $c_j(x', \xi_n(x)) \in U = \left\{ \left(x', \xi_n^+(x)\right) \ ; x \in \widetilde{U} \right\}$est bijective on définie

$$c(x', \xi_n, h) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi^{-1}(a_j)$$

En particulier

$$c_0(x', \xi_n^+(x)) = \sqrt{\frac{r(x)}{\pi}} a_0(x)$$

Pour connaitre le développement de b dans $\widetilde{U}$, il suffit de connaitre celui de c dans $U = \left\{ \left(x', \xi_n^+(x)\right) \ ; x \in \widetilde{U} \right\}$

sur $\widetilde{\Omega}_-$ on a deux points critique réelles $\xi_n^-(x)$,$\xi_n^+(x)$ comme ϕ doit être croissante sur γ quand x_n augmente on voit qu'il est facile de choisir le signe $+$

On a donc

$$I\left[c\right](x,h) \sim e^{-\phi(x',\xi_n^+(x))/h} \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x',\xi_n^+(x))h^j \text{ tel que } c = \sum_{j=1} b_j(x)h^j \tag{4.2.5}$$

ou

$$\phi(x) = x_n\xi_n^+ + g(x',\xi_n^+(x))$$

Par ailleurs on rappelle que la fonction propre qui approxime la fonction propre $u_D\left(x,h\right)$ de P_D prés de x_0 et l'état résonant U sont approxime par

$$\omega(x,h) \approx h^{\frac{-1}{4}} a\left(x,h\right) e^{-d(x_0,x)/h}$$

nous pouvons déterminer c de telle manière que

$$\begin{aligned} e^{-\phi(x)/h} \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x',\xi_n^+(x))h^j &= h^{\frac{n}{4}} e^{S/h}\omega \\ &= h^{-\frac{n}{4}} h^{\frac{n}{4}} e^{-d(x_0,x)/h+S/h} a(x,h) \\ &= e^{-(d(x_0,x)-S)/h} a(x,h) \end{aligned}$$

La phase $\phi(x) = d(x_0,x) - S$ est une fonction C^∞ définie sur $\widetilde{\Omega}_-$ le symbole $a(x,h)$ se prolonge à $\widetilde{\Omega}_-$par les équations de transport du 1^{er} ordre le long dans courbe intégrale de H_q, il nous reste donc

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j(x',\xi_n^+(x))h^j = a(x,h)$$

On peut prendre

$$c(x',\xi_n,h) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi(a_j)h^j$$

ou

$$c_0(x',\xi^+(x)) = \sqrt{\frac{r(x)}{\pi}} a_0\left(x\right) \qquad x \in \widetilde{U}$$

on vient de déterminer c t.q

$$I\left[c\right](x,h) \sim h^{\frac{n}{4}} e^{S/h}\omega$$

$a(x)$ est donc définie dans $\widetilde{U}$

4.2.1 Prolongement de c(x$'$,ξ_n,h) a un voisinage de (x$'$,ξ_n)=(0,0)

Remarque 4.2.1 *sur* $\widetilde{\Omega}_-$,$a(x,h)$ *est prolongeable en résolvant les équations de transport imposés sur les différents termes dans le développement asymptotique de a par l'équation formelle*

$$e^{d(x_0,x)/h}(\hat{P}-\rho\left(h\right))(e^{d(x_0,x)/h}a)\sim 0 \tag{4.2.6}$$

ou

$$\hat{P}=-h^2\Delta_{x'}-\xi_n^2+V(x',h\frac{\partial}{\partial \xi_n}) \tag{4.2.7}$$

Prés de c , f et a développent des singularités dans un voisinage $\gamma(-\varepsilon)$ pour $\varepsilon>0$ assez petit on représente alors $ae^{-f/h}$ comme $I\left[c\right](x,h)$

a priori c sera défini seulement dans un petit voisinage de $(x'(-\varepsilon)\,,\xi_n(-\varepsilon))$, U dans notre cas ou $\tilde{\gamma}(t)=(\tilde{x}(t),\tilde{\xi}(t))$ est la bicaractéristique de $q(x,\xi)=\xi^2-V$ qui se projette sur γ

On analyse l'action de $P=-h^2\Delta+V$ sur $I\left[c\right](x,h)$ commençons par $-h^2\Delta I\left[c\right](x,h)$

$$\begin{aligned} I\left[c\right](x,h) &= h^{-1/2}\int_{\gamma(x)} e^{-(x_n\xi_n+g(x',\xi_n))/h}c\left(x',\xi_n,h\right)d\xi_n. \\ &= h^{-1/2}\int_{\gamma(x)} e^{-x_n\xi_n/h}(e^{-g/h}c)d\xi_n. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

On dérive par rapport à x' et appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégrale

$$\frac{\partial}{\partial x'}(I\left[c\right](x,h))=h^{-1/2}\int_{\gamma(x)} e^{-(x_n\xi_n)/h}\frac{\partial}{\partial x'}(e^{-g/h}c)d\xi_n.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}(I\left[c\right](x,h))=h^{-1/2}\int_{\gamma(x)} e^{-(x_n\xi_n)/h}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}(e^{-g/h}c)d\xi_n. \tag{4.2.9}$$

maintenant par rapport a x_n

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_n}(I\left[c\right](x,h)) &= h^{-1/2}\int_{\gamma(x)}[\frac{-\xi_n}{h}e^{-(x_n\xi_n)/h}(e^{-g/h}c)+e^{-(x_n\xi_n)/h}\frac{\partial}{\partial x_n}(e^{-g/h}c)]d\xi_n. \\ &= h^{-1/2}\int_{\gamma(x)}\frac{-\xi_n}{h}e^{-(x_n\xi_n)/h}(e^{-g/h}c)d\xi_n. \text{ car } \frac{\partial}{\partial x_n}(e^{-g/h}c)=0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}(I\left[c\right](x,h))=h^{-1/2}\int_{\gamma(x)}\frac{\xi_n^2}{h^2}e^{-(x_n\xi_n)/h}(e^{-g/h}c)d\xi_n. \tag{4.2.10}$$

D'ou

$$\begin{aligned} -h^2\Delta(I[c](x,h)) &= h^{-1/2}\int_{\gamma(x)}[-h^2e^{-(x_n\xi_n)/h}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}(e^{-g/h}c)-\xi_n^2e^{-(x_n\xi_n)/h}(e^{-g/h}c)]d\xi_n. \\ &= h^{-1/2}\int_{\gamma(x)}e^{-(x_n\xi_n)/h}\ [-h^2\Delta_{x'}-\xi_n^2](e^{-g/h}c)d\xi_n. \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Donc l'action de $-h^2\Delta$ sur $I[c]$ réduit a l'action de $[-h^2\Delta_{x'}-\xi_n^2]$ sur $(e^{-g/h}c)$

Il reste a transformer la multiplication par $V(x)$ ie $V(x)(I[c](x,h))$

$$\begin{aligned} V(x)(I[c](x,h)) &= V(x)h^{-1/2}\int_{\gamma(x)}e^{-(x_n\xi_n+g(x',\xi_n))/h}c(x',h)\,d\xi_n. \\ &= h^{-1/2}\int_{\gamma(x)}e^{-(x_n\xi_n)/h}V(x)(e^{-g/h}c)d\xi_n. \\ &= h^{-1/2}\int_{\gamma(x)}e^{-(x_n\xi_n)/h}V(x',x_n)(e^{-g(x',\xi_n)/h}c)d\xi_n. \end{aligned}$$

On pose $x=(x',x_n)$ et $\tilde{x}=x+y$ ou $y=(0,0,...,h)$

$$\begin{aligned} x+y &= (x',x_n+h) \\ V(\tilde{x}) &= V(x+y)=V(x)+h\nabla V(x)+\mathcal{O}(h^2) \\ V(x',x_n+h.\frac{\partial}{\partial\xi_n}) &= V(x)+h\frac{\partial}{\partial\xi_n}[V+h\frac{\partial}{\partial\xi_n}+...] \end{aligned}$$

posons $F(x',h\frac{\partial}{\partial\xi_n})=[V+h\frac{\partial}{\partial\xi_n}+...]$

donc dans un voisinage de (0.0)

$$V(x',x_n+h.\frac{\partial}{\partial\xi_n})=V(x)+h\frac{\partial}{\partial\xi_n}oF(x',h\frac{\partial}{\partial\xi_n})$$

calculons

$$V(x)(I(c))=V(x)((e^{-g/h}c)$$

$$V(x',x_n+h\frac{\partial}{\partial\xi_n})(e^{-g/h}c)=V(x)(e^{-g/h}c)+h(\frac{\partial}{\partial\xi_n}oF(x',h\frac{\partial}{\partial\xi_n}))(e^{-g/h}c)$$

$$V(x',h\frac{\partial}{\partial\xi_n})(e^{-g/h}c)=e^{-g/h}\sum_{l\geq 0}\frac{h^l}{l!}\partial_{x_n}^lV(x',-\partial x_ng)\partial_\eta^l(c(x',\eta)e^{-K(x',\xi_n,\eta)})\Big|_{\eta=\xi_n}. \tag{4.2.12}$$

ou

$$K(x',\xi_n,\eta)=g(x',\eta)-g(x',\xi_n)-(\eta-\xi_n)\partial_{\xi_n}g(x',\xi_n)$$

4.2.2 Point critiques et l'extension de ϕ

Lemme 4.2.1 *Soit $\tilde{g}(x', \xi_n, \eta_n)$ une extension presque analytique de $g(x', \xi_n)$ par rapport a ξ_n, Soit $N \geq 1$, $K = h\ln(1/h)$, $\tilde{V}_0$une $(NK)^{\frac{1}{3}}$ approximation holomorphique de V_0 par rapport a ξ_n.*

alors

$$\tilde{g}(x', \xi_n, \eta_n) = a(x') + b(x')(\xi_n - \xi_n^c(x')) + \frac{1}{3}\tilde{\mathcal{V}}_0(x', \xi_n, \eta_n)(\xi_n - \xi_n^c(x'))^3 \tag{4.2.13}$$

et

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi_n}(x', \xi_n, \eta_n) = b(x') + \tilde{\mathcal{V}}_1(x', \xi_n, \eta_n)(\xi_n - \xi_n^c(x'))^2 \tag{4.2.14}$$

preuve.

Soit $\tilde{g}(x', \xi_n, \eta_n)$ une extension presque analytique de $g(x', \xi_n)$ par rapport a ξ_n, on peut laisser x' comme un paramètre et d'après théoreme d'extension presque analytique on a

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(x', \xi_n, 0) &= g(x', \xi_n) \\
\tilde{g}(x', \xi_n, \eta_n) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(i\eta_n)^\alpha}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^\alpha g(x', \xi_n)\left(1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_\alpha}{|\eta_n|}\right)\right)
\end{aligned}$$

comme

$$g(x', \xi_n) = a(x') + b(x')(\xi_n - \xi_n^c(x')) + \frac{1}{3}\mathcal{V}_0(x', \xi_n)(\xi_n - \xi_n^c(x'))^3$$

alors

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(x', \xi_n, \eta_n) = &\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(i\eta_n)^\alpha}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^\alpha a(x')\left(1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_\alpha}{|\eta_n|}\right)\right) + \\
&\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(i\eta_n)^\alpha}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^\alpha b(x')(\xi_n - \xi_n^c(x'))\left(1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_\alpha}{|\eta_n|}\right)\right) + \\
&\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(i\eta_n)^\alpha}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^\alpha \frac{1}{3}\mathcal{V}_0(x', \xi_n)(\xi_n - \xi_n^c(x'))^3\left(1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_\alpha}{|\eta_n|}\right)\right)
\end{aligned}$$

D'après des choix convenable de η_n et$\frac{\varepsilon_\alpha}{|\eta_n|}$on obtient

$$\tilde{g}(x', \xi_n, \eta_n) = a(x') + b(x')(\xi_n - \xi_n^c(x')) + \frac{1}{3}\tilde{\mathcal{V}}_0(x', \xi_n, \eta_n)(\xi_n - \xi_n^c(x'))^3 \tag{4.2.15}$$

et

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi_n}(x', \xi_n, \eta_n) = b(x') + \tilde{\mathcal{V}}_1(x', \xi_n, \eta_n)(\xi_n - \xi_n^c(x'))^2 \tag{4.2.16}$$

ou

$$\tilde{\mathcal{V}}_1(x', \xi_n, \eta_n) = \tilde{\mathcal{V}}_0(x', \xi_n, \eta_n) + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial \xi_n}\tilde{\mathcal{V}}_0(x', \xi_n, \eta_n)(\xi_n - \xi_n^c(x'))$$

et $\tilde{\mathcal{V}}_0(x', \xi_n, \eta_n)$, $\tilde{\mathcal{V}}_1(x', \xi_n, \eta_n)$ sont des éxtensions presque analytiques de $\mathcal{V}_0(x', \xi_n)$ et $\mathcal{V}_1(x', \xi_n)$ respectivement

d'ou

$$x_n + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi_n}(x', \xi_n, \eta_n) = x_n + b(x') + \tilde{\mathcal{V}}_1(x', \xi_n, \eta_n)(\xi_n - \xi_n^c(x'))^2$$

□

Théorème 4.2.2 *:Soit* $x \in \tilde{\Omega}_+ \cap \left\{x_n + b(x') \leq c_1(NK)^{2/3}\right\}$ *l'équation*

$$x_n + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi_n}(x', \xi_n) = 0 \tag{4.2.17}$$

a deux racines complexes $\xi_n^{-i}(x)$, $\xi_n^{+i}(x)$ vérifie

$$\xi_n^{\pm i}(x) \sim \xi_n^c(x) \pm \sqrt{\frac{-(x_n + b(x'))}{\tilde{\mathcal{V}}_1(x', \xi_n^c(x'))}} \quad \text{quand } |x_n + b(x')| \to 0 \tag{4.2.18}$$

$\tilde{\mathcal{V}}_1$est $(NK)^{1/3}$approximation holomorphique de $\mathcal{V}_1$ par rapport à ξ_n

et la phase s'écrire sous la forme

$$x_n\xi_n + \tilde{g}(x', \xi_n) = a(x') - b(x')\xi_n^c(x') - z^2\xi_n^c(x') - \tilde{\mathcal{V}}(x', z)z^3 \tag{4.2.19}$$

posons

$$\tilde{\phi}(x) = x_n\xi_n^{-i}(x) + \tilde{g}(x', \xi_n^{-i}(x)) \tag{4.2.20}$$

on a

$$\operatorname{Im} \nabla_x \tilde{\phi}(x) = -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1(x', \xi_n^c(x'))}}(x_n + b(x'))^{1/2}\nabla(x_n + b(x')) + \mathcal{O}(x_n + b(x')) \tag{4.2.21}$$

et il existe $\varepsilon(h) = \mathcal{O}(h^\infty)$ réel verifie

$$\mathrm{Re}\,\tilde{\phi}(x) \geq \varepsilon(h) \tag{4.2.22}$$

Pour tous $x \in \tilde{\Omega}_+ \cap \left\{x_n + b(x') \leq c_1(NK)^{2/3}\right\}$

Preuve.

Soient $\tilde{g}$, $\tilde{\mathcal{V}}_0$, $\tilde{\mathcal{V}}_1$ des extensions presque analytiques de g , $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$ respectivement on a

$$\tilde{g}(x', \xi_n) = a(x') + b\,(x')\,(\xi_n - \xi_n^c\,(x')) + \frac{1}{3}\tilde{\mathcal{V}}_0\,(x', \xi_n)\,(\xi_n - \xi_n^c\,(x'))^{\,3}$$

donc

$$\begin{aligned}
x_n\xi_n + \tilde{g}(x', \xi_n) &= x_n\xi_n + a(x') + b\,(x')\,(\xi_n - \xi_n^c\,(x')) + \frac{1}{3}\tilde{\mathcal{V}}_0\,(x', \xi_n)\,(\xi_n - \xi_n^c\,(x'))^{\,3} \\
&= a(x') + x_n\xi_n + b\,(x')\,\xi_n - b\,(x')\,\xi_n^c\,(x') + \frac{1}{3}\tilde{\mathcal{V}}_0\,(x', \xi_n)\,(\xi_n - \xi_n^c\,(x'))^{\,3} \\
&= a(x') + (x_n + b(x'))\xi_n - b\,(x')\,\xi_n^c\,(x') - x_n\xi_n^c\,(x') + x_n\xi_n^c\,(x') + \\
&\quad \frac{1}{3}\tilde{\mathcal{V}}_0\,(x', \xi_n)\,(\xi_n - \xi_n^c\,(x'))^{\,3} \\
&= a(x') + (x_n + b(x'))\xi_n - (x_n + b(x'))\xi_n^c\,(x') + x_n\xi_n^c\,(x') + \frac{1}{3}\tilde{\mathcal{V}}_0\,(x', \xi_n)\,(\xi_n - \xi_n^c\,(x'))^{\,3} \\
&= a(x') + x_n\xi_n^c\,(x') + (x_n + b(x')(\xi_n - \xi_n^c\,(x')) + \frac{1}{3}\tilde{\mathcal{V}}_0\,(x', \xi_n)\,(\xi_n - \xi_n^c\,(x'))^{\,3} \qquad (4.2.23)
\end{aligned}$$

Si ξ_n est un point critique de $x_n\xi_n + \tilde{g}\,(x', \xi_n)$ alors

$$x_n + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi_n}(x', \xi_n) = 0$$

d'ou d'aprés (4.2.16)

$$x_n + b\,(x') + \tilde{\mathcal{V}}_1\,(x', \xi_n, \eta_n)\,(\xi_n - \xi_n^c\,(x'))^{\,2} = 0 \tag{4.2.24}$$

ou

$$\tilde{\mathcal{V}}_1\,(x', \xi_n, \eta_n) = \tilde{\mathcal{V}}_0\,(x', \xi_n, \eta_n) + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial \xi_n}\tilde{\mathcal{V}}_0\,(x', \xi_n, \eta_n)\,(\xi_n - \xi_n^c\,(x')) = \frac{1}{C_0} + O\,(|x'|)$$

Posons $x_n + b(x') = -z^2$

il devient alors

$$-z^2 + \tilde{\mathcal{V}}_1 (x', \xi_n) (\xi_n - \xi_n^c (x'))^2 = 0$$

on a en principe pour $x_n + b(x') < 0$ deux racines réels et puisque $\tilde{\phi}$ doit être croissante sur γ quand x_n augmente, on doit qu'il faut choisir le signe $+$

$$\begin{aligned} z^2 &= \tilde{\mathcal{V}}_1 (x', \xi_n) (\xi_n - \xi_n^c (x'))^2 \\ z &= \sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1 (x', \xi_n)} (\xi_n - \xi_n^c (x')) \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

$\tilde{\mathcal{V}}_1$ est holomorphique par rapport a ξ_n dans $\left\{|\mathrm{Im}\,\xi_n| \leq (NK)^{1/3}\right\}$

pour z , x' assez petit cette équation est résoluble par rapport a ξ_n et la solution est donnée par la formule d'inversion de Lagrange

$$\xi_n = \xi_n^c (x') + Y (x', z)$$

avec

$$Y (x', z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^{k-1}}{d\xi_n^{k-1}} \left(\tilde{V}_1 (x', \xi_n)\right)^{-k/2} \Big|_{\xi_n = \xi_n^c (x')} \frac{z^k}{k!} \tag{4.2.26}$$

est holomorphique par rapport a z dans $\left\{|\mathrm{Im}\,z| \leq \sqrt{c_1}(NK)^{1/3}\right\}$

Soit $x \in \tilde{\Omega}_-$, en prend z tel que $|\mathrm{Im}\,z| \leq \sqrt{c_1}(NK)^{1/3}$

$$x_n + b(x') = -z^2$$

d'ou

$$z = \pm\sqrt{-x_n - b(x')}$$

on a alors

$$\xi_n^{\pm} = \xi_n^c (x') + Y \left(x', \pm\sqrt{-x_n - b(x')}\right) \tag{4.2.27}$$

et pour $x \in \tilde{\Omega}_+ \cap \left\{x_n + b(x') \leq c_1(NK)^{2/3}\right\}$

on obtient

$$\xi_n^{\pm i} = \xi_n^c (x') + Y \left(x', \pm i\sqrt{x_n + b(x')}\right) \tag{4.2.28}$$

On peut représenter $x_n\xi_n + \tilde{g}(x', \xi_n)$ au fonction de x'et z

nous avons

$$\begin{aligned}
x_n\xi_n+\tilde{g}(x',\xi_n) &= a(x')+x_n\xi_n^c(x')+(x_n+b(x'))(\xi_n-\xi_n^c(x'))+\frac{1}{3}\tilde{\mathcal{V}}_0(x',\xi_n)(\xi_n-\xi_n^c(x'))^3 \\
&= a(x')+x_n\xi_n^c(x')+b(x')\xi_n^c(x')-b(x')\xi_n^c(x')+ \\
&\quad (x_n+b(x'))(\xi_n-\xi_n^c(x'))+\frac{1}{3}\tilde{\mathcal{V}}_0(x',\xi_n)(\xi_n-\xi_n^c(x'))^3 \\
&= a(x')-b(x')\xi_n^c(x')+(x_n+b(x'))\xi_n^c(x')+(x_n+b(x'))(\xi_n-\xi_n^c(x'))+ \\
&\quad \frac{1}{3}\tilde{\mathcal{V}}_0(x',\xi_n)(\xi_n-\xi_n^c(x'))^3 \\
&= a(x')-b(x')\xi_n^c(x')-z^2\xi_n^c(x')-z^2.(\frac{z}{\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1(x',\xi_n)}})+\frac{1}{3}\tilde{\mathcal{V}}_0(x',z)(\frac{z}{\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1(x',\xi_n)}})^3 \\
&= a(x')-b(x')\xi_n^c(x')-z^2\xi_n^c(x')-z^3\left[\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1}}-\frac{1}{3}.\frac{\tilde{\mathcal{V}}_0}{\tilde{\mathcal{V}}_1\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1}}\right]
\end{aligned}$$

Comme $\tilde{\mathcal{V}}_0=\tilde{\mathcal{V}}_1+\mathcal{O}(|z|)$ alors

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1}}-\frac{1}{3}.\frac{\tilde{V}_0}{\tilde{\mathcal{V}}_1\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1}}=\frac{2}{3\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1}}+\mathcal{O}(z)$$

Donc on a

$$x_n\xi_n+\tilde{g}(x',\xi_n)=a(x')-b(x')\xi_n^c(x')-z^2\xi_n^c(x')-\tilde{\mathcal{V}}(x',z)z^3 \tag{4.2.29}$$

ou

$$\tilde{\mathcal{V}}(x',z)=\frac{2}{3\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1(x',\xi_n^c(x))}}+\mathcal{O}(z)\quad \text{quand } z\to 0 \tag{4.2.30}$$

Holomorphique en z pour $\left\{|\mathrm{Im}\, z|\leq\sqrt{c_1}(NK)^{1/3}\right\}$ et C^∞ en x'

posons

$$\Phi(x,z)=x_n\xi_n+\tilde{g}(x',\xi_n,\eta_n)$$

$\tilde{g}$ est une extension de g et g_δ est une autre extension $\delta-$holomorphique de g

$$g_\delta(x',\xi_n+i\eta_n)=\tilde{g}(x',\xi_n+i\eta_n)+\mathcal{O}(\delta^\infty)$$

comme $\delta=(NK)^{2/3}=(N\ln\frac{1}{h})^{2/3}$ alors $\delta^\infty=h^\infty$

pour $x\in\tilde{\Omega}_-$ et $\eta_n\to 0$ on a

$$\tilde{g}(x',\xi_n+i\eta_n)\to g(x',\xi_n) \text{ et } g_\delta(x',\xi_n+i\eta_n)\to g(x',\xi_n)+\mathcal{O}(h^\infty)$$

donc

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x) &= \Phi(x', \sqrt{-x_n - b(x')}) \\ &= x_n\xi_n + g(x', \xi_n) + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= \phi(x) + \mathcal{O}(h^\infty)\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Pour $x \in \tilde{\Omega}_+ \cap \left\{x_n + b(x') \leq c_1(NK)^{2/3}\right\}$ on a $0 \leq x_n + b(x') \leq c_1(NK)^{2/3}$
et

$$\tilde{\phi}(x) = \Phi(x', -i\sqrt{x_n + b(x')}) \tag{4.2.32}$$

on particulier quand a , b ,et $\xi_n$réels on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\tilde{\phi}(x) &= \operatorname{Im}(x_n\xi_n + \tilde{g}(x', \xi_n)) \\ &= \operatorname{Im}\left(a(x') - b\,(x')\,\xi_n^c\,(x') - z^2\xi_n^c\,(x') - \tilde{\mathcal{V}}\,(x', z)\,z^3\right)\end{aligned}$$

puisque a , b , ξ_n^c et z^2 sont réels et $z^3 = \mp i\,(x_n + b(x'))^{3/2}$ on trouve

$$\operatorname{Im}\tilde{\phi}(x) = -(x_n + b(x'))^{3/2}\operatorname{Re}\tilde{\mathcal{V}}\left(x', -i\sqrt{x_n + b(x')}\right)$$

ϕ est solution de l'équation eiconale

$$q(x, \frac{\partial \phi}{\partial x}) + E_0 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 - V(x) + E_0 = 0$$

on a

$$\phi(x) = \Phi(x', -\sqrt{-x_n - b(x')})$$

ce qui implique que ϕ vérifie

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right)^2 - V(x) + E_0 = \mathcal{O}(h^\infty)$$

Puisque $V(x) = V(x', x_n) = V(x', -z^2 - b(x'))$
et $\frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{1}{2}.\frac{\partial b}{\partial x'}.\,(x_n + b(x'))^{-1/2} = \frac{-1}{2z}.\frac{\partial b}{\partial x'}$
alors

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'} - \frac{\partial b}{\partial x'}\frac{1}{2z}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{1}{2z}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 + V(x', -z^2 - b(x')) + E_0 = \mathcal{O}(h^\infty)$$

pour z suffisamment proche de 0

en rajoutant le fait que $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \mathcal{O}(|z|)$ le terme gauche est holomorphique par rapport a z dans $\left\{|\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{c_1}(NK)^{1/3}\right\}$

Nous retournons a la variable x ,on pose $\tilde{\phi}(x) = \Phi(x, -i\sqrt{x_n + b(x')})$ on trouve facilement

$$\left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}\right)^2 - V(x) + E_0 = \mathcal{O}(h^\infty)$$

Uniformément pour $x \in \tilde{\Omega}_+ \cap \left\{x_n + b(x') \leq c_1(NK)^{2/3}\right\}$ et $h > 0$ assez petit

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \operatorname{Re} \tilde{\phi}}{\partial x} + i\frac{\partial \operatorname{Im} \tilde{\phi}}{\partial x}\right)^2 - V(x) + E_0 &= \mathcal{O}(h^\infty)\\ \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \tilde{\phi}}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \operatorname{Im} \tilde{\phi}}{\partial x}\right)^2 + 2i\frac{\partial \operatorname{Re} \tilde{\phi}}{\partial x}.\frac{\partial \operatorname{Im} \tilde{\phi}}{\partial x} - V(x) + E_0 &= \mathcal{O}(h^\infty)\end{aligned}$$

La partie imaginaire implique

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \tilde{\phi}}{\partial x}.\frac{\partial \operatorname{Im} \tilde{\phi}}{\partial x} = \mathcal{O}(h^\infty)$$

d'ou

$$\nabla \operatorname{Im} \tilde{\phi}.\nabla \operatorname{Re} \tilde{\phi} = \mathcal{O}(h^\infty) \tag{4.2.33}$$

on fait un changement de variable $\left\{\begin{array}{c} y' = x' \\ y_n = x_n + b \end{array}\right.$

il est claire que c'est $x \in \mathcal{C}$ alors $y_n = 0$,et on a sur $\mathcal{C}$: $\nabla(x_n + b).\nabla = \frac{\partial}{\partial y_n}$

en effet

$$\begin{aligned}\nabla(x_n + b).\nabla &= \frac{\partial}{\partial x}(x_n + b).\frac{\partial}{\partial x}\\ &= \frac{\partial}{\partial x'}(x_n + b).\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n + b).\frac{\partial}{\partial x_n}\\ &= \frac{\partial}{\partial x'}(y_n).\frac{\partial}{\partial y'} + 1.\frac{\partial}{\partial x_n}\\ &= \frac{\partial}{\partial x_n} \quad \text{car } \frac{\partial}{\partial x'}(y_n) = 0\\ &= \frac{\partial}{\partial y_n} \times \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\\ &= \frac{\partial}{\partial y_n} \times 1 = \frac{\partial}{\partial y_n}\end{aligned}$$

d'après (4.2.21)

$$\operatorname{Im} \nabla_x \tilde{\phi}(x) = -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1(x', \xi_n^c(x'))}}(x_n + b(x'))^{1/2}\nabla(x_n + b(x')) + \mathcal{O}(x_n + b(x'))$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Im}\tilde{\phi}(x)).\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1\left(x', \xi_n^c(x')\right)}}(x_n + b(x'))^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}(x_n + b(x')).\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{O}(x_n + b(x')).\frac{\partial}{\partial x}$$

après changement de variable on a

$$\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Im}\tilde{\phi}(x)).\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1\left(x', \xi_n^c(x')\right)}}.{y_n}^{1/2}\frac{\partial}{\partial y_n} + \sum_{j=1}^{n}\mathcal{O}\left(y_n\right)\frac{\partial}{\partial y_j} \tag{4.2.34}$$

Le champ de vecteur peut-être desingularisé en $y_n = 0$
en posant $(z', z_n) = \left(y', y_n^{1/2}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial y_n} = \frac{\partial z_n}{\partial y_n}.\frac{\partial}{\partial z_n} = \frac{\partial}{\partial z_n}.(\frac{1}{2.}y_n^{\frac{-1}{2}})$$

on substitue dans(4.2.34) on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Im}\tilde{\phi}(x)).\frac{\partial}{\partial x} &= (-\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1\left(x', \xi_n^c(x')\right)}} + O(z_n)).{y_n}^{1/2}.\frac{\partial}{\partial z_n}.(\frac{1}{2.}y_n^{\frac{-1}{2}}) + \sum_{j=1}^{n-1} O\left(z_n^2\right)\frac{\partial}{\partial z_j} \\
&= (-\frac{1}{2\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1\left(x', \xi_n^c(x')\right)}} + O(z_n)).\frac{\partial}{\partial z_n}. + \sum_{j=1}^{n-1} O\left(z_n^2\right)\frac{\partial}{\partial z_j} \\
\nabla \operatorname{Im}\tilde{\phi}(x).\nabla &= (-\frac{1}{2\sqrt{\tilde{\mathcal{V}}_1\left(x', \xi_n^c(x')\right)}} + O(z_n)).\frac{\partial}{\partial z_n}. + \sum_{j=1}^{n-1} O\left(z_n^2\right)\frac{\partial}{\partial z_j} \qquad (4.2.35)
\end{aligned}$$

□

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, on a d'abord donner la description de l'extension de la solution BKW qui est à la base de ce travail, s'aidant de l'article ([14]), cette solution a été adaptée à la théorie des résonances une fois qu'on a remplacé l'opérateur P par l'opérateur de Dirichlet P_D, on s'est interessé au domaine d'existence des resonances et leurs localisation en passant par la distance Agmon.

Nos perspectives sont :

1. Donner une extension de la solution BKW a l'exterieure dans le cas des potentiels non globalement analytiques ([12]).
2. Montrer que les résultats obtenus reste vrais même si l'hypothèse concernant l'absence de caustique n'est pas vérifiée : en utilisant une transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer, en s'aidant des résultats obtenues dans(voir[5])
3. Généraliser les résultats aux potentiels à longue portée.
4. Reflechir à ce qui se passe pour des potentiels moins regulier, comme par exemple des opérateurs de Calderon Zygmund.

Bibliographie

[1] J. Aguilar, J.M. Combes : A class of analytic perturbations for one-body schrödinger Hamiltonians. *Comm. Math. phys*, 22(1971), p269-279.

[2] A.Benbernou : Estimation des résidus de la matrice de diffusion en limite semi-classique. Thése de Doctorat, Univ Paris XIII, 1995-1996.

[3] A.Benbernou : Estimation des résidus de la matrice de diffusion associés à des résonances de forme I, Ann. Inst. Henri Ponicaré. Vol71, n°3, 1999, p.303-338.

[4] H. Cycon : Resonances defined by modified dilatation. *Helv. Phys. Acta* 58 (1985), 969-981.

[5] S.Fujiie,A.Lahmar-Benbernou,A.Martinez :Width of shape resonances for non globally analytic potentials .J.Math.Soc.Japan.Vol.63.No.1(2011) pp1-78

[6] C. Gérard, A. Martinez : Semi-Classical Asymptotics for the Spectral Function of Long-Range Schrödinger Operators, Journal of Functional Analysis,vol. 84, No. 1, May 1989.

[7] Gérard, C., Martinez, A. : Prolongement meromorphe de la matrice de scattering pour les problèmes à deux corps à long portées, Ann.Inst.Henri Poincaré 51,n°181-110(1989).

[8] Gérard, C., Martinez, A. : Principe d'absorption limite pour des opérateurs de Schrödinger à longue portée, C.R.A.S Paris t.306 serie I, p.121-123,1988.

[9] Gérard, C., Martinez, A., and Robert, D : Breit-Wigner Formulas for the Scattering Phase and the Total Scatteing Cross-Section in the Semi-Classical Limit, Commun, Math, Phys, 121, 323-336 (1989)

[10] Gérard, C., J. Sjostrand : Semi-classical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type, Comm.Math.phys.108,391-421(1987).

[11] B.Helffer, A.Martinez : Comparaison entre les diverses notions de résonances. Helv. Phys. Acta 60, (1987), p 992-1003.

[12] B.Helffer, J. Sjostrand : Multiple wells inthe semi-classical limit I. *Comm. Part. Diff. Equ.* 9 (4), p 337-408 (1984).

[13] B.Helffer, J. Sjostrand : Puits multiples en limite semi-classique II. Interaction moléculaire, symetries, perturbations, *Ann. IHP*, vol 42 n°2 (1985) p 127-212.

[14] B.Helffer, J. Sjostrand : Résonances en limite semi-classique. Mémoires n24/25 supp au tome 114.Fasc3, (1986), Bull.Soc. Math. France.

[15] L. Hörmander : *The Analysis of Linear Partial Differential Operators,* Vol. I. to IV. Springer Velag (1985).

[16] W.Hunziker : Distorsion analyticity and molecular resonance curves, *A*nnales de l'I.H.P. (section Physique Théorique), 1986.

[17] Isosaki, H., et Kitada, H. : Mofied wave operators with time independant modifiers, J. Fasc. Sc. Tokyo Univ sect 1A, 32, (1985), p.77-104.

[18] Isosaki, H., et Kitada, H. : Scattering matirices for two body schrodinger operators, Sci. paper of the college of arts sciences. Tokyo Univ.35, (1985), p.81-107.T.

[19] A.Matinez :An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis (May 22 ,2002)

[20] A. Martinez : Estimations de l′effet tunnel pour le double puits I, *J. Math pures et app.* 66 (1987) p 195-215.

[21] Estimation de l'effet tunnel pour le double puits II, états hautement excités. *Bull.Soc.Math.France. 116, 1988, p199-229.*

[22] J. Sjostran, Singularités analytiques microlocales. Astérisque 95 (1982)

[23] Yafaev, D.R. : On the classical asymptotics of the forward scattering amplitude and of the total scattering cross section. Colloque st-Jean de Monts.