

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la vie

**Département de Mathématiques**

THESE DE DOCTORAT

==--==--==--==--==--o ○ o--==--==--==--==--==

Option : Analyse Fonctionnelle

*Intitulée*

APPLICATIONS DE LA THEORIE DE NEVANLINNA  
SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES  
COMPLEXES

Présentée par : **EL FARISSI Abdallah**

Soutenue le :                    devant le jury composé de :

Président :	Mr <b>Bendoukha Berrabah</b>	Prof., Université de Mostaganem
Encadreur :	Mr <b>Belaïdi Benharrat</b>	Prof., Université de Mostaganem
Examineur :	Mr <b>Benchohra Mouffak</b>	Prof., Université de Sidi Bel Abbès
Examineur :	Mr <b>Medeghri Ahmed</b>	Prof., Université de Mostaganem
Examineur :	Mr <b>Benbachir Maamar</b>	MCA., Université de Bechar
Examineur :	Mr <b>Dahmani Zoubir</b>	MCA., Université de Mostaganem

## Remerciements

### **Au nom du Dieu Clément et Miséricordieux !**

Avant tout, je remercie **DIEU** le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années de recherche et que grâce à Lui ce travail de thèse a pu être réalisé. **Je Lui dois tout.**

Je tiens à exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué à l'accomplissement de cette thèse de Doctorat, tout particulièrement :

Mon Encadreur ; Monsieur Belaïdi Benharrat qui a accepté d'encadrer ce travail. Je le remercie aussi pour avoir dirigé mes travaux et pour m'avoir écouté et encouragé durant cette période. Merci aussi pour toutes les relectures, suggestions et commentaires qui m'ont permis d'améliorer la qualité de cette thèse.

Je remercie Monsieur Bendoukha Berrabah d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

J'exprime ma très profonde reconnaissance aux examinateurs Benchohra Mouffak, Medghri Ahmed, Benbachir Maamar et Dahmani Zoubir qui me font l'honneur de juger ce travail.

Je voudrais faire, maintenant, une place toute particulière à mes parents. Je profite de cette occasion pour leur exprimer mon attachement très profond et ma très grande reconnaissance.

A mes frères : Mustapha, Touati et surtout mon frère Omar,...Merci pour vous tous !

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 La théorie de R. Nevanlinna</b>	<b>6</b>
1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna . . . . .	6
1.2 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction entière ou méromorphe	7
1.2.1 L'ordre et le type de croissance d'une fonction . . . . .	7
1.2.2 L'exposant de convergence des zéros . . . . .	9
1.2.3 La notion d'ordre $p$ - itératif d'une fonction . . . . .	10
1.3 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction analytique ou méromorphe dans le disque unité . . . . .	13
<b>2 Croissance des solutions des équations différentielles d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	17
2.2 Notre contribution . . . . .	18
2.3 Applications . . . . .	20
2.4 Lemmes préliminaires . . . . .	21
2.5 Preuves des théorèmes . . . . .	27
2.5.1 Preuve du Théorème 2.1 . . . . .	27
<b>3 Croissance des solutions des équations différentielles d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes</b>	<b>29</b>
3.1 Introduction . . . . .	29
3.2 Notre contribution . . . . .	31
3.3 Lemmes préliminaires . . . . .	33
3.4 <b>Preuve du Théorème 3.1</b> . . . . .	39
3.5 <b>Preuve du Théorème 1.2</b> . . . . .	39
3.6 <b>Preuve du Corollaire 3.2</b> . . . . .	41
3.7 <b>Preuve du Théorème 3.3</b> . . . . .	41
3.8 <b>Preuve du Théorème 3.4</b> . . . . .	41
<b>4 Oscillation des points fixes des solutions des équations différentielles</b>	<b>42</b>
4.1 Introduction . . . . .	42
4.2 Lemmes préliminaires . . . . .	45
4.3 Preuve du Théorème 4.3 . . . . .	48
4.4 Preuve du Théorème 4.4 . . . . .	49
4.5 Preuve du Théorème 4.5 . . . . .	50

---

<b>5</b>	<b>Croissance et oscillation des polynômes différentiels dans le plan complexe</b>	<b>52</b>
5.1	Introduction . . . . .	52
5.2	Notre contribution . . . . .	53
5.2.1	Applications . . . . .	54
5.3	Lemmes préliminaires . . . . .	56
5.4	Preuve du Théorème 5.1 . . . . .	58
5.5	Preuve du Théorème 5.2 . . . . .	59
5.6	Preuve du Théorème 5.3 . . . . .	59
5.7	Preuve du Corollaire 5.1 . . . . .	59
5.8	Preuve du Théorème 5.4 . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Croissance et oscillation des polynômes différentiels à coefficients fonctions analytiques dans le disque unité</b>	<b>61</b>
6.1	Introduction et résultats . . . . .	61
6.2	Lemmes préliminaires . . . . .	67
6.3	Preuve du Théorème 6.1 . . . . .	68
6.4	Preuve du Théorème 6.2 . . . . .	69
6.5	Preuve du Théorème 6.3 . . . . .	70
6.6	Preuve du Corollaire 6.1 . . . . .	70
6.7	Preuve du Corollaire 6.2 . . . . .	71
	<b>Bibliographie</b>	<b>74</b>

# Introduction

La théorie de Nevanlinna est un outil incontournable dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes notamment la croissance et l'oscillation des solutions. En effet depuis 1925, l'année où R. Nevanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, les chercheurs ne cessent de publier dans la même thématique et plusieurs problèmes ont été étudiés et résolus. Des liens étroits avec d'autres domaines sont mis en évidence en particulier avec la théorie analytique des équations différentielles. Pour une introduction à la théorie des équations différentielles dans le plan complexe avec la théorie de Nevanlinna voir [45].

La recherche active dans ce domaine a été lancée par H. Wittich et ses étudiants dans les années 1950 et 1960. Un des résultats importants dû à Wittich concernant la croissance des solutions des équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = 0$$

est le suivant : Les coefficients  $A_0, \dots, A_{k-1}$  sont des polynômes si et seulement si toutes les solutions de l'équation précédente sont des fonctions entières d'ordre fini de la croissance. M. Frei a étendu le résultat ci-dessus, en supposant que  $A_j$ , le dernier coefficient qui est transcendant tandis que tous les coefficients  $A_{j+1}, \dots, A_{k-1}$  sont des polynômes, et il a démontré que l'équation possède au plus  $j$  solutions linéairement indépendantes d'ordre fini.

Cette thèse se compose d'une introduction et de six chapitres.

Dans le premier chapitre on va citer quelques notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans les autres chapitres, on peut considérer ce chapitre comme une introduction à la théorie de Nevanlinna, on va aussi citer quelques théorèmes et définitions concernant la distribution des valeurs des fonctions analytiques dans le disque unité.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la croissance, de l'oscillation et des points fixes des solutions des équations différentielles linéaires. I. Laine et B. Bank (voir [47]) sont considérés parmi les premiers mathématiciens qui se sont intéressés aux solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients fonctions entières. En 1982, ils ont

étudié la distribution des zéros des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$f'' + A(z)f = 0$$

où  $A(z)$  est un polynôme ou une fonction entière transcendante.

Dans l'étude de l'équation différentielle d'ordre deux

$$f'' + e^{-z}f' + B(z)f = 0, \quad (1.1)$$

où  $B(z)$  est une fonction entière. Il est fort connu que toute solution  $f$  de l'équation (1.1) est une fonction entière, est que si  $f_1, f_2$  sont deux solutions linéairement indépendantes de (1.1), alors, au moins l'une des deux est d'ordre infini [37]. Donc, la majorité des solutions de (1.1) ont un ordre infini, mais l'équation (1.1) où  $B(z) = -(1 + e^{-z})$  admet la solution  $f(z) = e^z$  et qui est d'ordre fini. Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles d'ordre supérieure à coefficients fonctions entières de types

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_2f'' + A_1e^{P(z)}f' + A_0e^{Q(z)}f = F$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes, on va aussi généraliser plusieurs résultats prouvés par Z. X. Chen, I. Laine, J. Wang, T.B. Cao Langley et Gundersen.

Dans le troisieme chapitre, on s'intéresse à l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes. Pour cela, on va introduire des conditions sur l'ordre des coefficients.

Pour  $k \geq 2$  on considère l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f = F,$$

où  $A_j$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ),  $F \not\equiv 0$  sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles, et il existe  $s \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  tel que  $\max\{\rho(A_j), (j = 0, 1, \dots, s-1, s+1, \dots, k-1)\} < \rho(A_s)$ . On obtient quelques estimations sur l'ordre et l'exposant de convergence des zéros de l'équation ci-dessus.

Z.X. Chen est le premier qui a étudié en 2000 (voir [26]) les points fixes des solutions de l'équation

$$f'' + A(z)f = 0,$$

où  $A(z)$  une fonction entière transcendante ou un polynôme.

En 2004, J. Wang et W. R. Lü(voir [58]) ont étudié la croissance et les points fixes des solutions et ses dérivées de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux

$$f'' + A(z)f = 0,$$

où  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante. Les résultats obtenus dans [58], ont été généralisés en 2006 par M. S.Liu et X. M.Zhang (voir [50]) pour l'équation d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + A(z)f = 0, \quad (k \geq 2)$$

---

où  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante.

Le but du quatrième chapitre est d'améliorer les résultats de M. S. Liu et X. M. Zhang, (voir [50]), J. Wang et W. R. Lü (voir [58]). Nous étudions la relation entre les solutions, les dérivées et le polynôme différentiel d'une classe d'équations différentielles linéaires d'ordre deux et d'ordre supérieur et les fonctions méromorphes d'ordre fini.

En 2005, une autre étude sur la croissance et les points fixes a été faite par Z.X.Chen et K.H.Shon (voir [28]) pour l'équation différentielle linéaire d'ordre deux

$$f'' + A_1 e^{az} f' + A_0 e^{bz} f = 0,$$

où  $A_1, A_0$  sont des fonctions méromorphes et  $a, b$  sont deux nombres complexes.

Dans le cinquième chapitre, on généralise les résultats obtenus par Z.X.Chen et K.H.Shon. On étudie la croissance, l'oscillation et les points fixes des polynômes différentiels engendrés par les solutions de l'équation différentielle, ceci généralise tous les résultats cités dans les chapitres précédents.

Dans le sixième chapitre, une réponse est apportée à la question naturelle suivante : Que pouvons nous dire sur les solutions des équations différentielles si les coefficients sont des fonctions analytiques dans le disque unité? Le premier qui a étudié ce problème fut J. Heittokangas en 2000 dans sa thèse de Doctorat, le but de ce chapitre est de continuer cette étude est de confirmer s'il existe des résultats analogues à ce qu'on a montré dans le quatrième chapitre pour le disque unité.

# Chapitre 1

## La théorie de R. Nevanlinna

On commence par donner quelques définitions, notations et résultats dont on aura besoin par la suite. Pour plus de détails voir ([39], [45]).

### 1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

**Théorème 1.1** (*Formule de Jensen*) Soit  $f$  une fonction méromorphe telle que  $f \not\equiv 0, \infty$  et  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (respectivement  $b_1, b_2, \dots, b_m$ ) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{|b_j| < r} \ln \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j| < r} \ln \frac{r}{|a_j|}.$$

**Définition 1.1** Pour tout réel  $x > 0$ , on définit

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

il est clair que

$$\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

**Définition 1.2** (*Fonction caractéristique de R. Nevanlinna*) ([39], [53]) Soit  $f$  une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe  $a$ , on désigne par  $n(t, a, f)$  le nombre de racines de l'équation  $f(z) = a$  situées dans le disque  $|z| \leq t$ . Chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par  $n(t, \infty, f)$  le nombre de pôles de la fonction  $f$  dans le disque  $|z| \leq t$ . On définit

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r, \quad a \neq \infty$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r,$$

$N(r, f)$  est appelée la fonction de comptage de la fonction  $f$  dans le disque  $|z| \leq r$ . On définit

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta, \quad a \neq \infty$$

et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

$m(r, f)$  est appelée fonction de proximité de la fonction  $f$  au point  $a$ .

**Définition 1.3** On définit ([39]) la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction  $f$  par

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

**Exemple 1.1** Pour la fonction  $f(z) = e^z$ , on a

$$n(t, f) = 0 \text{ et } N(r, f) = 0.$$

De plus

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |e^{r \cos \theta + ir \sin \theta}| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cos \theta d\theta = \frac{r}{2\pi} 2 [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r}{\pi} \end{aligned}$$

D'où

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

**Théorème 1.2 (Premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna dans le plan complexe)** ([39], [45]) Soit  $f$  une fonction méromorphe non constante. Alors pour tout nombre complexe  $a \neq \infty$ , on a

$$m(r, a, f) + N(r, a, f) = T(r, f) + \varepsilon(r, a)$$

où  $\varepsilon(r, a) = O(1)$  quand  $r \rightarrow \infty$ .

## 1.2 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction entière ou méromorphe

### 1.2.1 L'ordre et le type de croissance d'une fonction

**Définition 1.4** ([39], [45], [61], [62]) Soit  $f$  une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyperordre de  $f$  sont définis respectivement par

$$\begin{aligned} \rho(f) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r}, \\ \rho_2(f) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \log M(r, f)}{\log r}, \end{aligned}$$

où  $M(r, f) = \max \{|f(z)|, |z| = r\}$ .

Si  $f$  est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de  $f$  sont définis par

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}.$$

**Exemple 1.2** La fonction  $f(z) = \exp\{\exp z^n\}$  est d'ordre  $\rho(f) = \infty$  et d'hyper ordre  $\rho_2(f) = n$ . La fonction  $f(z) = \exp\left\{\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right\}$  est d'ordre  $\rho(f) = \infty$  et de hyper ordre  $\rho_2(f) = \frac{1}{2}$

**Remarque 1.1** Si  $f$  est d'ordre fini alors l'hyper ordre de cette fonction est nulle.

**Définition 1.5** ([39]) Soit  $f$  une fonction méromorphe d'ordre  $\rho$  ( $0 < \rho < \infty$ ), on définit le type de  $f$  par

$$\sigma(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{T(r, f)}{r^\rho}.$$

**Définition 1.6** ([39]) Soit  $f$  une fonction entière d'ordre  $\rho$  ( $0 < \rho < \infty$ ), on définit le type de  $f$  par

$$\sigma_M(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ M(r, f)}{r^\rho}.$$

**Exemple 1.3** Pour la fonction  $f(z) = e^z$ , on a

$$\sigma(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{T(r, f)}{r^\rho} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{r}{\pi r} = \frac{1}{\pi}$$

et

$$\sigma_M(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ M(r, f)}{r^{\rho_M}} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ e^r}{r} = 1.$$

## 1.2.2 L'exposant de convergence des zéros

**Définition 1.7** ([43], [50], [59]) *Soit  $f$  une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction  $f$  respectivement par*

$$\lambda(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

$$\lambda_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

tel que  $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$  désigne le nombre de zéros de la fonction  $f$  situés dans le disque  $|z| \leq r$ .

**Définition 1.8** ([43], [58]) *On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction  $f$  respectivement par*

$$\bar{\lambda}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

$$\bar{\lambda}_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\bar{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \bar{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \bar{n}\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

tel que  $\bar{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$  désigne le nombre de zéros distincts de la fonction  $f$  situés dans le disque  $|z| \leq r$ .

**Définition 1.9** ([26], [46], [50], [59]) *Soit  $f$  une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes de la fonction  $f$  respectivement par*

$$\tau(f) = \lambda(f - z) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

$$\tau_2(f) = \lambda_2(f - z) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

**Définition 1.10** ([26], [46], [50], [59]) *Soit  $f$  une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes de la fonction  $f$  respectivement par*

$$\bar{\tau}(f) = \bar{\lambda}(f - z) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

$$\bar{\tau}_2(f) = \bar{\lambda}_2(f - z) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

**Exemple 1.4** *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction  $f(z) = e^{e^z} + 2$  sont égaux respectivement à  $\infty$  et 1.*

**Exemple 1.5** *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction  $f(z) = e^{e^z} + e^z$  sont égaux respectivement à  $\infty$  et 1.*

**Exemple 1.6** *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes de la fonction  $f = \cos(e^z)$  sont égaux respectivement à  $\infty$  et 1.*

**Exemple 1.7** *L'exposant de convergence des zéros de la fonction  $f(z) = e^{2z} - 2e^z + 1$  est égal à 2 et l'exposant de convergence des zéros distincts de cette fonction est égal à 1.*

### 1.2.3 La notion d'ordre $p$ - itératif d'une fonction

Si l'ordre d'une fonction entière ou méromorphe est infini, on définit l'hyper ordre de cette fonction.

Pour la définition de l'ordre  $p$ - itératif d'une fonction méromorphe, on a besoin de définir les expressions suivantes : pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , on pose  $\exp_1 r := e^r$  et  $\exp_{p+1} r := \exp(\exp_p r)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . De la même façon on définit  $\log_1 r := \log r$  et  $\log_{p+1} r := \log(\log_p r)$ ,  $p \in \mathbb{N}$  et ceci pour  $r$  suffisamment grand

**Définition 1.11** ([43], [45]) *Soit  $f$  une fonction méromorphe. On définit le  $p$ -ordre itératif de croissance de la fonction  $f$  par*

$$\rho_p(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_p T(r, f)}{\log r} \quad (p \geq 1, p \text{ entier}),$$

où  $T(r, f)$  est la fonction caractéristique de Nevanlinna et si  $f$  est entière, alors le  $p$ -ordre itératif de la fonction  $f$  est défini par

$$\rho_p(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_{p+1} M(r, f)}{\log r} \quad (p \geq 1, p \text{ entier}),$$

où  $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ .

**Exemple 1.8** *Pour la fonction  $f(z) = \exp_q(z)$ ,  $q \in \mathbb{N}$  on a*

$$\rho_p(f) = \begin{cases} +\infty & \text{si } p < q \\ 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p > q \end{cases}$$

**Définition 1.12** ([43], [45]) *L'indice de croissance d'ordre  $p$ - itératif d'une fonction méromorphe  $f$  est défini par*

$$i(f) = \begin{cases} 0, & \text{Si } f \text{ est rationnelle} \\ \min_{j \in \mathbb{N}} \{\rho_j(f) < +\infty\}, & \text{Si } f \text{ est transcendante} \\ +\infty, & \text{Si } \rho_j(f) = +\infty \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Exemple 1.9** *L'indice de croissance du  $p$ -ordre itératif de la fonction*

$$f(z) = \exp_{p-1}(\sin(z))$$

*est égal à  $p$ .*

**Définition 1.13** ([43]) *Soit  $f$  une fonction méromorphe. On définit le  $p$ -exposant itératif de convergence des zéros de la fonction  $f$  par*

$$\lambda_p(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

*On définit le  $p$ -exposant itératif de convergence des zéros distincts de la fonction  $f$  par*

$$\bar{\lambda}_p(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_p \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

**Définition 1.14** [46] *On définit le  $p$ -exposant itératif de convergence des points fixes d'une fonction méromorphe  $f$  par*

$$\tau_p(f) = \lambda_p(f - z) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

*et le  $p$ -exposant itératif de convergence des points fixes distincts de  $f$  par*

$$\bar{\tau}_p(f) = \bar{\lambda}_p(f - z) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_p \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

**Exemple 1.10** *Pour la fonction  $f(z) = \exp_5(z) - \exp_4(z)$  on a  $\lambda_5(f) = 1$ ,  $\bar{\lambda}_5(f) = 1$ ,  $\tau_5(f) = 1$ ,  $\bar{\tau}_5(f) = 1$ .*

Pour les ensembles, on définit les mesures linéaire, logarithmique, la densité logarithmique inférieure et la densité logarithmique supérieure par :

**Définition 1.15** ([39]). On définit la mesure linéaire d'un ensemble  $E \subset [0, \infty)$  par

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) dt$$

où  $\chi_E(t)$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $E$ . La mesure logarithmique d'un ensemble  $F \subset [1, \infty)$  est

$$lm(F) = \int_0^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

La densité logarithmique inférieure de l'ensemble  $F$  est

$$\underline{\log dens}(F) = \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{lm(F \cap [1, r])}{\log r}$$

La densité logarithmique supérieure de l'ensemble  $F$  est

$$\overline{\log dens}(F) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{lm(F \cap [1, r])}{\log r}$$

**Exemple 1.11** La mesure linéaire de l'ensemble  $E = [2, 6] \cup [7, 8] \subset [0, \infty)$  est

$$m(E) = \int_0^{\infty} \chi_E(t) dt = \int_2^6 dt + \int_7^8 dt = 5.$$

La mesure linéaire de l'ensemble  $E = \mathbb{N}$  est nulle, de plus la mesure linéaire de chaque ensemble dénombrable est nulle

La mesure logarithmique de l'ensemble  $F = [1, 5] \subset [1, \infty)$  est

$$lm(F) = \int_1^{\infty} \chi_F(t) \frac{dt}{t} = \int_1^5 \frac{dt}{t} = \ln 5.$$

La densité logarithmique inférieure de l'ensemble  $F = [5, \infty)$  est

$$\begin{aligned} \underline{\log dens}(F) &= \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{lm([5, \infty) \cap [1, r])}{\log r} \\ &= \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{lm([5, r])}{\log r}, \text{ pour } r > 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Définition 1.16** ([39]). Soit  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  une fonction entière. On définit le terme maximal de  $f$  par  $\mu(r) = \max \{|a_n| r^n; n = 0, 1, 2, \dots\}$  et on définit l'indice central de la fonction  $f$  par  $\nu_f(r) = \max \{m; \mu(r) = |a_m|\}$ .

**Exemple 1.12** Pour la fonction  $f(z) = e^z$ , on a  $\mu(r) = [r]$  et  $\nu_f(r) = [r]$ .

### 1.3 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction analytique ou méromorphe dans le disque unité

Dans la suite, on donne les définitions d'ordre et du type d'une fonction analytique et méromorphe dans le disque unité

**Théorème 1.3** (*Premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna dans le disque unité*) ([40]) Soit  $f$  une fonction méromorphe non constante sur  $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ . Alors pour tout nombre complexe  $a \neq \infty$ , on a

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1)$$

quand  $r \rightarrow 1^-$  où  $T(r, f)$  est la fonction caractéristique de Nevanlinna.

**Définition 1.17** ([40]) Soit  $f$  une fonction analytique dans le disque  $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ . Alors l'ordre et l'hyper-ordre de  $f$  sont définis respectivement par

$$\rho_M(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log^+ \log^+ M(r, f)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

$$\rho_{M,2}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log^+ \log^+ \log^+ M(r, f)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

où  $M(r, f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$ . Si  $f$  est une fonction méromorphe sur  $\Delta$ , alors l'ordre et l'hyper-ordre de  $f$  sont définis par

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log^+ T(r, f)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log^+ \log^+ T(r, f)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Il existe des fonctions analytiques dans  $\Delta$ , vérifiant  $\rho(f) \neq \rho_M(f)$ . Tsuji ([55]) a démontré le théorème suivant

**Théorème 1.4** Soit  $f$  une fonction analytique dans  $\Delta$ . Alors

$$\rho(f) \leq \rho_M(f) \leq \rho(f) + 1.$$

**Exemple 1.13** Pour la fonction  $f(z) = \exp \left\{ \frac{1}{(1-z)^2} \right\}$ , on a

$$\rho(f) = 1, \rho_M(f) = 2.$$

Par contre, pour la fonction  $f(z) = \exp \left\{ \frac{z+1}{z-1} \right\}$ , on a

$$\rho(f) = \rho_M(f) = 0.$$

Pour l'hyper-ordre des fonctions méromorphes et analytiques T. B. Cao et H. X. Yi ([19], [20], [21]) ont obtenu le résultat suivant :

**Théorème 1.5** Soit  $f$  une fonction analytique dans  $\Delta$ . Alors

$$\rho_2(f) = \rho_{2,M}(f)$$

**Exemple 1.14** Soit la fonction  $f(z) = \exp \exp \left\{ \frac{1}{(1-z)^p} \right\}$ ,  $p > 1$ . Alors

$$\rho_2(f) = \rho_{2,M}(f) = p$$

**Définition 1.18** ([45]) Soit  $f$  une fonction méromorphe dans le disque  $\Delta$  d'ordre ( $\rho > 0 < \rho < \infty$ ), on définit le type de  $f$  par

$$\sigma(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, f)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^\rho}.$$

**Définition 1.19** ([45]) Soit  $f$  une fonction analytique dans le disque  $\Delta$  d'ordre  $\rho_M$  ( $0 < \rho_M < \infty$ ), on définit le type de  $f$  par

$$\sigma_M(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log^+ M(r, f)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho_M}}.$$

**Exemple 1.15** Soit la fonction  $f(z) = \exp \left\{ \frac{1}{(1-z)^\alpha} \right\}$ ,  $\alpha > 1$ . Alors

$$\sigma_M(f) = 1 \text{ et } \frac{1}{2^{\alpha+1}} \leq \sigma(f) \leq 1.$$

**Définition 1.20** ([20]) Soit  $f$  une fonction méromorphe sur  $\Delta$ . On définit le  $p$ -ordre itératif de croissance de la fonction  $f$  par

$$\rho_p(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_p T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}} \quad (p \geq 1 \text{ est un entier}),$$

où  $T(r, f)$  est la fonction caractéristique de Nevanlinna. Si  $f$  est analytique sur  $\Delta$ , alors le  $p$ -ordre itératif de la fonction  $f$  est définie par

$$\rho_{M,p}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_{p+1} M(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}} \quad (p \geq 1 \text{ est un entier}),$$

où  $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ .

**Remarque 1.2** Pour la relation entre l'ordre des fonctions méromorphes et les fonctions analytiques, Tsuji ([55], p 205) montre que si  $f$  est une fonction analytique sur  $\Delta$ , alors on a l'inégalité

$$\rho_1(f) \leq \rho_{M,1}(f) \leq \rho_1(f) + 1,$$

et  $\rho_p(f) = \rho_{M,p}(f)$  pour  $p \geq 2$ .

**Définition 1.21** ([20]) L'indice de croissance du  $p$ -ordre itératif d'une fonction méromorphe  $f$  sur  $\Delta$  est définie par

$$i(f) = \begin{cases} 0, & \text{Si } f \text{ est non-admissible,} \\ \min \{j \in \mathbb{N} : \rho_j(f) < +\infty\}, & \text{Si } f \text{ est admissible,} \\ +\infty, & \text{Si } \rho_j(f) = +\infty \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour toute fonction  $f$  analytique sur  $\Delta$ , on définit aussi

$$i_M(f) = \begin{cases} 0, & \text{Si } f \text{ est non-admissible,} \\ \min \{j \in \mathbb{N} : \rho_{M,j}(f) < +\infty\}, & \text{Si } f \text{ est admissible,} \\ +\infty, & \text{Si } \rho_{M,j}(f) = +\infty \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Définition 1.22** [16] Soit  $f$  une fonction méromorphe sur  $\Delta$ , d'ordre  $p$ - itératif  $\rho_p(f)$  ( $0 < \rho_p(f) < +\infty$ ). Alors le  $p$ -type itératif de croissance de  $f$  est défini par

$$\sigma_p(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_{p-1} T(r, f)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho_p(f)}} \quad (p \geq 1 \text{ est un entier}).$$

Si  $f$  est une fonction analytique sur  $\Delta$ , d'ordre itératif  $\rho_{M,p}(f)$  ( $0 < \rho_{M,p}(f) < +\infty$ ), alors le  $p$ -type itératif de la fonction  $f$  est définie par

$$\sigma_{M,p}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_p M(r, f)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho_{M,p}(f)}} \quad (p \geq 1 \text{ est un entier}).$$

**Définition 1.23** ([20]) Soit  $f$  une fonction méromorphe sur  $\Delta$ . On définit le  $p$ -exposant itératif de convergence des zéros de la fonction  $f$  par

$$\lambda_p(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r}},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

et  $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$  désigne le nombre de zéros de la fonction  $f$  situés dans le disque  $|z| \leq r$ .

On définit le  $p$ -exposant itératif de convergence des zéros distincts de la fonction  $f$  par

$$\bar{\lambda}_p(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_p \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r}}.$$

**Exemple 1.16** Le  $p$ -exposant de convergence des zéros distincts de la fonction  $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{1-z}\right\}$  est égal à 0.

# Chapitre 2

## Croissance des solutions des équations différentielles d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières

### 2.1 Introduction

Soit l'équation différentielle d'ordre deux

$$f'' + e^{-z}f' + B(z)f = 0, \quad (2.1)$$

où  $B(z)$  est une fonction entière. On sait que toute solution  $f$  de l'équation (2.1) est une fonction entière, est que si  $f_1, f_2$  sont deux solutions linéairement indépendantes de (2.1), alors, au moins l'une des deux est d'ordre infini [37]. Donc, la majorité des solutions de (2.1) ont un ordre infini. Mais l'équation (2.1) où  $B(z) = -(1 + e^{-z})$  admet la solution  $f(z) = e^z$  qui est d'ordre fini.

Une question naturelle s'impose : Qu'elle est la condition sur  $B(z)$  qui nous garantit, que toute solution  $f \not\equiv 0$  de (2.1) est d'ordre infini? Frei, Ozawa, Amemiya-Ozawa et Gundersen, Langley parmi tant d'autres ont étudié ce problème. Ils ont prouvé que si  $B(z)$  est un polynôme ou  $B(z)$  est une fonction entière d'ordre  $\rho(B) \neq 1$ , alors toute solution  $f \not\equiv 0$  de (2.1) est d'ordre infini.

En 2002, Z. X. Chen [27] posa la question suivante : Qu'elle est la condition sur  $B(z)$  où  $\rho(B) = 1$  qui nous garantit que toute solution  $f \not\equiv 0$  est d'ordre infini?

Il a prouvé les résultats suivants (Théorèmes A, B et C), où il améliora les résultats de Frei, Amemiya-Ozawa, Ozawa, Langley et Gundersen.

**Théorème A** [27] Soient  $A_j(z) (\neq 0)$ , ( $j = 0, 1$ ) et  $D_j(z)$ , ( $j = 0, 1$ ) des fonctions entières avec  $\max\{\rho(A_j) (j = 0, 1), \rho(D_j) (j = 0, 1)\} < 1$ , et soient  $a, b$  deux nombres complexes tels que  $ab \neq 0$  et  $\arg a \neq \arg b$  ou  $a = cb$  ( $0 < c < 1$ ). Alors toute solution  $f \not\equiv 0$  de l'équation

$$f'' + (D_1(z) + A_1(z)e^{az})f' + (D_0(z) + A_0(z)e^{bz})f = 0 \quad (2.2)$$

est d'ordre infini.

Dans le cas où  $D_j \equiv 0$  ( $j = 0, 1$ ) le Théorème A, se réduit au théorème suivant :

**Théorème B** [27] *Soient  $A_j(z) (\neq 0)$  ( $j = 0, 1$ ) des fonctions entières avec  $\rho(A_j) < 1$  ( $j = 0, 1$ ), et soient  $a, b$  deux nombres complexes tels que  $ab \neq 0$  et  $\arg a \neq \arg b$  ou  $a = cb$  ( $0 < c < 1$ ). Alors toute solution  $f \neq 0$  de l'équation*

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = 0 \quad (2.3)$$

*est d'ordre infini.*

**Théorème C** [27] *Soient  $A_j(z) (\neq 0)$  ( $j = 0, 1$ ) des fonctions entières avec  $\rho(A_j) < 1$  ( $j = 0, 1$ ), et soient  $a, b$  deux nombres complexes tels que  $ab \neq 0$  et  $a = cb$  ( $c > 1$ ). Alors toute solution  $f \neq 0$  de l'équation (2.3) est d'ordre infini.*

Récemment dans [60], H. Y. Xu and T. B. Cao ont étudié la croissance des solutions de l'équation non homogène d'ordre supérieure et ils ont obtenu le résultat suivant :

**Théorème D** [60] *Soient  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  et  $Q(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i$  des polynômes où  $a_i, b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des nombres complexes tels que  $a_n b_n (a_n - b_n) \neq 0$ . On suppose que  $h_i$  ( $2 \leq i \leq k-1$ ) sont des polynômes d'ordre inférieure ou égal à  $n-1$ . Soient  $A_j(z) (\neq 0)$  ( $j = 0, 1$ ) et  $H \neq 0$  des fonctions entières avec  $\max\{\rho(A_j) (j = 0, 1), \rho(H)\} < n$ , et soit  $\varphi$  une fonction entière d'ordre fini. Alors toute solution  $f$  de l'équation*

$$f^{(k)} + h_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + h_2(z) f'' + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f = H, \quad (2.4)$$

*satisfait  $\rho(f) = \lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \bar{\lambda}(f - \varphi) = \infty$  et  $\rho_2(f) = \lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \bar{\lambda}_2(f - \varphi) \leq n$ .*

**Remarque 2.1** *Dans le papier original [60], le théorème était entaché d'une erreur. En plus des conditions dans le Théorème D ([60]), il fallait rajouter la condition  $H \neq 0$ . Si  $H \equiv 0$ , alors les conclusions du Théorème D sont fausses. Par exemple prenons l'équation  $f''' - f'' - 2e^z f' - e^{3z} f = 0$ , elle admet la solution  $f(z) = e^{e^z}$  avec  $\rho(f) = \infty$  et  $\lambda(f) = 0$ .*

Dans la partie suivante, les Théorèmes A,B,C et D seront généralisés pour les équations différentielles d'ordre supérieur.

## 2.2 Notre contribution

Pour  $k \geq 2$  on considère l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_2(z) f'' + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f = F. \quad (2.5)$$

on a les résultats suivants

**Théorème 2.1** [35] *Soient  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  et  $Q(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i$  des polynômes où  $a_i, b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des nombres complexes tels que  $a_n b_n (a_n - b_n) \neq 0$ . On suppose que*

$A_j(z)$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ )  $A_j \not\equiv 0$  ( $j = 0, 1$ ), et  $F$  sont des fonctions entières avec  $\max\{\rho(A_j)$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ),  $\rho(F)\} < n$ , et soit  $\varphi$  une fonction entière d'ordre fini. Alors toute solution  $f$  de l'équation (2.5) vérifie

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \rho(f) = \infty, \quad \bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \rho_2(f) \leq n. \quad (2.6)$$

de plus si  $F \not\equiv 0$ , alors toute solution  $f$  de l'équation (2.5) vérifie

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \bar{\lambda}(f - \varphi) = \rho(f) = \infty \quad (2.7)$$

et

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \rho_2(f) \leq n. \quad (2.8)$$

**Remarque 2.2** La démonstration du Théorème 2.1 est totalement différente de la démonstration du Théorème D ([59]).

**Théorème 2.2** [35] Soient  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  et  $Q(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i$  des polynômes où  $a_i, b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des nombres complexes tels que  $a_n b_n (a_n - b_n) \neq 0$ . On suppose que  $A_j(z)$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ )  $A_j \not\equiv 0$  ( $j = 0, 1$ ), est  $D_j(z)$  ( $j = 0, 1$ ),  $F$  sont des fonctions entières avec  $\max\{\rho(A_j)$  ( $j = 0, 1, \dots, k - 1$ ),  $\rho(D_j)$  ( $j = 0, 1$ ),  $\rho(F)\} < n$ , et soit  $\varphi$  une fonction entière d'ordre fini. Alors toute solution  $f$  de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_2 f'' + (D_1(z) + A_1(z) e^{P(z)}) f' + (D_0(z) + A_0(z) e^{Q(z)}) f = F \quad (2.9)$$

satisfait (2.6). de plus si  $F \not\equiv 0$ , alors, toute solution  $f$  de l'équation (2.9) satisfait (2.7) et (2.8).

**Remarque 2.3** Si on suppose que  $D_j \equiv 0$  ( $j = 0, 1$ ) dans le Théorème 2.2, on obtient le Théorème 2.1

**Remarque 2.4** Si  $\rho(F) \geq n$ , alors l'équation (2.9) peut admettre des solutions d'ordre fini. Par exemple l'équation

$$f''' - f'' + (e^{-z^n} - e^{z^{n-1}}) f' + e^{z^n} f = e^{z^n}$$

vérifie  $\rho(F) = \rho(e^{z^n}) = n$  et admet une solution d'ordre fini  $f(z) = 1$ .

**Remarque 2.5** Dans [60], H.Y. Xu et T.B. Cao ont étudié l'équation (2.9) et ils ont obtenu le même résultat du Théorème 2.2 mais avec des conditions sur les nombres  $a_n, b_n$  satisfont  $a_n b_n \neq 0$  et  $a_n b_n < 0$ , et que  $A_j$  ( $j = 2, \dots, k - 1$ ) sont des polynômes de degré  $n - 1$  en  $z$ .

**Théorème 2.3** [35] *Supposons que  $P(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $A_j(z)$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ),  $A_j \not\equiv 0$ ,  $D_j$  ( $j = 0, 1$ ), et  $\varphi(z) \not\equiv 0$  satisfont les hypothèses du Théorème 1.3, est soit  $F(z)$  une fonction entière telle que  $\rho(F) \geq n$ . Alors toute solution  $f$  de l'équation (2.9) satisfait (2.6) avec au plus une solution exceptionnelle  $f_0$  d'ordre fini. Pour la solution exceptionnelle  $f_0$  on a, si  $\rho(F) = n$ , alors  $\rho(f_0) \leq n$  et si  $\rho(F) > n$ , alors  $\rho(f_0) = \rho(F)$ .*

**Théorème 2.4** [36] *Soient  $A_j(z)$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ),  $A_j \not\equiv 0$ ,  $D_j$  ( $j = 0, 1$ ),  $F(z)$ , avec  $\max\{\rho(A_j) \mid (j = 0, 1, \dots, k-1), \rho(D_j) (j = 0, 1), \rho(F)\} < 1$ , et  $\varphi(z) \not\equiv 0$  une fonction entière d'ordre fini, et soient  $a, b$  deux nombres complexes tels que  $ab(a-b) \neq 0$ . Alors toute solution  $f$  de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_2f'' + (D_1(z) + A_1(z)e^{bz})f' + (D_0(z) + A_0(z)e^{az})f = F \quad (2.10)$$

*satisfait (2.6) avec une solution exceptionnelle  $f_0$  d'ordre fini. Pour la solution exceptionnelle  $f_0$  on a, si  $\rho(F) = 1$ , alors  $\rho(f_0) \leq 1$  et si  $\rho(F) > 1$ , alors  $\rho(f_0) = \rho(F)$ .*

**Corollaire 2.1** ([35], [12]) *Soient  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  et  $Q(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i$  des polynômes où  $a_i, b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des nombres complexes,  $a_n b_n (a_n - b_n) \neq 0$ . Soient  $A_j(z)$  ( $\not\equiv 0$ )  $D_j$  ( $j = 0, 1$ ) et  $F$  des fonctions entières avec  $\max\{\rho(A_j) (j = 0, 1), \rho(D_j) (j = 0, 1)\} < n$ . Alors toute solution  $f$  de l'équation*

$$f'' + (D_1(z) + A_1(z)e^{P(z)})f' + (D_0(z) + A_0(z)e^{Q(z)})f = F \quad (2.11)$$

*satisfait*

- (i) *Si  $\rho(F) < n$ , alors toute solution de l'équation (2.11) est d'ordre infini, est tel que  $\rho_2(f) \leq n$ .*
- (ii) *Si  $\rho(F) = n$ , alors toute solution de l'équation (2.11) est d'ordre infini, est tel que  $\rho_2(f) \leq n$  avec une solution exceptionnelle  $f_0$  qui satisfait  $\rho(f_0) \leq n$ .*
- (iii) *Si  $\rho(F) > n$ , Alors toute solution de l'équation (2.11) est d'ordre infini, avec une solution exceptionnelle  $f_0$  qui satisfait  $\rho(f_0) = \rho(F)$ .*

## 2.3 Applications

**Théorème 2.5** [14] *Soient  $A_j(z) \not\equiv 0$  ( $j = 0, 1$ ),  $F(z)$  des fonctions entières telles que  $\max\{\rho(A_j) (j = 0, 1), \rho(F)\} < 1$ , et soient  $a, b$  deux nombres complexes tels que  $ab(a-b) \neq 0$ . Alors toute solution  $f$  de l'équation*

$$f'' + A_1(z)e^{bz}f' + A_0(z)e^{az}f = F \quad (2.12)$$

*est d'ordre infini et satisfait (2.6).*

**Théorème 2.6** [14] Soient  $A_j(z) \not\equiv 0$  ( $j = 0, 1$ ),  $F(z)$  des fonctions entières telles que  $\max\{\rho(A_j) (j = 0, 1), \rho(D_j) (j = 0, 1), \rho(F)\} < 1$ , et soient  $a, b$  deux nombres complexes tels que  $ab(a - b) \neq 0$ . Alors toute solution  $f$  de l'équation

$$f'' + (D_1(z) + A_1(z)e^{bz})f' + (D_0(z) + A_0(z)e^{az})f = F \quad (2.13)$$

est d'ordre infini et satisfait (2.6).

**Théorème 2.7** [14] Soient  $A_j \not\equiv 0$  ( $j = 0, 1$ ),  $a, b$  satisfont les hypothèses du Théorème 2.6, et soit  $F(z)$  une fonction entière telle que  $\rho(F) \geq 1$ . Alors toute solution de l'équation (2.11) satisfait (2.6) avec au plus une solution exceptionnelle  $f_0$ .

## 2.4 Lemmes préliminaires

**Lemme 2.1** ([38]) Soit  $f$  une fonction méromorphe d'ordre fini  $\rho$ , soit  $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_m, j_m)\}$  un ensemble fini de nombres entiers vérifiant  $k_i > j_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ , et soit  $\varepsilon > 0$  une constante. Alors, on a

(i) Il existe un ensemble  $E_1 \subset [0, 2\pi)$  de mesure linéaire nulle, tel que si  $\psi \in [0, 2\pi) \setminus E_1$ , alors il existe une constante  $R_1 = R_1(\psi) > 1$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \psi$ ,  $|z| \geq R_1$  et pour tout  $(k, j) \in \Gamma$ , on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}.$$

(ii) Il existe un ensemble  $E_2 \subset (1, +\infty)$  de mesure logarithmique finie tel que pour tout  $z$  satisfaisant  $|z| \notin E_2 \cup [0, 1]$  et pour tout  $(k, j) \in \Gamma$ , on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}.$$

**Lemme 2.2** ([28]) Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe d'ordre  $\rho(f) = \rho < +\infty$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ensemble  $E_3 \subset [0, 2\pi)$  de mesure linéaire nulle, tel que si  $\psi_1 \in [0, 2\pi) \setminus E_3$ , alors il existe une constante  $R_2 = R_2(\psi_1) > 1$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \psi_1$  et  $|z| = r \geq R_2$ , on a

$$\exp\{-r^{\rho+\varepsilon}\} \leq |f(z)| \leq \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}.$$

**Lemme 2.3** [7] Soient  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ , ( $a_n = \alpha + i\beta \neq 0$ ) un polynôme de degré  $n \geq 1$  et  $A(z) (\not\equiv 0)$  une fonction méromorphe d'ordre  $\rho(A) < n$ . On pose  $f(z) = A(z)e^{P(z)}$ ,  $z = re^{i\theta}$ ,  $\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ensemble  $E_4 \subset [0, 2\pi)$  de mesure linéaire nulle, tel que si  $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_4 \cup E_5)$ , où  $E_5 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0\}$  est un ensemble fini, alors pour  $|z| = r$  suffisamment grand, on a

(i) Si  $\delta(P, \theta) > 0$ , alors

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1 + \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\},$$

(ii) Si  $\delta(P, \theta) < 0$ , alors

$$\exp\{(1 + \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(P, \theta)r^n\}.$$

**Lemme 2.4** [4] Soient  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$  des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si  $f$  est une solution méromorphe de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = F, \quad (2.14)$$

telle que  $\rho(f) = \infty$  et  $\rho_2(f) = \rho$ , alors  $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = \infty$  et  $\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \rho$ .

**Lemme 2.5** [7] Soient  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  et  $Q(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i$  des polynômes où  $a_i, b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des nombres complexes,  $a_n b_n \neq 0$  tels que  $\arg a_n \neq \arg b_n$  ou  $a_n = c b_n$  ( $0 < c < 1$ ). On note par les ensembles des indices

$$\Lambda_1 = \{0, P\},$$

$$\Lambda_2 = \{0, P, Q, 2P, P + Q\},$$

(i) Si  $H_j$  ( $j \in \Lambda_1$ ) et  $H_Q \not\equiv 0$  sont des fonctions méromorphes d'ordre strictement inférieur à  $n$ , et si on pose  $\Psi_1(z) = \sum_{j \in \Lambda_1} H_j(z) e^j$ , alors  $\Psi_1(z) + H_Q e^Q \not\equiv 0$ .

(ii) Si  $H_j$  ( $j \in \Lambda_2$ ) et  $H_{2Q} \not\equiv 0$  sont des fonctions méromorphes d'ordre strictement inférieur à  $n$ , posons  $\Psi_2(z) = \sum_{j \in \Lambda_2} H_j(z) e^j$ , alors  $\Psi_2(z) + H_{2Q} e^{2Q} \not\equiv 0$ .

Si on remplace  $P(z)$  par  $Q(z)$  dans le Lemme 2.5, on obtient le lemme suivant.

**Lemme 2.6** [35] Soient  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  et  $Q(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i$  des polynôme où  $a_i, b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des nombres complexes tels que  $a_n b_n \neq 0$  et  $\arg a_n \neq \arg b_n$  ou  $a_n = c b_n$  ( $c > 1$ ). On note par l'ensemble des indices

$$\Lambda_1 = \{0, Q\},$$

Si  $H_j$  ( $j \in \Lambda_1$ ) et  $H_P \not\equiv 0$  sont des fonctions méromorphes d'ordre strictement inférieur à  $n$ , et si on pose  $\Psi_1(z) = \sum_{j \in \Lambda_1} H_j(z) e^{jz}$ , alors  $\Psi_1(z) + H_P e^{P(z)} \not\equiv 0$ .

**Lemme 2.7** ([29]) Soit  $f(z)$  une fonction entière transcendante. Alors il existe un ensemble  $E_6 \subset (1, \infty)$  de mesure logarithmique finie tel que, si  $z$  satisfait  $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_6$ , et  $|f(z)| = M(r, f)$ , on a

$$\left| \frac{f(z)}{f^{(s)}(z)} \right| \leq 2r^s.$$

**Lemme 2.8** [48] Soient  $f(z)$  et  $g(z)$  deux fonctions entières non constantes avec  $\sigma(g) < \sigma(f) < +\infty$ . Étant donné  $\varepsilon > 0$  avec  $0 < 4\varepsilon < \sigma(f) - \sigma(g)$  et  $0 < \delta < \frac{1}{4}$ , il existe un ensemble  $E$  avec  $\overline{\log \text{dens}}(E) > 0$  et une constante positive  $r_0$  telle que

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| \leq \exp \{-r^{\sigma(f)-2\varepsilon}\} \quad (2.15)$$

pour tout  $z$  tel que  $|z| = r \in E$  est suffisamment grand et que  $|f(z)| \geq M(r, f) v_f(r)^{-\frac{1}{4}+\delta}$ .

**Lemme 2.9** [35] Soient  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  et  $Q(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i$  des polynômes où  $a_i, b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des nombres complexes tels que  $a_n b_n (a_n - b_n) \neq 0$ . On suppose que  $A_j(z)$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ )  $A_j \not\equiv 0$  ( $j = 0, 1$ ) et  $D_j(z)$  ( $j = 0, 1$ ) sont des fonctions entières avec  $\max\{\rho(A_j) \mid j = 0, 1, \dots, k-1\}, \rho(D_j) \mid j = 0, 1\} < n$ . Posons

$$L_f = f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + (D_1(z) + A_1(z) e^{P(z)}) f' + (D_0(z) + A_0(z) e^{Q(z)}) f \quad (2.16)$$

Si  $f \not\equiv 0$  est une fonction entière d'ordre fini, alors

$$\rho(L_f) = \begin{cases} n & \text{si } \rho(f) < n, \\ \rho(f) & \text{si } \rho(f) \geq n. \end{cases}$$

**Preuve** Si  $f \not\equiv 0$  est une fonction entière d'ordre fini. Alors, d'après (2.16), on a  $\rho(L_f) \leq \max\{n, \rho(f)\}$ .

(i) Si  $\rho(f) = \rho < n$ , alors  $\rho(L_f) \leq n$ . Supposons que  $\rho(L_f) < n$ . De (2.16), on a

$$\begin{aligned} f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_2 f'' + (D_1(z) + A_1(z) e^{P(z)}) f' \\ + (D_0(z) + A_0(z) e^{Q(z)}) f - L_f = 0 \end{aligned}$$

cette équation s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) + H_Q e^{Q(z)} = f^{(k)} + (D_{k-1}(z) + A_{k-1}) f^{(k-1)} + \dots + A_2 f'' + D_1(z) f' \\ + D_0(z) f - L_f + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) f e^{Q(z)} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \Psi_2(z) + H_P e^{P(z)} = f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_2 f'' + D_1(z) f' + D_0(z) f \\ - L_f + A_0(z) f e^{Q(z)} + A_1(z) f' e^{P(z)} = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

c'est une contradiction avec le Lemme 2.5 (i) ou le Lemme 2.6, donc  $\rho(L_f) = n$ .

(ii) Si  $\rho(f) = \rho \geq n$ , alors  $\rho(L_f) \leq \rho(f)$ . On suppose que  $\rho(L_f) < \rho(f)$ . On écrit (2.16) sous la forme

$$\frac{L_f}{f} = \frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \dots + A_2 \frac{f''}{f} + (D_1(z) + A_1(z) e^{P(z)}) \frac{f'}{f}$$

$$+D_0(z) + A_0(z) e^{Q(z)}. \quad (2.18)$$

On distingue trois cas :

**Cas 1.** On suppose que  $\arg a_n \neq \arg b_n$ . Soit

$$\max \{ \rho(A_j) \ (j = 0, 1, \dots, k-1), \rho(D_j) \ (j = 0, 1) \} = \beta < n.$$

Alors, pour tout  $\varepsilon \left( 0 < \varepsilon < \min \left( n - \beta, \frac{\rho(f) - \rho(L_f)}{4} \right) \right)$ , on a pour tout  $r$  suffisamment grand

$$|D_j(z)| \leq \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} \ (j = 0, 1), |A_j(z)| \leq \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} \ (j = 0, 1, \dots, k-1). \quad (2.19)$$

D'après le Lemme 2.8, on sait qu'il existe un ensemble  $E_7$  avec  $\overline{\log dens}(E_7) > 0$  et une constante positive  $r$  telle que

$$\left| \frac{L_f}{f} \right| \leq \exp \{ -r^{\rho(f)-2\varepsilon} \} \leq 1 \quad (2.20)$$

pour tout  $z$  tel que  $r \in E_7$  est suffisamment grand et que  $|f(z)| \geq M(r, f) v_f(r)^{\delta - \frac{1}{8}}$ , d'après le Lemme 2.1, pour le même  $\varepsilon$  précédent, il existe un ensemble  $E_1 \subset [0, 2\pi)$  de mesure linéaire nulle, tel que si  $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1$ , alors il existe une constante  $R_1 = R_1(\theta) > 1$  telle que pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \theta$  et  $|z| \geq R_1$ , on a

$$\left| \frac{f^{(i)}(z)}{f(z)} \right| \leq |z|^{i(\rho-1+\varepsilon)} \ (i = 1, \dots, k). \quad (2.21)$$

D'après le Lemme 2.3, il existe un rayon  $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1 \cup E_4 \cup E_5$ , tel que  $E_5 = \{ \theta \in [0, 2\pi) : \delta(P(z), \theta) = 0 \text{ ou } \delta(Q(z), \theta) = 0 \} \subset [0, 2\pi)$  et  $E_1 \cup E_4$  est de mesure linéaire nulle,  $E_5$  est un ensemble fini et on a :

$$\delta(P(z), \theta) < 0, \delta(Q(z), \theta) > 0.$$

Pour tout  $\varepsilon \left( 0 < \varepsilon < \min \left( n - \beta, \frac{\rho(f) - \rho(L_f)}{4} \right) \right)$ , en tenant compte des relations (2.19), (2.21) et le Lemme 2.3 on a pour  $|z| = r$  suffisamment grand :

$$|A_0 e^{Q(z)}| \geq \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(Q(z), \theta) r^n \}, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f^{(k-1)}}{f} + A_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \dots + A_2 \frac{f''}{f} + D_0(z) \right| \\ & \leq \left| \frac{f^{(k-1)}}{f} \right| + |A_{k-1}| \left| \frac{f^{(k-1)}}{f} \right| + \dots + |A_2| \left| \frac{f''}{f} \right| + |D_0(z)| \\ & \leq r^{k(\rho-1+\varepsilon)} + r^{(k-1)(\rho-1+\varepsilon)} \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} + \dots + r^{2(\rho-1+\varepsilon)} \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} + \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} \\ & \leq (k-1) r^{k(\rho-1+\varepsilon)} \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \left| (D_1(z) + A_1(z) e^{P(z)}) \frac{f'}{f} \right| & \leq r^{(\rho-1+\varepsilon)} \left( \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(P(z), \theta) r^n \} + \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} \right) \\ & \leq r^{(\rho-1+\varepsilon)} (1 + \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

De (2.18), (2.20) et (2.22) – (2.24), on a

$$\begin{aligned} \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(Q(z), \theta) r^n \} &\leq |A_0 e^{Q(z)}| \\ &\leq K r^{k(\rho-1+\varepsilon)} \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \}, \end{aligned}$$

où  $K$  est une constante réelle. Ceci se contredit avec  $\beta + \varepsilon < n$ . Donc  $\rho(L_f) = \rho(f)$ .

**Cas 2.** Supposons que  $a_n = cb_n$  ( $0 < c < 1$ ). Alors, pour tout rayon  $\arg z = \theta$ , on a

$$\delta(P(z), \theta) = c\delta(Q(z), \theta).$$

Pour tout  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \min(\frac{1-c}{2(1+c)}, n - \beta, \frac{\rho(f)-\rho(g)}{4})$ ), d'après le Lemme 2.1 et le Lemme 2.3 il existe  $E_j \subset [0, 2\pi)$  ( $j = 1, 4, 5$ ) tels que  $E_1, E_4$  sont de mesures linéaires nulles et  $E_5$  est un ensemble fini, où  $E_1, E_4$  et  $E_5$  sont définis dans le Cas 1 respectivement. On prend le rayon  $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1 \cup E_4 \cup E_5$  tel que  $\delta(Q(z), \theta) > 0$  et pour  $|z| = r$  suffisamment grand, on a d'après (2.22) – (2.24) et (2.18), (2.20) la relation suivante

$$\begin{aligned} \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(Q(z), \theta) r^n \} &\leq |A_0 e^{Q(z)}| \leq (k-1) r^{k(\rho-1+\varepsilon)} \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} \\ &\quad + r^{(\rho-1+\varepsilon)} \left( \exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(P(z), \theta) r^n \} + \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} \right) + 1 \\ &\leq k r^{k(\rho-1+\varepsilon)} \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \} + r^{\rho-1+\varepsilon} \exp \{ (1 + \varepsilon) c\delta(Q(z), \theta) r^n \} + 1. \end{aligned} \quad (2.25)$$

En utilisant le fait que  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \min(\frac{1-c}{2(1+c)}, n - \beta, \frac{\rho(f)-\rho(L_f)}{4})$ ), quand  $r$  tend vers l'infini, on déduit que :

$$\frac{r^{k(\rho-1+\varepsilon)} \exp \{ r^{\beta+\varepsilon} \}}{\exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(Q(z), \theta) r^n \}} \rightarrow 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{r^{\rho-1+\varepsilon} \exp \{ (1 + \varepsilon) c\delta(Q(z), \theta) r^n \}}{\exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(Q(z), \theta) r^n \}} \rightarrow 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{\exp \{ (1 - \varepsilon) \delta(Q(z), \theta) r^n \}} \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

De (2.25) – (2.28), on trouve  $1 \leq 0$ . C'est une contradiction. donc  $\rho(L_f) = \rho(f)$ .

**Cas 3.** Supposons que  $a_n = cb_n$  ( $c > 1$ ). On peut écrire (2.16) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{L_f f}{f f'} &= \frac{f^{(k)}}{f'} + A_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f'} + \dots + A_2 \frac{f''}{f'} + (D_0(z) + A_0(z) e^{Q(z)}) \frac{f}{f'} \\ &\quad + D_1(z) + A_1(z) e^{P(z)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

D'après le Lemme 2.7, il existe un ensemble  $E_6 \subset (1, +\infty)$  de mesure logarithmique finie tel que pour tout  $z$  satisfaisant  $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_6$  et  $|f(z)| = M(r, f)$ , on a

$$\left| \frac{f(z)}{f'(z)} \right| \leq 2r. \quad (2.30)$$

D'après le Lemme 2.8, pour tout  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \min(\frac{c-1}{2(c+1)}, n - \beta, \frac{\rho(f)-\rho(L_f)}{4})$ ), il existe un ensemble  $E_7$  avec  $\overline{\log dens}(E_7) > 0$  et une constante positive  $r$  tels que

$$\left| \frac{L_f}{f} \right| \leq \exp \{ -r^{\rho(f)-2\varepsilon} \} \leq 1. \quad (2.31)$$

Comme  $E_6 \subset (1, +\infty)$  est de mesure logarithmique finie et  $E_7$  satisfait  $\overline{\log dens}(E_7) > 0$  on déduit que  $\overline{\log dens}(E_7 - E_6) > 0$ . D'après le Lemme 2.7 pour  $|z| = r$  suffisamment grand, on obtient

$$\left| \frac{L_f}{f'} \right| = \left| \frac{L_f f}{f f'} \right| \leq 2r \exp \{-r^{\rho(f)-2\varepsilon}\} \leq 2r. \quad (2.32)$$

Pour tout rayon  $\arg z = \theta$ , on a

$$\delta(P(z), \theta) = c\delta(Q(z), \theta).$$

Le Lemme 2.3, implique l'existence d'un rayon  $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E_1 \cup E_4 \cup E_5$ ,  $E_5 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P(z), \theta) = 0 \text{ or } \delta(Q(z), \theta) = 0\} \subset [0, 2\pi)$ ,  $E_1 \cup E_4$  de mesure linéaire nulle,  $E_5$  un ensemble fini tel que

$$\delta(P(z), \theta) = c\delta(Q(z), \theta) > 0.$$

D'après le Lemme 2.3 et (2.19), (2.20) (2.30), pour  $|z| = r$  suffisamment grand, on a

$$|A_1 e^{P(z)}| \geq \exp \{(1 - \varepsilon) c\delta(Q(z), \theta) r^n\}, \quad (2.33)$$

$$\left| (D_0(z) + A_0(z) e^{Q(z)}) \frac{f}{f'} \right| \leq 2r \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} + 2r \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(Q(z), \theta) r^n\}, \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f^{(k)}}{f'} + A_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f'} + \dots + A_2 \frac{f''}{f'} + D_1 \right| \\ &= \left| \frac{f(z)}{f'(z)} \right| \left| \frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1} \frac{f^{(k-1)}}{f} + \dots + A_2 \frac{f''}{f} + D_1 \right| \\ &\leq 2r(k-1) r^{k(\rho-1+\varepsilon)} \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

De (2.29), (2.32) et (2.33)-(2.35), on obtenu

$$\begin{aligned} & \exp \{(1 - \varepsilon) c\delta(Q(z), \theta) r^n\} \leq |A_1 e^{P(z)}| \\ &\leq 2r(k-1) r^{k(\rho-1+\varepsilon)} \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} + 2r \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} \\ &+ 2r \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(Q(z), \theta) r^n\} + 2r \\ &\leq 2r(k r^{k(\rho-1+\varepsilon)} \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\} + \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(Q(z), \theta) r^n\} + 1). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Pour  $\varepsilon \left( 0 < \varepsilon < \min\left(\frac{c-1}{2(c+1)}, n - \beta, \frac{\rho(f)-\rho(g)}{4}\right) \right)$ , on a quand  $r \rightarrow +\infty$

$$\frac{r^{(k-1)(\rho-1+\varepsilon)} \exp \{r^{\beta+\varepsilon}\}}{\exp \{(1 - \varepsilon) c\delta(Q(z), \theta) r^n\}} \rightarrow 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{2r \exp \{(1 + \varepsilon) \delta(Q(z), \theta) r^n\}}{\exp \{(1 - \varepsilon) c\delta(Q(z), \theta) r^n\}} \rightarrow 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{2r}{\exp\{(1-\varepsilon)c\delta(Q(z),\theta)r^n\}} \rightarrow 0. \quad (2.39)$$

D'après (2.36) – (2.39), on obtient  $1 \leq 0$ . C'est une contradiction. Donc  $\rho(L_f) = \rho(f)$ .

Si on pose  $D_j \equiv 0$  ( $j = 0, 1$ ) dans le Lemme 2.9, on obtient le lemme suivant :

**Lemme 2.10** [35] *Soient  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  et  $Q(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i$  des polynômes où  $a_i, b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des nombres complexes,  $a_n b_n (a_n - b_n) \neq 0$ . On suppose que  $A_j \not\equiv 0$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ) sont des fonctions entières avec  $\max\{\rho(A_j) \mid j = 0, 1, \dots, k-1\} < n$ . Posons*

$$L_f = f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f. \quad (2.40)$$

Si  $f \not\equiv 0$  est une fonction entière d'ordre fini, alors

$$\rho(L(f)) = \begin{cases} n & \text{if } \rho(f) < n \\ \rho(f) & \text{if } \rho(f) \geq n \end{cases}$$

**Remarque 2.6** *Les lemmes 2.9, 2.10 nous permettent de conclure que  $\rho(L_f) \geq n$  pour toute fonction entière d'ordre fini  $f \not\equiv 0$ .*

**Lemme 2.11** [5] *Soient  $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z), F \not\equiv 0$  des fonctions entières d'ordre fini. Si  $f$  est une solution de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) f' + A_0(z) f = F, \quad (2.41)$$

alors  $\rho_2(f) \leq \max\{\rho(A_0), \dots, \rho(A_{k-1}), \rho(F)\}$ .

## 2.5 Preuves des théorèmes

### 2.5.1 Preuve du Théorème 2.1

Supposons que  $f$  est une solution de l'équation (2.5). Nous montrons que  $f$  est d'ordre infini. Par l'absurde, on suppose que  $\rho(f) < \infty$ . D'après la remarque 2.6, on a  $n \leq \rho(L_f) = \rho(F) < n$  c'est une contradiction. Donc, toute solution de l'équation (2.5) est d'ordre infini est d'après Lemme 2.11, on obtient  $\rho_2(f) \leq n$ . Supposons que  $\varphi(z) \not\equiv 0$  une fonction entière d'ordre fini. On pose  $g = f - \varphi$ , alors  $f = g + \varphi$  et on a  $\rho(f) = \rho(g) = \infty$ ,  $\rho_2(f) = \rho_2(g) \leq n$ . On a,  $g$  est une solution de l'équation

$$g^{(k)} + A_{k-1} g^{(k-1)} + \dots + A_2(z) g'' + A_1(z) e^{P(z)} g' + A_0(z) e^{Q(z)} g = G,$$

où  $G = F - (\varphi^{(k)} + A_{k-1} \varphi^{(k-1)} + \dots + A_2 \varphi'' + A_1 e^{P(z)} \varphi' + A_0 e^{Q(z)} \varphi)$ . Comme  $\varphi(z) \not\equiv 0$  et  $\rho(\varphi) < \infty$  on a  $G \not\equiv 0$  et  $\rho(G) < \infty$ , alors le Lemme 2.4 nous donne

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \rho(f - \varphi) = \rho(f) = \infty, \quad \bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \rho_2(f - \varphi) = \rho_2(f) \leq n$$

De plus si  $F \neq 0$ , comme  $f$  est une solution d'ordre fini de l'équation (2.5), alors d'après le Lemme 2.4 on a

$$\lambda(f) = \bar{\lambda}(f) = \bar{\lambda}(f - \varphi) = \rho(f) = \infty$$

$$\lambda_2(f) = \bar{\lambda}_2(f) = \bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \rho_2(f) \leq n.$$

### Preuve du Théorème 2.2

En utilisant les Lemmes 2.10, Lemme 2.12, Lemme 2.4 et le même raisonnement du Théorème 2.1, on obtient le Théorème 2.2.

### Preuve du Théorème 2.3

Supposons que  $f_0$  est une solution de (2.5) avec  $\rho(f_0) = \rho < \infty$ . Si  $f_1$  une autre solution d'ordre fini de (2.5), alors  $\rho(f_1 - f_0) < \infty$ , et  $f_1 - f_0$  est une solution l'équation homogène de (2.5), mais  $\rho(f_1 - f_0) = \infty$  d'après le Théorème 2.2, c'est une contradiction. Donc (2.5) a au plus une solution d'ordre fini  $f_0$  et toute solution  $f_1$  de (2.5) est d'ordre infini et satisfait  $\bar{\lambda}(f_1) = \lambda(f_1) = \rho(f_1) = \infty$ . Si  $\rho(F) > n$ , supposons qu'il existe une solution  $f_0$  (2.5) telle que  $\rho(f_0) < \infty$ , alors on a  $\rho(f_0) > n$  et d'après le Lemme 2.11 on obtient  $\rho(F) = \rho(L_f) = \rho(f_0)$ . Supposons que  $\rho(F) = n$ , s'il existe une solution  $f_0$  de (2.5) avec  $\rho(f_0) < \infty$ , alors  $\rho(f_0) \leq n$ . Si on suppose que  $\rho(f_0) > n$ , alors d'après le Lemme 2.11 on obtient  $\rho(L_f) = \rho(f_0) = \rho(F) > n$ , c'est une contradiction.

### Preuve du Corollaire 2.1

En utilisant les Théorèmes 2.3, 2.4 on obtient le Corollaire 2.1.

# Chapitre 3

## Croissance des solutions des équations différentielles d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes

Dans ce, chapitre, on s'intéresse à l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes. Pour cela, on va introduire des conditions sur l'ordre des coefficients.

Pour  $k \geq 2$  on considère l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f = F,$$

où  $A_j$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ),  $F \not\equiv 0$  sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles, et il existe  $s \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  tel que  $\max\{\rho(A_j), (j = 0, 1, \dots, s-1, s+1, \dots, k-1)\} < \rho(A_s)$ . On obtient quelques estimations sur l'ordre et l'exposant de convergence des zéros de l'équation ci-dessus.

### 3.1 Introduction

L'étude de la croissance ainsi que la théorie d'oscillation complexe des solutions des équations différentielles complexes ont fait l'objet de plusieurs travaux.

Soit  $k \geq 2$  un entier naturel, on considère l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f = F, \tag{3.1}$$

où  $A_j$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ),  $F \not\equiv 0$  sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Dans [21], Chen et Gao ont étudié l'oscillation de l'équation (3.1) et ils ont obtenu le résultat suivant :

**Théorème A** ([21]) *Soient  $k \geq 2$  un nombre naturel et  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$  des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles, où il existe  $A_s$  ( $0 \leq s \leq k-1$ ) tel que pour les constantes réelles  $\alpha > 0, \beta > 0$ , on a  $\rho(A_j) < \beta$  ( $j = 0, 1, \dots, s-1, s+1, \dots, k-1$ ) et  $\rho(F) < \beta$ . Supposons que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe deux collections finies des nombres*

réelles  $\{\phi_m\}$  et  $\{\theta_m\}$  vérifiant

$$\phi_1 < \theta_1 < \phi_2 < \theta_2 < \dots < \phi_n < \theta_n < \phi_{n+1} = \phi_1 + 2\pi \quad (3.2)$$

et

$$\sum_{m=1}^n (\phi_{m+1} - \theta_m) < \varepsilon \quad (3.3)$$

telles que

$$|A_s(z)| \geq \exp \left\{ (1 + o(1)) \alpha |z|^\beta \right\} \quad (3.4)$$

quand  $z \rightarrow \infty$  dans  $\phi_m \leq \arg z \leq \theta_m$  ( $m = 1, \dots, n$ ). Si l'équation (3.1) a une solution méromorphe  $f$ , alors

(a)  $f$  est un polynôme de  $\deg f \leq s - 1$ , ou une fonction méromorphe d'ordre infini telle que

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = \infty. \quad (3.5)$$

Et si toute solution de l'équation (3.1) est méromorphe, alors (3.1) a au moins une solution méromorphe d'ordre infini qui satisfait (3.5).

(b) Si  $A_0, A_1, \dots, A_{s-1}, F$  satisfont l'une des cinq conditions :

(i) Il existe  $A_{m_1}, \dots, A_{m_d}$  ( $s - 1 \geq m_1 > \dots > m_d \geq 0$ ),  $F$  transcendante,  $\rho(A_{m_j})$  ( $j = 1, \dots, d$ ),  $\rho(F)$  sont inégaux entre eux.

(ii) Il existe et n'existe que  $A_{m_1}, \dots, A_{m_d}$  ( $s - 1 \geq m_1 > \dots > m_d = 0$ ) transcendentes,  $\rho(A_{m_j})$  ( $j = 1, \dots, d$ ) sont inégaux entre eux ou  $d = 1$ ,  $F$  est rationnelle.

(iii)  $A_0, A_1, \dots, A_{s-1}$  sont toutes des fonctions rationnelles,  $F$  est transcendante.

(iv) Il existe et n'existe que  $A_{m_1}, \dots, A_{m_d}$  ( $s - 1 \geq m_1 > \dots > m_d > 0$ ) transcendentes,  $\rho(A_{m_j})$  ( $j = 1, \dots, d$ ) sont inégaux entre eux ou  $d = 1$ , et  $F$  est une fonction rationnelle ayant au moins un pôle  $z_0$  ( $|z_0| < \infty$ ), tel que  $z_0$  n'est pas un pôle des fonctions rationnelles  $A_0, A_1, \dots, A_{m_d-1}$ .

(v)  $A_0, A_1, \dots, A_{s-1}, F$  sont des fonctions rationnelles et  $F$  a au moins un pôle  $z_0$  ( $|z_0| < \infty$ ), tel que  $z_0$  n'est pas un pôle de  $A_0, A_1, \dots, A_{s-1}$ .

Alors toute solution méromorphe  $f$  de l'équation (3.1) est d'ordre infini et satisfait (3.5).

**Théorème B** ([21]) Soient  $k \geq 2$  un nombre naturel et  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F \neq 0$  sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles, où il existe  $A_s$  ( $0 \leq s \leq k - 1$ ) tel que pour les constantes réelles  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , on a  $\rho(A_j) < \beta \leq \rho(F)$  ( $j = 0, 1, \dots, s - 1, s + 1, \dots, k - 1$ ). Supposons que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe deux collections finies des nombres complexes  $\{\phi_m\}$  et  $\{\theta_m\}$  satisfont (3.2), (3.3) tels que (3.4) est vrai quand  $z \rightarrow \infty$  dans  $\phi_m \leq \arg z \leq \theta_m$  ( $m = 1, \dots, n$ ). Si l'équation (3.1) a une solution méromorphe, alors

(a) Toute solution méromorphe d'ordre infini de (3.1) satisfait (3.5). Si toutes les solutions de l'équation (3.1) sont méromorphes, alors (3.1) a au moins une solution qui satisfait (3.5). Toutes les solutions d'ordre fini possible de l'équation (3.1) ont le même ordre de croissance  $\rho$  ( $0 \leq \rho < \infty$ ). S'il existe deux solutions d'ordre fini  $f_0, f_1$  de l'équation (3.1), alors  $f_0 - f_1$  est un polynôme de degré  $\deg(f_0 - f_1) \leq s - 1$  et  $f_0$  satisfait  $\rho = \rho(f_0) \leq \max \{ \rho(F), \rho(A_s), \bar{\lambda}(f_0) \}$ . Si  $\bar{\lambda}(f_0) < \rho(f_0)$ ,  $\rho(F) \neq \rho(A_s)$ , alors  $\rho = \rho(f_0) = \max \{ \rho(F), \rho(A_s) \}$ .

(b) Si parmi les  $A_0, A_1, \dots, A_{s-1}$ , il existe et n'existe que  $A_{m_1}, \dots, A_{m_d}$  ( $s-1 \geq m_1 > \dots > m_d = 0$ ) transcendentes,  $\rho(A_{m_j})$  ( $j = 1, \dots, d$ ) sont inégaux entre eux ou  $d = 1$ , alors toutes les solutions méromorphes de (3.1) satisfont (3.5) avec au plus une solution possible afin finie méromorphe.

## 3.2 Notre contribution

Dans cette partie, on va étudier l'oscillation complexe des équations non-homogènes d'ordre supérieur (3.1). Le but de ce travail est d'améliorer et d'étendre les résultats ci-dessus en exprimant la condition de croissance du coefficient dominante  $A_s(z)$  de façon plus explicite sans faire usage de  $o(1)$ . Nous allons prouver les théorèmes suivants :

**Théorème 3.1** [17] Soient  $k \geq 2$  un nombre naturelle et  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$  des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles. On Suppose qu'il existe  $A_s$  ( $0 \leq s \leq k-1$ ) telle que pour les constantes  $\alpha, \delta$  avec  $\alpha > 0, \delta > 0$ , on a

$$\max \{ \rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, s-1, s+1, \dots, k-1, \rho(F) \} < \delta \quad (3.6)$$

et que :

- (i)  $\max \{ \rho(A_j) : j = 1, \dots, s-1, \rho(F) \} < \rho(A_0)$  ou
- (ii)  $\max \{ \rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, s-1 \} < \rho(F)$ .

Supposons que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe deux collections fini des nombre réels  $\{\phi_m\}$  et  $\{\theta_m\}$  satisfaisant (3.2), (3.3) et

$$|A_s(z)| \geq \exp \left\{ \alpha |z|^\delta \right\} \quad (3.7)$$

quand  $z \rightarrow \infty$  dans  $\phi_m \leq \arg z \leq \theta_m$  ( $m = 1, \dots, n$ ).

(a) Si l'équation (3.1) a une solution méromorphe  $f$ , alors

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = \infty. \quad (3.8)$$

(b) Si l'équation (3.1) a une solution méromorphe  $f$  et  $\varphi$  est une solution méromorphe d'ordre fini, alors

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = \rho(f) = \infty. \quad (3.9)$$

**Remarque 3.1** Dans le Théorème 3.1, si l'une des conditions

$$\max \{ \rho(A_j) : j = 1, \dots, s-1, \rho(F) \} < \rho(A_0)$$

ou

$$\max \{ \rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, s-1 \} < \rho(F),$$

n'est pas vérifiée alors l'équation (3.1) peut admettre une solution polynômiale. Par exemple l'équation

$$f'''' + \frac{\sinh z^3}{z^4 + 1} f'''' + \frac{e^{z^2}}{2(z+1)} f'' - \frac{e^{z^2}}{2(z^2-1)} f' + \frac{z}{(z^2-1)^2} f = \frac{z}{(z+1)^2} \quad (3.10)$$

a une solution polynômiale  $f(z) = (z-1)^2$ . L'équation (3.10) satisfait les hypothèses du Théorème 3.1 excepté la condition

$$\max\{\rho(A_j) : j = 1, 2, \rho(F)\} < \rho(A_0)$$

ou

$$\max\{\rho(A_j) : j = 0, 1, 2\} < \rho(F).$$

Du Théorème 3.1, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 3.1** [17] *On suppose que  $A_0, \dots, A_{k-1}, F \not\equiv 0, \alpha, \delta, \varepsilon, \{\phi_m\}$  et  $\{\theta_m\}$  satisfont les hypothèses du Théorème 3.1. Alors toute solution méromorphe  $f$  de l'équation (3.1) possède un nombre infini de points fixes et*

$$\bar{\lambda}(f-z) = \lambda(f-z) = \rho(f) = \infty. \quad (3.11)$$

**Théorème 3.2** [17] *Supposons que  $k \geq 2$  un nombre naturel et  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles. On suppose qu'il existe  $A_s$  ( $0 \leq s \leq k-1$ ) tel que pour  $\alpha, \delta$  avec  $\alpha > 0, \delta > 0$ , on a*

$$\max\{\rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, s-1, s+1, \dots, k-1\} < \delta \quad (3.12)$$

et

$$\max\{\rho(A_j) : j = 1, \dots, s-1\} < \rho(A_0), \quad (3.13)$$

soit  $F \not\equiv 0$  une fonction méromorphe d'ordre fini  $\rho(F) \geq \delta$ . Supposons que pour tout  $\varepsilon > 0$ , les deux collections finies des nombres réels  $\{\phi_m\}$  et  $\{\theta_m\}$  satisfont (3.2), (3.3) telles que (3.7) est vérifié quand  $z \rightarrow \infty$  dans  $\phi_m \leq \arg z \leq \theta_m$  ( $m = 1, \dots, n$ ).

Si (3.1) a des solutions méromorphes, alors

(a) Toute solution méromorphe de l'équation (3.1) satisfait (3.8) avec une solution exceptionnelle d'ordre fini  $f_0$ . Si toute solution de (3.1) est méromorphe, alors (3.1) a une solution qui satisfait (3.8).

(b) S'il existe une solution exceptionnelle d'ordre fini  $f_0$  dans le cas (a), alors  $f_0$  satisfait

$$\rho(f_0) \leq \max\{\rho(F), \rho(A_s), \bar{\lambda}(f_0)\}. \quad (3.14)$$

Si  $\bar{\lambda}(f_0) < \rho(f_0), \rho(F) \neq \rho(A_s)$ , alors  $\rho(f_0) = \max\{\rho(F), \rho(A_s)\}$ .

(c) Si  $f$  est une solution d'ordre infini de (3.1) et  $\varphi$  est une fonction méromorphe d'ordre fini qui n'est pas une solution de l'équation de (3.1), alors

$$\bar{\lambda}(f-\varphi) = \lambda(f-\varphi) = \rho(f) = \infty. \quad (3.15)$$

Du Théorème 3.2, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 3.2** [17] *On suppose que  $A_0, \dots, A_{k-1}, F \not\equiv 0, \alpha, \delta, \varepsilon, \{\phi_m\}$  et  $\{\theta_m\}$  satisfont les hypothèses du Théorème 3.2. alors*

(i) s'il existe une solution méromorphe d'ordre fini  $f_0$  dans le cas (a), alors pour toute solution d'ordre infini  $f$  de l'équation (3.1) et pour toute constante  $C \neq 1$ , on a

$$\bar{\lambda}(f-Cf_0) = \lambda(f-Cf_0) = \rho(f) = \infty. \quad (3.16)$$

(ii) Si  $F - A_1 - zA_0 \not\equiv 0$ , alors toute solution d'ordre infini  $f$  de l'équation (3.1) possède un nombre infini de points fixes et

$$\bar{\lambda}(f - z) = \lambda(f - z) = \rho(f) = \infty. \quad (3.17)$$

Dans ce que suit nous étudions la relation entre les solutions de deux équations différentielles :

**Théorème 3.3** [17] *Supposons que  $A_0, \dots, A_{k-1}, \alpha, \delta, \varepsilon, \{\phi_m\}$  et  $\{\theta_m\}$  satisfont les hypothèses du Théorème 3.2, et que  $F_1 \not\equiv 0, F_0 \not\equiv 0$  sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles, telles que  $\rho(F_1) < \delta, \rho(F_0) \geq \delta$ . Si l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f = F_1 \quad (3.18)$$

possède une solution méromorphe  $f_1$  et l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f = F_0 \quad (3.19)$$

possède une solution méromorphe, alors (3.19) a au plus une solution méromorphe  $f_0$  qui satisfait

$$\rho(f_0 - Cf_1) \leq \max \{ \rho(F_0), \rho(A_s), \bar{\lambda}(f_0 - Cf_1) \} \quad (3.20)$$

et toutes les autres solutions méromorphes  $f_2$  de (3.19) satisfont

$$\bar{\lambda}(f_2 - Cf_1) = \lambda(f_2 - Cf_1) = \rho(f_2 - Cf_1) = \infty \quad (3.21)$$

pour toute constante  $C$ .

**Théorème 3.4** [17] *Supposons que  $A_0, \dots, A_{k-1}, \alpha, \delta, \varepsilon, \{\phi_m\}$  et  $\{\theta_m\}$  satisfont les hypothèses du Théorème 3.2, et que  $F_1 \not\equiv 0, F_0 \not\equiv 0$  sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles, telles que  $F_0 \not\equiv CF_1$  pour toute constante  $C$ . Supposons que*

$$\max \{ \rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, s-1, s+1, \dots, k-1, \rho(F_0), \rho(F_1) \} < \delta \quad (3.22)$$

et

$$\max \{ \rho(A_j) : j = 1, \dots, s-1, \rho(F_0), \rho(F_1) \} < \rho(A_0). \quad (3.23)$$

Alors toutes les solutions de (3.18) et (3.29) satisfont (3.21).

### 3.3 Lemmes préliminaires

**Lemme 2.1** (Phragmén-Lindelöf, voir [45, p. 214]). *Soit  $f(z)$  une fonction analytique dans  $D = \{z : \alpha_1 < \arg z < \beta_1, r_0 < |z| < \infty\}$  et continue sur  $\bar{D} = D \cup \Gamma$ , où  $\Gamma$  est le bord de  $D$ . Si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $r_1(\varepsilon) > 0$  tel que pour  $|z| \geq r_1(\varepsilon), z \in D$ , on a*

$$|f(z)| < \exp \left\{ \varepsilon |z|^{\frac{\pi}{\beta_1 - \alpha_1}} \right\}, \quad (3.24)$$

et pour  $z \in \Gamma$ , on a  $|f(z)| \leq M$  ( $M > 0$  est une constante), alors  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z \in D$ .  $|f(z)| = M$  si et seulement si  $f$  est constante.

**Remarque 3.1** (voir [21]). Supposons que  $g(z)$  est une fonction analytique dans  $D = \{z : \alpha_1 < \arg z < \beta_1, r_0 \leq |z| < \infty\}$  et  $|g(z)| \leq \exp\{|z|^\sigma\}$  pour une constante  $0 \leq \sigma < \infty$ . Si le sous-ensemble  $E \subset (\alpha_1, \beta_1)$  est de mesure linéaire et pour tout  $\psi_0 \in (\alpha_1, \beta_1) - E$ ,  $|g(z)|$  est bornée pour tout  $z$  satisfaisant  $\arg z = \psi_0$  et  $|z| \geq r_0$ , alors pour tout suffisamment petit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $r_1(\varepsilon) > r_0$  tel que  $|g(z)| \leq \exp\{\varepsilon|z|^{\sigma+1}\}$  pour  $|z| = r > r_1$ . On peut choisir  $\theta_j \in (\alpha_1, \beta_1) - E$  ( $j = 1, \dots, n$ ) telle que  $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$  ( $\alpha_1 < \theta_1 \leq \alpha_1 + \varepsilon$ ,  $\beta_1 - \varepsilon \leq \theta_n < \beta_1$ ) et  $\max\{\theta_{j+1} - \theta_j : 1 \leq j \leq n-1\} < \frac{\pi}{\sigma+1}$ . Du Lemme 3.1,  $|g(z)| \leq M$  dans le secteur  $\{z : \theta_j \leq \arg z \leq \theta_{j+1}, |z| \geq r_0\}$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ). Donc  $|g(z)| \leq M$  dans le secteur  $\{z : \alpha_1 + \varepsilon \leq \arg z \leq \beta_1 - \varepsilon, |z| \geq r_0\}$ .

**Lemme 3.2** ([21]) Soient  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F$  des fonctions méromorphe telles que  $A_s$  ( $0 \leq s \leq k-1$ ) soit transcendante. Si toutes les solutions de (3.1) sont méromorphes, alors (3.1) doit avoir des solutions d'ordre infini.

**Lemme 3.4** [17] Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles se trouvant tous dans  $\{z : |z| < r_0\}$ , et supposons que  $|f^{(k)}(z_n)|$  n'est pas bornée sur un rayon  $\arg z = \theta$ , alors il existe une séquence  $z_n = r_n e^{i\theta}$  tendant vers l'infini telle que  $f^{(k)}(z_n) \rightarrow \infty$  et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)} \right| \leq \frac{1}{(k-j)!} (1 + o(1)) |z_n|^{k-j} \quad (j = 0, \dots, k-1). \quad (3.26)$$

*Preuve.* Soit  $M(r, \theta, f^{(k)}) = \max\{|f^{(k)}(z)| : r_0 \leq |z| \leq r, \arg z = \theta\}$ . Il existe une suite infinie de points  $z_n = r_n e^{i\theta}$ ,  $r_n \geq r_0$ ,  $r_n \rightarrow \infty$  telle que pour tout  $n$ , on a  $M(r_n, \theta, f^{(k)}) = |f^{(k)}(z_n)| \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Pour tout  $n$ , d'après  $(k-j)$ -fois intégration réitéré le long du chemin  $L_1 : z = r e^{i\theta}$ ,  $r_0 \leq r \leq |z_n|$

$$\begin{aligned} f^{(j)}(z_n) &= f^{(j)}(r_0 e^{i\theta}) + f^{(j+1)}(r_0 e^{i\theta}) \frac{(z_n - r_0 e^{i\theta})}{1!} \\ &+ \dots + \frac{1}{(k-j-1)!} f^{(k-1)}(r_0 e^{i\theta}) (z_n - r_0 e^{i\theta})^{k-j-1} + \int_{r_0 e^{i\theta}}^{z_n} \dots \int_{r_0 e^{i\theta}}^{z_n} f^{(k)}(t) dt. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Par conséquent, par l'inégalité triangulaire et par  $|f^{(k)}(z)| \leq |f^{(k)}(z_n)|$  dans le chemin  $L_1$  on a

$$\begin{aligned} |f^{(j)}(z_n)| &\leq |f^{(j)}(r_0 e^{i\theta})| + |f^{(j+1)}(r_0 e^{i\theta})| \frac{|z_n - r_0 e^{i\theta}|}{1!} \\ &+ \dots + \frac{1}{(k-j-1)!} |f^{(k-1)}(r_0 e^{i\theta})| |(z_n - r_0 e^{i\theta})|^{k-j-1} + \\ &\frac{1}{(k-j)!} |f^{(k)}(z_n)| |(z_n - r_0 e^{i\theta})|^{k-j}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

quand  $z_n \rightarrow \infty$ , d'après (3.28) on obtient

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)} \right| \leq \frac{1}{(k-j)!} (1 + o(1)) |z_n|^{k-j} \quad (j = 0, \dots, k-1). \quad (3.29)$$

Le Lemme suivant est une généralisation du Lemme 3 dans [21].

**Lemme 3.5** [17] Supposons que  $k \geq 2$  est un nombre naturel et  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  sont fonctions méromorphes ayant seulement un nombre fini de pôles se situant tous dans  $\{z : |z| < r_0\}$ . Pour des constantes réelles  $\alpha, \delta, \theta_1, \theta_2$  telles que  $\alpha > 0$ ,  $\delta > 0$  et  $\theta_1 < \theta_2$ , nous avons pour un certain  $A_s$  ( $0 \leq s \leq k-1$ )

$$|A_s(z)| \geq \exp\left(\alpha |z|^\delta\right) \quad (3.30)$$

quand  $z \rightarrow \infty$  dans  $D = \{z : \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2, r_0 \leq |z| < \infty\}$  et

$$\eta = \max\{\rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, s-1, s+1, \dots, k-1\} < \delta. \quad (3.31)$$

Si  $f \not\equiv 0$  est une solution méromorphe de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f = 0 \quad (3.32)$$

avec  $\rho(f) = \rho < \infty$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $M > 0$  telle que  $|f(z)| \leq M|z|^\rho$  pour tout  $z$  dans  $D_1(\varepsilon) = \{z : \theta_1 + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_2 - \varepsilon, r_0 \leq |z| < \infty\}$ .

**Preuve.** Étant donné que les pôles de  $f$  sont déduits des pôles de  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$ , alors  $f$  a un nombre fini de pôles, ces pôles sont tous dans  $\{z : |z| < r_0\}$ . Soit  $\rho(f) = \rho < \infty$ . Alors d'après le Lemme 3.3, pour tout  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \min\{1, \delta - \eta\}$ ) donné, il existe un ensemble  $E \subset [0, 2\pi)$  de mesure linéaire égale à zéro tel que si  $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E$ , alors il existe une constante  $R_0 = R_0(\psi_0) > 1$  telle que pour tout  $j = s+1, \dots, k$ , on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(s)}(z)} \right| \leq |z|^{(j-s)(\rho-1+\varepsilon)} \leq |z|^{(k-s)\rho} \quad (3.33)$$

pour  $|z| \geq R_0$  le long de  $\arg z = \psi_0$ .

Supposons maintenant que  $|f^{(s)}(z)|$  n'est pas bornée sur un rayon d'un certain  $\arg z = \phi_0$ , ou  $\phi_0 \in [\theta_1, \theta_2] - E$ ,  $r_0 \leq |z| < \infty$ . Alors d'après le Lemme 3.4, il existe une suite infinie de points  $z_n = r_n e^{i\phi_0}$ , où  $r_n \rightarrow \infty$  telle que  $f^{(s)}(z_n) \rightarrow \infty$  et

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| \leq \frac{1}{(s-j)!} (1 + o(1)) |z_n|^{s-j} \leq 2|z_n|^s \quad (j = 0, \dots, s-1) \quad (3.34)$$

quand  $z_n \rightarrow \infty$ . De l'équation (3.32), il résulte de (3.31), (3.33) et (3.34) quand  $z_n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |A_s(z_n)| &\leq \left| \frac{f^{(k)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| + \left| \frac{f^{(k-1)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| |A_{k-1}| + \dots + \left| \frac{f^{(s+1)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| |A_{s+1}| \\ &\quad + \left| \frac{f^{(s-1)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| |A_{s-1}| + \dots + \left| \frac{f(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| |A_0| \\ &\leq M_0 \exp\{|z_n|^{\eta+\varepsilon}\} |z_n|^{M_1} \leq M_0 \exp\left\{\frac{\alpha}{2} |z_n|^\delta\right\} |z_n|^{M_1}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

ou  $M_0 > 0$ ,  $M_1 > 0$  sont des constantes. Ainsi (3.35) contredit (3.7). Donc,  $f^{(s)}(z)$  est bornée sur tout rayon arbitraire  $\arg z = \psi_0 \in [\theta_1, \theta_2] - E$ ,  $r_0 \leq |z|$ . De la Remarque 3.1, il est facile de voir que  $|f^{(s)}(z)| \leq M_2$  dans

$$D_1(\varepsilon) = \{z : \theta_1 + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_2 - \varepsilon, r_0 \leq |z| < \infty\} \quad (3.36)$$

pour une certaine constante  $M_2 > 0$ . Pour un point arbitraire  $z = re^{i\psi}$  ( $\theta_1 + \varepsilon \leq \psi \leq \theta_2 - \varepsilon$ ,  $r_0 \leq r$ ), par  $s$ -fois intégration réitéré le long du chemin  $L_2 = \{z : \arg z = \psi, r_0 \leq |z| \leq r\}$ , on a

$$\begin{aligned} f(z) &= f(r_0 e^{i\psi}) + f'(r_0 e^{i\psi}) \frac{z}{1!} + \dots + \frac{1}{(s-1)!} f^{(s-1)}(r_0 e^{i\psi}) z^{s-1} \\ &\quad + \int_{r_0 e^{i\psi}}^z \dots \int_{r_0 e^{i\psi}}^z f^{(s)}(t) dt \dots dt. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Par conséquent, par l'inégalité triangulaire élémentaire et  $|f^{(s)}(z)| \leq M_2$ , on obtient de (3.37) pour un point arbitraire  $z$  dans  $D_1(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(r_0 e^{i\psi})| + |f'(r_0 e^{i\psi})| \frac{|z|}{1!} + \dots + \frac{1}{(s-1)!} |f^{(s-1)}(r_0 e^{i\psi})| |z|^{s-1} \\ &\quad + \frac{M_2}{s!} |z|^s \leq M |z|^s, \end{aligned} \quad (3.38)$$

où  $M > 0$  est une constante.

Le résultat suivant est une extension du Lemme 3 en [21].

**Lemme 3.6** [17] Supposons que  $A_0, \dots, A_{k-1}, \alpha, \delta, \varepsilon, \theta_1, \theta_2, D, D_1(\varepsilon)$  satisfont les hypothèses du Lemme 3.5 et  $F \not\equiv 0$  est une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles se trouvant tous dans  $\{z : |z| < r_0\}$  avec  $\rho(F) < \delta$ . Si  $f$  est une solution méromorphe de (3.1) avec  $\rho(f) = \rho < \infty$ , alors  $|f(z)| \leq M |z|^\rho$  pour tout  $z$  dans  $D_1(\varepsilon)$  pour une certaine constante  $M > 0$ .

**Preuve :** Soit  $\rho(f) = \rho < \infty$ . D'après (3.1), nous savons que les pôles de  $f$  sont deduis des pôles de  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  et  $F$ . Donc  $f$  a un nombre fini de pôles, ces pôles sont tous dans  $\{z : |z| < r_0\}$ . En utilisant le même raisonnement que dans le Lemme 3.5, il est facile de voir que (3.10) reste valable pour  $f(z)$ . Si nous supposons que  $|f^{(s)}(z)|$  n'est pas bornée sur un certain rayon  $\arg z = \phi_0$  où  $\phi_0 \in [\theta_1, \theta_2] - E$ ,  $r_0 \leq |z| < \infty$ , en utilisant le même raisonnement que dans le Lemme 3.5, il est facile de voir que (3.11) est vérifiée. De  $|f^{(s)}(z_n)| \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ), on peut supposer que  $|f^{(s)}(z_n)| \geq 1$  pour tout  $n$ . Comme

$$\left| \frac{F(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| \leq |F(z_n)| \leq \exp \left\{ |z_n|^{\rho(F)+\varepsilon} \right\} \leq \exp \left\{ \frac{\alpha}{2} |z_n|^\delta \right\} \quad (\rho(F) + \varepsilon < \delta), \quad (3.39)$$

alors, de (3.1), (3.31), (3.33), (3.34) et (3.39), on a

$$|A_s(z_n)| \leq \left| \frac{f^{(k)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| + \left| \frac{f^{(k-1)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| |A_{k-1}| + \dots + \left| \frac{f^{(s+1)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| |A_{s+1}|$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \frac{f^{(s-1)}(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| |A_{s-1}| + \dots + \left| \frac{f(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| |A_0| + \left| \frac{F(z_n)}{f^{(s)}(z_n)} \right| \\
& \leq M_2 \exp \left\{ \frac{\alpha}{2} |z_n|^\delta \right\} |z_n|^{M_1}, \tag{3.40}
\end{aligned}$$

où  $M_2 > 0$ ,  $M_1 > 0$  sont des constantes. D'où (3.40) contredit (3.7). Donc  $|f^{(s)}(z)|$  est bornée sur tout rayon arbitraire  $\arg z = \psi_0 \in [\theta_1, \theta_2] - E$ ,  $|z| \geq r_0$ . Et aussi en utilisant le même raisonnement que dans le Lemme 3.5, nous avons  $|f(z)| \leq M |z|^s$  pour tout  $z$  dans  $D_1(\varepsilon)$  pour une certaine constante  $M > 0$ .

**Lemme 3.7** [17] Supposons que  $k \geq 2$  est un nombre naturel et  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles, se trouvant tous dans  $\{z : |z| < r_0\}$ . Supposons qu'il existe un  $A_s$  ( $0 \leq s \leq k-1$ ) tel que pour des constantes réelles  $\alpha, \delta$  avec  $\alpha > 0$ ,  $\delta > 0$  on a

$$\eta = \max \{ \rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, s-1, s+1, \dots, k-1 \} < \delta \tag{3.41}$$

et

$$\max \{ \rho(A_j) : j = 1, \dots, s-1 \} < \rho(A_0). \tag{3.42}$$

Supposons que pour tout  $\varepsilon > 0$  donné, il existe deux collections finies de nombres réels  $\{\phi_m\}$  et  $\{\theta_m\}$  qui satisfont (3.2) et (3.3). Dans  $D_m = \{z : \phi_m \leq \arg z \leq \theta_m, r_0 \leq |z| < \infty\}$  ( $m = 1, \dots, n$ ) quand  $z \rightarrow \infty$ , on a

$$|A_s(z)| \geq \exp \left\{ \alpha |z|^\delta \right\}. \tag{3.43}$$

Si  $f(z) \not\equiv 0$  est une solution méromorphe de (3.32), alors  $f$  est d'ordre infini.

*Preuve :* Soit  $f \not\equiv 0$  une solution méromorphe de (3.32) avec  $\rho(f) = \rho < \infty$ . De (3.32), nous savons que  $f$  ne possède qu'un nombre fini de pôles. Supposons que tous les pôles de  $f$  sont dans  $\{z : |z| < r_0\}$ . Par les hypothèses, pour tout  $\varepsilon$   $\left( 0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{\pi}{3(\rho + \frac{1}{4})}, \delta - \eta \right\} \right)$  donné, il existe deux collections finies de nombres réels  $\{\phi_m\}$  et  $\{\theta_m\}$  qui satisfont (3.2), (3.3). Supposons que  $A_s$  satisfait (3.20) dans  $D_m$  ( $m = 1, \dots, n$ ) et  $A_j$  ( $j = 0, 1, \dots, s-1, s+1, \dots, k-1$ ) satisfait

$$|A_j(z)| \leq \exp \{ |z|^{\eta + \varepsilon} \} \leq \exp \left\{ \frac{\alpha}{2} |z|^\delta \right\}. \tag{3.44}$$

Par le Lemme 3.4, nous avons

$$|f(z)| \leq M |z|^s \quad (M > 0), \tag{3.45}$$

dans  $D_m^*(\varepsilon) = \{z : \phi_m + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_m - \varepsilon, r_0 \leq |z| < \infty\}$  ( $m = 1, \dots, n$ ).

D'autre part, comme  $\rho(f) = \rho < \infty$  et  $f$  ne dispose qu'un nombre fini de pôles dans le secteur  $\theta_m - \varepsilon \leq \arg z \leq \phi_{m+1} + \varepsilon$  ( $m = 1, \dots, n$ ), nous pouvons poser  $f(z) = \frac{g(z)}{p(z)}$ , où  $p(z)$  est un polynôme,  $g(z)$  est une fonction entière avec  $\rho(g) = \rho(f) = \rho < \infty$ . Il existe  $r_1 > r_0$  tel que pour  $r > r_1$ , on a  $|p(z)| \geq 1$ ,  $|g(z)| \leq \exp \left\{ r^{\rho + \frac{1}{4}} \right\}$  et  $|f(z)| = \left| \frac{g(z)}{p(z)} \right| \leq |g(z)| \leq$

$\exp \left\{ r^{\rho + \frac{1}{4}} \right\}$ . D'après (3.3) et  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{3(\rho + \frac{1}{4})}$ , on a  $(\phi_{m+1} + \varepsilon) - (\theta_m - \varepsilon) < 3\varepsilon < \frac{\pi}{\rho + \frac{1}{4}}$ . Donc il existe  $R > 1 + r_1$  telle que pour  $r > R$ , on a  $r^{\rho + \frac{1}{4}} < \varepsilon r^{\frac{\pi}{(\phi_{m+1} + \varepsilon) - (\theta_m - \varepsilon)}}$ . D'où

$$\left| \frac{f(z)}{z^s} \right| \leq |f(z)| \leq \exp \left\{ |z|^{\rho + \frac{1}{4}} \right\} \leq \exp \left\{ \varepsilon |z|^{\frac{\pi}{(\phi_{m+1} + \varepsilon) - (\theta_m - \varepsilon)}} \right\} \quad (3.46)$$

pour  $r > R$ . De (3.22) et  $\frac{f(z)}{z^s}$  est analytique dans  $|z| = r_0$ , on sait que  $\left| \frac{f(z)}{z^s} \right| \leq M$  dans  $\{z : \arg z = \theta_m - \varepsilon, |z| \geq r_0\} \cup \{z : \arg z = \phi_{m+1} + \varepsilon, |z| \geq r_0\} \cup \{z : z = r_0 e^{i\psi}, \theta_m - \varepsilon \leq \psi \leq \phi_{m+1} + \varepsilon\}$ . D'après la Remarque 3.1 et (3.23), on a  $\left| \frac{f(z)}{z^s} \right| \leq M$  pour tout  $z \in \{z : \theta_m - \varepsilon \leq \arg z \leq \phi_{m+1} + \varepsilon, r_0 \leq |z| < \infty\}$  ( $m = 1, \dots, n$ ). De (3.22), on a  $\left| \frac{f(z)}{z^s} \right| \leq M$  pour  $|z| \geq r_0$ , i.e.,  $|g(z)| \leq M |z^s p(z)|$ . Comme  $g$  est entière, on a  $|g(z)| \leq M_1$  pour une certaine constante  $M_1 > 0$  pour  $|z| \leq r_0$ . Ainsi  $|g(z)| \leq M |z^s p(z)| + M_1$  dans tout le plan. D'où  $g(z)$  est un polynôme, i.e.,  $f$  est une fonction rationnelle.

Si  $f$  est une fonction rationnelle et a un pôle en  $z_0$  d'ordre  $l \geq 1$ , alors  $f^{(s)}$  a un pôle en  $z_0$  d'ordre  $l + s$  et  $\rho(f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f) = \rho(A_s) \geq \delta > 0$ . Ceci est en contradiction avec (3.22). Ainsi  $f$  est un polynôme. Si  $f$  est un polynôme de  $\deg f \geq s$ , alors  $\rho(f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f) = \rho(A_s) \geq \delta > 0$  ce qui contredit (3.22). Si  $f$  est un polynôme non nul de  $\deg f \leq s - 1$ , alors  $\rho(A_{s-1}f^{(s-1)} + \dots + A_0f) = \rho(A_0) > 0$ . Ceci est en contradiction avec (3.22). Par conséquent, toute solution méromorphe  $f \not\equiv 0$  de (3.32) satisfait  $\rho(f) = \infty$ .

**Lemme 3.8** [17] Supposons que  $A_0, \dots, A_{k-1}, \alpha, \delta, \varepsilon, r_0, \{\phi_m\}, \{\theta_m\}$  et  $D_m$  satisfont les hypothèses du Lemme 3.7, et que  $F \not\equiv 0$  est une fonction méromorphe d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles seulement se trouvent tous dans  $\{z : |z| < r_0\}$  telle que  $\rho(F) < \delta$  et soit :

- (i)  $\max \{\rho(A_j) : j = 1, \dots, s - 1, \rho(F)\} < \rho(A_0)$  ou
- (ii)  $\max \{\rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, s - 1\} < \rho(F)$ .

Si  $f$  est une solution méromorphe de (3.1), alors  $\rho(f) = \infty$ .

*Preuve.* Soit  $f$  une solution méromorphe de (3.1) avec  $\rho(f) = \rho < \infty$ . En utilisant le même raisonnement dans le Lemme 3.6 et en vertu du Lemme 3.5, il est facile de voir que  $|f(z)| \leq M |z|^s$  pour une certaine constante  $M > 0$  dans  $D_m^*(\varepsilon) = \{z : \phi_m + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_m - \varepsilon, r_0 \leq |z| < \infty\}$  ( $m = 1, \dots, n$ ). De même, dans  $\theta_m - \varepsilon \leq \arg z \leq \phi_{m+1} + \varepsilon$  ( $m = 1, \dots, n$ ), en utilisant également le même raisonnement que dans le Lemme 3.7, nous voyons que  $|f(z)| \leq M |z|^s$  dans  $D_m^{**}(\varepsilon) = \{z : \theta_m - \varepsilon \leq \arg z \leq \phi_{m+1} + \varepsilon, r_0 \leq |z| < \infty\}$  ( $m = 1, \dots, n$ ). Donc  $f$  est une fonction rationnelle.

Si  $f$  est rationnelle et a un pôle en  $z_0$  d'ordre  $l \geq 1$  ou si  $f$  est un polynôme avec  $\deg f \geq s$ , alors  $\rho(f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f) = \rho(A_s) \geq \delta > \rho(F)$ . Ceci est en contradiction avec (3.1). Si  $f$  est un polynôme non nul de  $\deg f \leq s - 1$ , alors si  $\max \{\rho(A_j) : j = 1, \dots, s - 1, \rho(F)\} < \rho(A_0)$ , on a

$$\rho(A_{s-1}f^{(s-1)} + \dots + A_0f) = \rho(A_0) > \rho(F).$$

Ceci est en contradiction avec (3.1). Si  $\max\{\rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, s-1\} < \rho(F)$ , alors

$$\rho(f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f) \leq \max\{\rho(A_j) : j = 0, 1, \dots, s-1\} < \rho(F).$$

Ceci est en contradiction avec (3.1). Donc, chaque solution méromorphe  $f$  de (3.1) est d'ordre infini.

### 3.4 Preuve du Théorème 3.1

(a) Comme  $f$  est une solution méromorphe de l'équation (3.1) d'après le Lemme 3.8, on a  $\rho(f) = +\infty$ . Du Lemme 3.9, la solution  $f$  satisfait (3.9).

(b) Soit  $g = f - \varphi$ . Comme  $f$  est une solution de l'équation (3.1), alors on a  $\rho(g) = \rho(f) = \infty$ . En remplaçant  $f = g + \varphi$  dans l'équation (3.1), on obtient

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + \dots + A_0g = F - (\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \dots + A_0\varphi). \quad (3.47)$$

Comme  $\rho(\varphi) < +\infty$ , alors on a

$$F - (\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \dots + A_0\varphi) \neq 0 \quad (3.48)$$

et le Lemme 3.9, on obtient  $\bar{\lambda}(g) = \lambda(g) = \rho(g) = \rho(f) = \infty$ , i.e.,

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = \rho(f) = \infty. \quad (3.49)$$

### 3.5 Preuve du Théorème 1.2

(a) Supposons que  $f_0$  est une solution méromorphe de l'équation (3.1) avec  $\rho(f_0) = \rho < \infty$ . Si  $f_1$  est une autre solution méromorphe d'ordre fini de l'équation (3.1), alors  $\rho(f_1 - f_0) < \infty$ , et  $f_1 - f_0$  est une solution de l'équation homogène (3.9), donc  $\rho(f_1 - f_0) = \infty$  d'après le Lemme 3.7. C'est une contradiction. Donc (3.1) a au plus une solution méromorphe d'ordre fini  $f_0$  et toute autre solution méromorphe  $f_1$  de (3.1) satisfait (3.9) d'après le Lemme 3.9. Si toute solution de (3.1) est méromorphe, alors d'après les Lemmes 3.2 et 3.9, (3.1) a au moins une solution qui satisfait (3.9).

(b) Supposons que  $f_0$  est une solution méromorphe de (3.1) avec  $\rho(f_0) < \infty$ . d'après (3.1) nous pouvons écrire

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{F} \left( \frac{f_0^{(k)}}{f_0} + A_{k-1} \frac{f_0^{(k-1)}}{f_0} + \dots + A_1 \frac{f_0'}{f_0} + A_0 \right). \quad (3.50)$$

Il s'ensuit que si  $f_0(z)$  a un zéro en  $z_0$  d'ordre  $\alpha > k$ , alors  $F$  doit avoir un zéro au  $z_0$  d'ordre  $\alpha - k$ . Donc

$$n \left( r, \frac{1}{f_0} \right) \leq k \bar{n} \left( r, \frac{1}{f_0} \right) + n \left( r, \frac{1}{F} \right) \quad (3.51)$$

et

$$N \left( r, \frac{1}{f_0} \right) \leq k \bar{N} \left( r, \frac{1}{f_0} \right) + N \left( r, \frac{1}{F} \right). \quad (3.52)$$

En appliquant le lemme de la dérivée logarithmique ([9])

$$m\left(r, \frac{f_0^{(j)}}{f_0}\right) = O(\ln r) \quad (j = 1, \dots, k) \quad (\rho(f_0) < +\infty). \quad (3.53)$$

De la relation (3.50), on a

$$m\left(r, \frac{1}{f_0}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=1}^k m\left(r, \frac{f_0^{(j)}}{f_0}\right) + O(1). \quad (3.54)$$

Alors de (3.52), (3.53) et (3.54) on obtient

$$\begin{aligned} T(r, f_0) &= T\left(r, \frac{1}{f_0}\right) + O(1) \\ &\leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f_0}\right) + T(r, F) + \sum_{j=0}^{k-1} T(r, A_j) + O(\log r). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Posons  $\beta = \max\{\rho(A_s), \rho(F)\}$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$  donné et  $r$  assez grand, on a

$$T(r, F) < r^{\beta+\varepsilon}, \quad T(r, A_j) < r^{\beta+\varepsilon} \quad (j = 0, \dots, k-1). \quad (3.57)$$

Donc, d'après (3.56), (3.57), l'inégalité

$$T(r, f_0) \leq k\bar{N}\left(r, \frac{1}{f_0}\right) + (k+1)r^{\beta+\varepsilon} + O(\log r) \quad (3.58)$$

est vraie pour  $r$  un assez grand, d'où

$$\rho(f_0) \leq \max\{\beta, \bar{\lambda}(f_0)\} = \max\{\rho(A_s), \rho(F), \bar{\lambda}(f_0)\}. \quad (3.59)$$

Si  $\bar{\lambda}(f_0) < \rho(f_0)$ ,  $\rho(A_s) \neq \rho(F)$ , alors d'après (3.59), on a

$$\rho(f_0) \leq \max\{\rho(A_s), \rho(F)\}$$

et de (3.1), on obtient

$$\rho(f_0) \geq \max\{\rho(A_s), \rho(F)\}.$$

Donc

$$\rho(f_0) = \max\{\rho(A_s), \rho(F)\}.$$

(c) Soit  $g = f - \varphi$ . Si  $f$  est une solution de (3.1) avec  $\rho(f) = \infty$ , alors on a  $\rho(g) = \rho(f) = \infty$ . En substituant  $f = g + \varphi$  dans l'équation (3.1), on obtient

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + \dots + A_0g = F - (\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \dots + A_0\varphi).$$

Comme  $\varphi$  n'est pas une solution de (3.1), alors on a

$$F - (\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \dots + A_0\varphi) \not\equiv 0$$

et par le Lemme 3.9, nous obtenons  $\bar{\lambda}(g) = \lambda(g) = \rho(g) = \rho(f) = \infty$ , i.e.,

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = \rho(f) = \infty.$$

### 3.6 Preuve du Corollaire 3.2

(i) Supposons que  $f$  et  $f_0$  sont des solutions de l'équation (3.1) avec  $\rho(f) = \infty$  et  $\rho(f_0) < \infty$ . Soit  $g = f - Cf_0$ , donc on a  $\rho(g) = \rho(f) = \infty$ . En remplaçant  $f = g + Cf_0$  dans l'équation (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + \dots + A_0g &= F - C \left( f_0^{(k)} + A_{k-1}f_0^{(k-1)} + \dots + A_0f_0 \right) \\ &= (1 - C)F. \end{aligned}$$

Comme  $C \neq 1$  et  $F \not\equiv 0$ , alors on a  $(1 - C)F \not\equiv 0$  et le Lemme 3.9, nous donne  $\bar{\lambda}(g) = \lambda(g) = \rho(g) = \rho(f) = \infty$ , i.e.,

$$\bar{\lambda}(f - Cf_0) = \lambda(f - Cf_0) = \rho(f) = \infty.$$

(ii) Soit  $f$  une solution méromorphe de (1.1) avec  $\rho(f) = \infty$ . Posons  $g = f - z$ , on a  $\rho(g) = \rho(f) = \infty$ . En remplaçant  $f = g + z$  dans l'équation (3.1), on obtient

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + \dots + A_0g = F - A_1 - zA_0.$$

Comme  $F - A_1 - zA_0 \not\equiv 0$ , d'après le Lemme 3.9, on obtient  $\bar{\lambda}(g) = \lambda(g) = \rho(g) = \rho(f) = \infty$ , i.e.,

$$\bar{\lambda}(f - z) = \lambda(f - z) = \rho(f) = \infty.$$

### 3.7 Preuve du Théorème 3.3

Soient  $f_1$  une solution méromorphe de l'équation (3.18) et  $f_2$  une solution méromorphe de l'équation (3.19). Posons  $g = f_2 - Cf_1$ . Alors  $g$  est une solution méromorphe de l'équation

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + \dots + A_0g = F_0 - CF_1. \quad (3.60)$$

De  $\rho(F_0 - CF_1) = \rho(F_0) \geq \delta$  et le Théorème 3.2 l'équation (3.60) a au plus une solution d'ordre fini  $g_0 = f_0 - Cf_1$  satisfaisant

$$\rho(g_0) \leq \max\{\rho(F_0), \rho(A_s), \bar{\lambda}(g_0)\},$$

i.e.,

$$\rho(f_0 - Cf_1) \leq \max\{\rho(F_0), \rho(A_s), \bar{\lambda}(f_0 - Cf_1)\}$$

et toute autre solution  $g = f_2 - Cf_1$  de (3.60) satisfait

$$\bar{\lambda}(f_2 - Cf_1) = \lambda(f_2 - Cf_1) = \rho(f_2 - Cf_1) = \infty.$$

### 3.8 Preuve du Théorème 3.4

Soient  $f_1$  une solution méromorphe de l'équation (3.18) et  $f_2$  une solution méromorphe de l'équation (3.19). Posons  $g = f_2 - Cf_1$ . Alors  $g$  est une solution méromorphe de l'équation

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + \dots + A_0g = F_0 - CF_1.$$

De  $F_0 - CF_1 \not\equiv 0$ ,  $\rho(F_0 - CF_1) < \delta$  et le Théorème 3.1, on a  $\rho(g) = \infty$ . Donc, d'après le Lemme 3.9, on obtient

$$\bar{\lambda}(f_2 - Cf_1) = \lambda(f_2 - Cf_1) = \rho(f_2 - Cf_1) = \infty.$$

# Chapitre 4

## Oscillation des points fixes des solutions des équations différentielles

Dans ce chapitre on va étudier la relation entre les solutions des équations différentielles et les fonctions d'ordre fini

### 4.1 Introduction

Z.X. Chen est le premier qui a étudié en 2000 (voir [26]) les points fixes des solutions de l'équation

$$f'' + A(z)f = 0, \quad (4.1)$$

où  $A(z)$  une fonction entière transcendante ou un polynôme.

En 2004, J. Wang, J. et W. R. Lü (voir [58]) ont étudié la croissance et les points fixes des solutions et leur dérivées de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux (4.1) avec  $A$  est une fonction méromorphe transcendante et ils ont obtenu le résultat suivant :

**Théorème 4.1** (voir [58]) *Supposons que  $A(z)$  est une fonction méromorphe transcendante avec  $\delta(\infty, A) > 0$ ,  $\rho(A) = \rho < +\infty$ . Alors  $f \not\equiv 0$ ,  $f'$  et  $f''$  possèdent une infinité de points fixes et*

$$\bar{\lambda}(f - z) = \bar{\lambda}(f' - z) = \bar{\lambda}(f'' - z) = \rho(f) = +\infty, \quad (4.2)$$

$$\bar{\lambda}_2(f - z) = \bar{\lambda}_2(f' - z) = \bar{\lambda}_2(f'' - z) = \rho_2(f) = \rho, \quad (4.3)$$

où  $f$  est une solution de l'équation (4.1).

En 2006 le Théorème 4.1 a été généralisé par Liu Ming-Sheng et Zhang Xiao-Mei [50] pour l'équation,

$$f^{(k)} + A(z)f = 0 \quad (k \geq 2) \quad (4.4)$$

de la manière suivante :

**Théorème 4.2** (voir [50]) *On suppose que  $k \geq 2$  et  $A(z)$  est une fonction méromorphe transcendante avec  $\delta(\infty, A) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(r, f)}{T(r, f)} = \delta > 0$ ,  $\rho(A) = \rho < +\infty$ . Alors  $f \not\equiv 0$ ,  $f'$ ,  $f''$ , ..., et  $f^{(k)}$  possèdent une infinité de points fixes et*

$$\bar{\lambda}(f - z) = \bar{\lambda}(f' - z) = \dots = \bar{\lambda}(f^{(k)} - z) = \rho(f) = +\infty, \quad (4.5)$$

$$\bar{\lambda}_2(f - z) = \bar{\lambda}_2(f' - z) = \dots = \bar{\lambda}_2(f^{(k)} - z) = \rho_2(f) = \rho. \quad (4.6)$$

où  $f$  est une solution de l'équation (4.4)

Dans ce que suit, on généralise les Théorèmes 4.1 et 4.2 où nous remplaçons  $z$  par une fonction méromorphe d'ordre fini, et pour bien contrôler les solutions on étudie la relation entre le polynôme différentiel et les fonctions de petites croissances "small functions".

**Théorème 4.3** (voir [8]) *Soit  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante avec  $\rho(A) = \rho > 0$  telle que  $\delta(\infty, A) = \delta > 0$ , soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des polynômes non tous nuls, et soit  $\varphi(z)$  ( $\not\equiv 0$ ) une fonction méromorphe d'ordre fini. Si  $f$  est une solution de l'équation (4.1) avec  $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < +\infty$ , alors le polynôme différentiel  $g(z) = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$  satisfait  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \rho(f) = +\infty$ .*

**Théorème 4.4** (voir [8]) *Supposons que  $k \geq 2$  et  $A(z)$  est une fonction méromorphe transcendante d'ordre  $\rho(A) = \rho > 0$  avec  $\delta(\infty, A) = \delta > 0$ . Si  $\varphi(z)$  ( $\not\equiv 0$ ) est une fonction méromorphe d'ordre  $\rho(\varphi) < +\infty$ , alors toute solution  $f(z)$  ( $\not\equiv 0$ ) de l'équation (4.4), vérifie*

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \bar{\lambda}(f' - \varphi) = \dots = \bar{\lambda}(f^{(k)} - \varphi) = \rho(f) = +\infty, \quad (4.7)$$

$$\bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \bar{\lambda}_2(f' - \varphi) = \dots = \bar{\lambda}_2(f^{(k)} - \varphi) = \rho_2(f) = \rho. \quad (4.8)$$

**Remarque 4.1** *En posant  $k = 2$  et  $\varphi(z) = z$  dans le Théorème 4.4, on obtient le Théorème 4.1.*

**Remarque 4.2** *En posant  $\varphi(z) \equiv z$  dans le Théorème 4.4, on obtient le Théorème 4.2.*

Soit  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ),  $A$  des fonctions méromorphes. On définit les fonctions

$$\alpha_1 = d_1, \quad \alpha_0 = d_0 - d_2 A,$$

$$\beta_1 = -d_2A + d_0 + d'_1,$$

$$\beta_0 = -d_1A - (d_2A)' + d'_0.$$

et

$$h = \alpha_1\beta_0 - \beta_1\alpha_0. \quad (4.9)$$

Dans [3], [4] B. Belaidi a étudié l'équation (2.4) et il a obtenu le Théorème suivant :

**Théorème 4.5** *Soit  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante avec  $\rho(A) = \rho > 0$  telle que  $\delta(\infty, A) = \delta > 0$ , soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des polynômes non tous nuls, et soit  $\varphi(z)$  ( $\neq 0$ ) une fonction méromorphe d'ordre fini telle que  $\alpha_1\varphi - \beta_1\varphi \neq 0$ . Supposons que*

- 1) *tous les pôles de  $f$  sont de multiplicités uniformément bornés ou*
- 2)  *$\delta(\infty, f) > 0$ .*

*Si  $f$  est une solution méromorphe de l'équation (4.1) avec  $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < +\infty$ , alors le polynôme différentiel  $g(z) = d_2f'' + d_1f' + d_0f$  satisfait*

$$\bar{\lambda}(g - \varphi) = \rho(f) = +\infty, \quad \bar{\lambda}_2(g - \varphi) = \rho_2(f) = \rho.$$

Dans la démonstration du théorème précédent la condition  $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < +\infty$  est nécessaire et les coefficients de polynôme différentiel sont des polynômes. Par une autre méthode de démonstration on peut généraliser le Théorème 4.5 en remplaçant les polynômes  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) par des fonctions méromorphes sans la condition  $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < +\infty$  et on a :

**Théorème 4.6** [10] *Soit  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante avec  $\rho(A) = \rho > 0$  telle que  $\delta(\infty, A) = \delta > 0$ , soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions méromorphes d'ordres finis non toutes nulles telles que  $h \neq 0$ , et soit  $\varphi(z)$  ( $\neq 0$ ) une fonction méromorphe d'ordre fini telle que  $\alpha_1\varphi - \beta_1\varphi \neq 0$ . Supposons que*

- 1) *tous les pôles de  $f$  sont de multiplicités uniformément bornés ou*
- 2)  *$\delta(\infty, f) > 0$*

*Si  $f$  est une solution méromorphe de l'équation (4.1), alors le polynôme différentiel  $g(z) = d_2f'' + d_1f' + d_0f$  satisfait*

$$\bar{\lambda}(g - \varphi) = \rho(f) = +\infty, \quad \bar{\lambda}_2(g - \varphi) = \rho_2(f) = \rho.$$

On remarque que le coefficient  $A$  dans les théorèmes précédents est sous la condition d'ordre fini, la question qui se pose : que peut-on dire si l'ordre de coefficient  $A$  est infini ? Pour répondre sur cette question on va utiliser la notion d'ordre  $p$ - itératif.

Le Théorème suivant est une généralisation du Théorème 4.6 pour des coefficients  $p$ -ordre itératif fini.

**Théorème 4.7** [10] *Soit  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante avec  $p$ -ordre itératif fini  $\rho_p(A) = \rho > 0$  telle que  $\delta(\infty, A) = \delta > 0$ , soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions méromorphes d'ordre  $p$ -itératif fini non toutes nulles telles que  $h \not\equiv 0$ , et soit  $\varphi(z)$  ( $\not\equiv 0$ ) une fonction méromorphe d'ordre  $p$ -itératif fini telle que  $\alpha_1\varphi' - \beta_1\varphi \not\equiv 0$ . Supposons que*

- 1) Tous les pôles de  $f$  sont de multiplicités uniformément bornés ou
- 2)  $\delta(\infty, f) > 0$

*Si  $f$  est une solution méromorphe de l'équation (4.1), alors le polynôme différentiel  $g(z) = d_2f'' + d_1f' + d_0f$  satisfait*

$$\bar{\lambda}_p(g - \varphi) = \rho_p(f) = +\infty, \quad \bar{\lambda}_{p+1}(g - \varphi) = \rho_{p+1}(f) = \rho$$

Pour  $p = 1$  dans le Théorème 4.7 on obtient le Théorème 4.6.

Pour  $\varphi(z) = z$  dans le Théorème 4.7 on a le Corollaire suivant :

**Corollaire 4.1** [10] *Soit  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante avec  $\rho_p(A) = \rho > 0$  telle que  $\delta(\infty, A) = \delta > 0$ , soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions méromorphes d'ordres  $p$ -itératif finis non tous nuls telles que  $h \not\equiv 0$  et  $\alpha_1 - \beta_1z \not\equiv 0$ . Supposons que*

- 1) Tous les pôles de  $f$  sont de multiplicités uniformément bornés ou
- 2)  $\delta(\infty, f) > 0$

*Si  $f$  est une solution méromorphe de l'équation (2.1), alors le polynôme différentiel  $g(z) = d_2f'' + d_1f' + d_0f$  satisfait*

$$\bar{\lambda}_p(g - z) = \rho_p(f) = +\infty, \quad \bar{\lambda}_{p+1}(g - z) = \rho_{p+1}(f) = \rho.$$

## 4.2 Lemmes préliminaires

**Lemme 4.1** [43] *Si  $f$  est une fonction méromorphe telle que  $i(f) = p \geq 1$ , alors  $\rho_p(f) = \rho_p(f')$ .*

**Lemme 4.2** [43] *Si  $f$  est une fonction méromorphe telle que  $0 < \rho_p(f) < +\infty$ , alors  $\rho_{p+1}(f) = 0$ .*

**Lemme 4.3** [25] *Soient  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F$  ( $\not\equiv 0$ ) des fonctions méromorphes d'ordres finis. Si  $f$  est une solution méromorphe d'ordre  $\rho(f) = +\infty$  de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = F, \quad (4.10)$$

*alors  $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty$ .*

**Lemme 4.4** [6] *Soient  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F$  ( $\not\equiv 0$ ) des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si  $f$  est une solution méromorphe de l'équation (4.10) telle que  $\rho(f) = \infty$  et  $\rho_2(f) = \rho$ , alors  $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = \infty$  et  $\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \rho$ .*

**Lemme 4.5** [3] Soit  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante avec  $p$ -ordre itératif fini  $\rho_p(A) = \rho > 0$  telle que  $\delta(\infty, A) = \delta > 0$ . Supposons que

- 1) tous les pôles de  $f$  sont de multiplicités uniformément bornés ou
- 2)  $\delta(\infty, f) > 0$ ,

alors toute solution méromorphe  $f \not\equiv 0$  de l'équation (4.4) satisfait  $i(f) = p + 1$  et  $\rho_p(f) = +\infty$ ,  $\rho_{p+1}(f) = \rho$ .

Pour  $p = 1$  on obtient le lemme suivant :

**Lemme 4.6** [4] Soit  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini  $\rho(A) = \rho > 0$  telle que  $\delta(\infty, A) = \delta > 0$ . Supposons que

- 1) Tous les pôles de  $f$  sont de multiplicités uniformément bornés ou
- 2)  $\delta(\infty, f) > 0$

alors toute solution méromorphe  $f \not\equiv 0$  de l'équation (4.4) satisfait  $\rho(f) = +\infty$ ,  $\rho_2(f) = \rho$ .

**Lemme 4.7** (voir [50]) Supposons que  $k \geq 2$  et  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante avec  $\delta(\infty, A) = \delta > 0$ ,  $\rho(A) = \rho < \infty$ . Alors chaque solution méromorphe  $f(z) \not\equiv 0$  de l'équation (4.4) satisfait  $\rho(f) = +\infty$  et  $\rho_2(f) = \rho$ .

**Lemme 4.8** [3] Soient  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$  des fonctions méromorphes avec  $p$ -ordre itératif fini. Si  $f$  est une solution méromorphe de l'équation (4.10) telle que  $\rho_p(f) = \infty$  et  $\rho_{p+1}(f) = \rho$ , alors  $\bar{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \rho_p(f) = \infty$  et  $\bar{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho$ .

**Lemme 4.9** [10] Soit  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante avec  $p$ -ordre itératif fini  $\rho_p(A) = \rho > 0$  telle que  $\delta(\infty, A) = \delta > 0$ , soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions méromorphes d'ordre  $p$ -itératif fini non toutes nulles telles que  $h \not\equiv 0$ . Supposons que

- 1) Tous les pôles de  $f$  sont de multiplicités uniformément bornés ou
- 2)  $\delta(\infty, f) > 0$ ,

Si  $f$  est une solution méromorphe de l'équation (4.4), alors le polynôme différentiel  $g(z) = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$  satisfait

$$\rho_p(g) = +\infty, \rho_{p+1}(g) = \rho.$$

**Preuve.** On suppose que  $f(z) \not\equiv 0$  est une solution méromorphe de l'équation (4.4). D'après le Lemme 4.6 on a  $\rho_p(f) = +\infty, \rho_{p+1}(g) = \rho$ . Supposons que  $d_2(z) \not\equiv 0$ . En remplaçant  $f''$  dans  $g(z) = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$  par  $-Af$  on obtient ■

$$g = d_1 f' + (d_0 - d_2 A_0) f. \quad (4.11)$$

En dérivant, (4.11) et en remplaçant  $f''$  par  $-Af$ , on obtient

$$g' = \left[-d_2A + d_0 + d_1'\right] f' + \left[-(d_2A)' - d_1A_0 + d_0'\right] f. \quad (4.12)$$

Posons

$$\alpha_1 = d_1, \quad \alpha_0 = d_0 - d_2A_0, \quad (4.13)$$

$$\beta_1 = d_2A_1^2 - (d_2A_1)' - d_1A_1 - d_2A_0 + d_0 + d_1', \quad (4.14)$$

$$\beta_0 = d_2A_0A_1 - (d_2A_0)' - d_1A_0 + d_0'. \quad (4.15)$$

Alors, on a

$$\alpha_1f' + \alpha_0f = g, \quad (4.16)$$

$$\beta_1f' + \beta_0f = g'. \quad (4.17)$$

Soit

$$h = \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 \quad (4.18)$$

Comme  $h \neq 0$ , alors de (4.16) et (4.17), on obtient

$$f = \frac{\alpha_1g' - \beta_1g}{h}. \quad (4.19)$$

Si  $\rho(g) < \infty$ , alors de l'équation (4.19) et le Lemme 4.2 nous permettent de déduire  $\rho_p(f) < \infty$  ce qui est une contradiction. Donc  $\rho_p(g) = \rho_p(f) = +\infty$ .

De l'équation (4.11) et les Lemmes 4.1, 4.2 on a  $\rho_{p+1}(g) \leq \rho_{p+1}(f)$  et par (4.19) on a  $\rho_{p+1}(f) \leq \rho_{p+1}(g)$ . Donc  $\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f) = \rho$ .

Pour  $p = 1$  on a le lemme suivant

**Lemme 4.10** [10] *Soit  $A(z)$  une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini  $\rho(A) = \rho > 0$  telle que  $\delta(\infty, A) = \delta > 0$ , soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions méromorphe d'ordre fini non toutes nulles telles que  $h \neq 0$ . Supposons que*

- 1) *Tous les pôles de  $f$  sont de multiplicités uniformément bornés ou*
- 2)  *$\delta(\infty, f) > 0$ ,*

*Si  $f$  est une solution méromorphe de l'équation (4.4), alors le polynôme différentiel  $g(z) = d_2f'' + d_1f' + d_0f$  satisfait*

$$\rho(g) = +\infty, \rho_2(g) = \rho.$$

### 4.3 Preuve du Théorème 4.3

Premièrement, on suppose que  $d_2 \neq 0$ . Supposons que  $f (\neq 0)$  est une solution de l'équation (4.1) avec  $\rho(f) = +\infty$  et  $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < +\infty$ . Soit  $w = g - \varphi = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f - \varphi$ . Alors du Lemme 4.10, on a  $\rho(w) = \rho(g) = \rho(f) = +\infty$ . Prouvons que  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = +\infty$ , i.e.,  $\bar{\lambda}(w) = +\infty$ . En remplaçant  $f'' = -Af$  dans  $w$ , on obtient

$$w = d_1 f' + (d_0 - d_2 A) f - \varphi. \quad (4.20)$$

En dérivant (4.20), on obtient

$$w' = (-d_2 A + d_0 + d_1') f' + (-d_1 A - (d_2 A)' + d_0') f - \varphi'. \quad (4.21)$$

Alors on a

$$\alpha_1 f' + \alpha_0 f = w + \varphi, \quad (4.22)$$

$$\beta_1 f' + \beta_0 f = w' + \varphi', \quad (4.23)$$

où  $\alpha_1, \alpha_0, \beta_1$ , et  $\beta_0$  sont définies dans (4.13) – (4.15). Posons

$$h = \alpha_1 \beta_0 - \beta_1 \alpha_0. \quad (4.24)$$

On a deux cas à étudier :

**Cas 1.** Si  $h \equiv 0$ , alors de (4.21) – (4.23), on obtient

$$\alpha_1 w' - \beta_1 w = -(\alpha_1 \varphi' - \beta_1 \varphi) = F. \quad (4.25)$$

Maintenant, prouvons que  $\alpha_1 \varphi' - \beta_1 \varphi \neq 0$ , i.e.,  $\frac{d_1 \varphi'}{d_2 \varphi} - \frac{d_0 + d_1'}{d_2} + A \neq 0$ .

Supposons que  $A \equiv \frac{d_1 \varphi'}{d_2 \varphi} - \frac{d_0 + d_1'}{d_2}$ . Donc on obtient

$$m(r, A) \leq m\left(r, \frac{\varphi'}{\varphi}\right) + m\left(r, \frac{d_1}{d_2}\right) + m\left(r, \frac{d_0 + d_1'}{d_2}\right) + O(1). \quad (4.26)$$

Comme  $\frac{d_1}{d_2}$  et  $\frac{d_0 + d_1'}{d_2}$  sont des fonctions rationnelles, alors

$$m\left(r, \frac{d_1}{d_2}\right) = O(\log r), \quad m\left(r, \frac{d_0 + d_1'}{d_2}\right) = O(\log r). \quad (4.27)$$

Comme  $\rho(\varphi) < +\infty$ , alors

$$m\left(r, \frac{\varphi'}{\varphi}\right) = O(\log r), \quad (4.28)$$

Il s'ensuit, d'après la définition du déficient  $\delta(\infty, A)$  pour  $r$  suffisamment grand, que

$$m(r, A) \leq \frac{\delta}{2} T(r, A). \quad (4.29)$$

Donc pour  $r$  suffisamment grand, on a des relations (4.26) – (4.29)

$$T(r, A) \leq \frac{2}{\delta} m(r, A) \leq O(\log r), \quad (4.30)$$

ceci est en contradiction avec  $\rho(A) = \rho > 0$ . Donc  $\alpha_1 \varphi' - \beta_1 \varphi \not\equiv 0$  et alors  $F \not\equiv 0$ . Comme  $\alpha_1 \not\equiv 0$ ,  $F \not\equiv 0$ , d'après le Lemme 4.3, on obtient  $\bar{\lambda}(w) = \lambda(w) = \sigma(w) = +\infty$ , i.e.,  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = +\infty$ .

**Cas 2.** Si  $h \not\equiv 0$ , alors des relations (4.22) – (4.24), on obtient

$$f = \frac{\alpha_1(w' + \varphi') - \beta_1(w + \varphi)}{h}. \quad (4.31)$$

En remplaçant (4.31) dans l'équation (4.1), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_1}{h} w''' + \phi_2 w'' + \phi_1 w' + \phi_0 w \\ &= - \left( \left( \frac{\alpha_1 \varphi' - \beta_1 \varphi}{h} \right)'' + A \left( \frac{\alpha_1 \varphi' - \beta_1 \varphi}{h} \right) \right) = F, \end{aligned} \quad (4.32)$$

où  $\phi_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\rho(\phi_j) < +\infty$  ( $j = 0, 1, 2$ ).

Comme  $\alpha_1 \varphi' - \beta_1 \varphi \not\equiv 0$ ,  $\rho\left(\frac{\alpha_1 \varphi' - \beta_1 \varphi}{h}\right) < +\infty$ , alors d'après le Lemme 4.7, on sait que  $F \not\equiv 0$ .

D'après le Lemme 4.3, on obtient  $\bar{\lambda}(w) = \lambda(w) = \rho(w) = +\infty$ , i.e.,  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = +\infty$ .

Supposons que  $d_2 \equiv 0$ ,  $d_1 \not\equiv 0$  ou  $d_2 \equiv 0$ ,  $d_1 \equiv 0$  et  $d_0 \not\equiv 0$ . Par le même raisonnement précédemment, on obtient  $\bar{\lambda}(w) = \lambda(w) = \rho(w) = +\infty$ , i.e.,  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = +\infty$ .

## 4.4 Preuve du Théorème 4.4

Supposons que  $f$  ( $\not\equiv 0$ ) est une solution de l'équation (4.4). Alors d'après le Lemme 4.6, on a  $\rho(f) = +\infty$  et  $\rho_2(f) = \rho(A)$ . Supposons que  $\varphi$  est transcendente ou un polynôme d'ordre supérieur ou égal à  $k$  ( $\geq k$ ), soit  $w_j = f^{(j)} - \varphi$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ). Alors  $\rho(w_j) = \rho(f) = +\infty$ ,  $\rho_2(w_j) = \rho_2(f) = \rho(A)$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ),  $\bar{\lambda}(w_j) = \bar{\lambda}(f^{(j)} - \varphi)$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ). En dérivant  $w_j = f^{(j)} - \varphi$ , et en remplaçant  $f^{(k)}$  par  $f^{(k)} = -Af$ , on obtient

$$w_j^{(k-j)} = -Af - \varphi^{(k-j)} \quad (j = 0, 1, \dots, k). \quad (4.33)$$

Alors on a

$$f = -\frac{w_j^{(k-j)} + \varphi^{(k-j)}}{A}. \quad (4.34)$$

et en remplaçant (4.34) dans l'équation (4.4), on obtient

$$\left( \frac{w_j^{(k-j)}}{A} \right)^{(k)} + w_j^{(k-j)} = - \left( \left( \frac{\varphi^{(k-j)}}{A} \right)^{(k)} + \varphi^{(k-j)} \right). \quad (4.35)$$

De la relation (4.35) on peut écrire

$$\begin{aligned}
& w_j^{(2k-j)} + \Phi_{2k-j-1} w_j^{(2k-j-1)} + \dots + \Phi_{k-j} w_j^{(k-j)} \\
& = -A \left( \left( \frac{\varphi^{(k-j)}}{A} \right)^{(k)} + A \left( \frac{\varphi^{(k-j)}}{A} \right) \right), \tag{4.36}
\end{aligned}$$

où  $\Phi_{k-j}(z), \dots, \Phi_{2k-j-1}(z)$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\rho(\Phi_{k-j}) \leq \rho, \dots, \rho(\Phi_{2k-j-1}) \leq \rho$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ). Comme  $A \neq 0$ ,  $\varphi^{(k-j)} \neq 0$  et  $\rho\left(\frac{\varphi^{(k-j)}}{A}\right) < +\infty$ , alors d'après le Lemme 4.7, on a

$$-A \left( \left( \frac{\varphi^{(k-j)}}{A} \right)^{(k)} + A \left( \frac{\varphi^{(k-j)}}{A} \right) \right) \neq 0. \tag{4.37}$$

Donc d'après le Lemme 4.3, on a  $\bar{\lambda}(w_j) = \rho(w_j) = +\infty$  et d'après le Lemme 4.4, on a  $\bar{\lambda}_2(w_j) = \rho_2(w_j) = \rho(A)$ . Ce qui donne

$$\bar{\lambda}(f^{(j)} - \varphi) = \rho(f) = +\infty, \quad \bar{\lambda}_2(f^{(j)} - \varphi) = \rho_2(f) = \rho(A) = \rho \quad (j = 0, 1, \dots, k). \tag{4.38}$$

Si  $\varphi$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $k$ . Soit  $u_j = f^{(j)}$  de l'équation (4.4) on a

$$u_j + \left( \frac{u_j^{(k-j)}}{A} \right)^{(j)} = 0, \tag{4.39}$$

soit  $w_j = u_j - \varphi$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ) donc  $w_j$  est une solution de l'équation

$$w_j + \left( \frac{w_j^{(k-j)}}{A} \right)^{(j)} = \varphi + \left( \frac{\varphi^{(k-j)}}{A} \right)^{(j)}$$

comme  $\varphi$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $k$ , alors  $\varphi + \left( \frac{\varphi^{(k-j)}}{A} \right)^{(j)} \neq 0$ . Par le même raisonnement que précédemment, on obtient

$$\bar{\lambda}(f^{(j)} - \varphi) = \rho(f) = +\infty, \quad \bar{\lambda}_2(f^{(j)} - \varphi) = \rho_2(f) = \rho(A) = \rho \quad (j = 0, 1, \dots, k).$$

## 4.5 Preuve du Théorème 4.5

On suppose que  $f \neq 0$  est une solution méromorphe de l'équation (4.4) alors d'après le Lemme 4.5 on a  $\rho_p(f) = +\infty$ ,  $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A) = \rho$ . Posons  $w(z) = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f - \varphi$ . Comme  $\rho_p(\varphi) < +\infty$ , alors par le Lemme 4.9 on a  $\rho_p(w) = \rho_p(g) = \rho_p(f) = +\infty$ ,  $\rho_{p+1}(w) = \rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f) = \rho_p(A) = \rho$ . Pour montrer que  $\bar{\lambda}_p(g - \varphi) = +\infty$  et  $\rho_{p+1}(g - \varphi) = \rho_p(A) = \rho$  il suffit de montrer que  $\bar{\lambda}_p(w) = +\infty$  et  $\rho_{p+1}(w) = \rho_p(A) = \rho$ . En remplaçant  $g = w - \varphi$  dans (4.19), on obtient

$$f = \frac{\alpha_1 w' - \beta_1 w}{h} + \psi \tag{4.40}$$

où

$$\psi = \frac{\alpha_1 \varphi' - \beta_1 \varphi}{h}$$

En remplaçant (4.40) dans (4.1) on obtient

$$\frac{\alpha_1}{h} w''' + \phi_2 w'' + \phi_1 w' + \phi_0 w = - \left( (\psi(z))'' + A\psi(z) \right) = W,$$

où  $\phi_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) sont des fonctions méromorphes telles que  $\rho_p(\phi_j) < +\infty$  ( $j = 0, 1, 2$ ). D'après la condition  $\alpha_1 \varphi' - \beta_1 w \not\equiv 0$ , on obtient  $\psi(z) \not\equiv 0$ . Comme  $\rho_p(\psi) < +\infty$  et  $\psi(z) \not\equiv 0$ , alors d'après le Lemme 4.5 on a  $W \not\equiv 0$ . En appliquant le Lemme 4.8, on aura  $\bar{\lambda}_p(w) = +\infty$  et  $\rho_{p+1}(w) = \rho_p(A) = \rho$  i.e  $\bar{\lambda}_p(g - \varphi) = +\infty$  et  $\rho_{p+1}(g - \varphi) = \rho_p(A) = \rho$ .

# Chapitre 5

## Croissance et oscillation des polynômes différentiels dans le plan complexe

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier la croissance, oscillation et la relation entre les fonctions d'ordre fini et le polynôme différentiel généré par les solutions d'équations différentielles d'ordre deux à coefficients fonctions méromorphes

Dans l'étude de la croissance et les points fixes de l'équation différentielle

$$f'' + A_1 e^{az} f' + A_0 e^{bz} f = 0 \quad (5.1)$$

où  $A_1, A_0$  sont des fonctions méromorphes  $a, b$  deux nombres complexes, Chen Zong-Xuan et Shon Kwang-Ho ont obtenu dans [28] les résultats suivants :

**Théorème A** ([28]) *Soient  $A_j(z) (\neq 0) (j = 0, 1)$  deux fonctions méromorphes avec  $\rho(A_j) < 1 (j = 0, 1)$ ,  $a, b$  sont des nombres complexes tels que  $ab \neq 0$  et  $\arg a \neq \arg b$  ou  $a = cb (0 < c < 1)$ . Alors chaque solution méromorphe  $f(z) \neq 0$  de l'équation (5.1) est d'ordre infini.*

**Théorème B** ([28]) *Soient  $A_j(z) (j = 0, 1)$ ,  $a, b, c$  vérifiant les hypothèses du Théorème A. Soient  $d_0, d_1, d_2$  des nombres complexes non tous nuls. Si  $f(z) \neq 0$  est une solution méromorphe de l'équation (5.1), alors :*

(i)  $f, f', f''$  possèdent un nombre infini de points fixes et

$$\bar{\lambda}(f - z) = \bar{\lambda}(f' - z) = \bar{\lambda}(f'' - z) = +\infty,$$

(ii) Le polynôme différentiel

$$g(z) = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$$

possède un nombre infini de points fixes et  $\bar{\lambda}(g - z) = +\infty$ .

## 5.2 Notre contribution

Maintenant nous allons étudier la croissance, l'oscillation et la relation entre les fonctions d'ordres finis et le polynôme différentiel géré par les solutions de l'équation

$$f'' + A_1(z)f' + A_0(z)f = F. \quad (5.2)$$

Avant de citer les résultats on a besoin de définir les fonctions suivantes

$$\alpha_1 = d_1 - d_2A_1, \quad \beta_0 = d_2A_0A_1 - (d_2A_0)' - d_1A_0 + d_0', \quad (5.3)$$

$$\alpha_0 = d_0 - d_2A_0, \quad \beta_1 = d_2A_1^2 - (d_2A_1)' - d_1A_1 - d_2A_0 + d_0 + d_1', \quad (5.4)$$

$$h = \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 \quad (5.5)$$

et

$$\psi(z) = \frac{\alpha_1 \left( \varphi' - (d_2F)' - \alpha_1 F \right) - \beta_1 (\varphi - d_2F)}{h}, \quad (5.6)$$

ou  $A_1(z)$ ,  $A_0(z) \not\equiv 0$ ,  $F$ ,  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) et  $\varphi$  sont des fonctions méromorphes.

**Théorème 5.1** [11] *Soient  $A_1(z)$ ,  $A_0(z) \not\equiv 0$ ,  $F$  des fonctions méromorphes d'ordre fini. Soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) sont des fonctions méromorphes non tous nul avec  $\rho(d_j) < \infty$  ( $j = 0, 1, 2$ ) telles que  $h \not\equiv 0$  et soit  $\varphi(z)$  une fonction méromorphe d'ordre fini telle que  $\psi(z)$  n'est pas une solution de l'équation (5.2).*

(i) *Si  $f(z)$  est une solution de l'équation (5.2), alors Le polynôme différentiel  $g = d_2f'' + d_1f' + d_0f$  satisfait*

$$\bar{\lambda}(g - \varphi) = \rho(g) = \rho(f) = \infty. \quad (5.7)$$

(ii) *Si  $f(z)$  est une solution de l'équation (5.2) et  $\rho_2(f) = \rho$ , alors on a*

$$\bar{\lambda}_2(g - \varphi) = \rho_2(f) = \rho. \quad (5.8)$$

**Théorème 5.2** [11] *Soient  $A_1(z)$ ,  $A_0(z) \not\equiv 0$ ,  $F$  des fonctions méromorphes d'ordre fini telles que toutes les solutions de l'équation (5.2) sont d'ordre infini. Soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions méromorphes non toutes nulles avec  $\rho(d_j) < \infty$  ( $j = 0, 1, 2$ ) telles que  $h \not\equiv 0$  et soit  $\varphi(z)$  une fonction méromorphe d'ordre fini.*

(i) *Si  $f$  est une solution de l'équation (5.2), alors le polynôme différentiel  $g$  satisfait (5.7).*

(ii) *Si  $f$  est une solution de l'équation (5.2) et  $\rho_2(f) = \rho$ , alors le polynôme différentiel  $g$  satisfait (5.8).*

**Théorème 5.3** [11] *Let  $A_1(z)$ ,  $A_0(z) (\not\equiv 0)$ ,  $F$ ,  $d_0(z)$ ,  $d_1(z)$ ,  $d_2(z)$ ,  $\varphi$  satisfont les hypothèses du Théorème 5.1, telle que  $A_1(z)$  ou  $A_0(z)$  est transcendante, alors l'équation (5.2) a une solution  $f$  telle que  $g$  satisfait (5.7).*

**Corollaire 5.1** ([11], [8]) *Soient  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  et  $Q(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i$  des polynômes où  $a_i$ ,  $b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des nombres complexes,  $a_n b_n \neq 0$ , tels que  $\arg a_n \neq \arg b_n$  ou  $a_n = c b_n$*

( $0 < c < 1$ ) et  $A_1(z), A_0(z) (\neq 0)$  des fonctions entières avec  $\rho(A_j) < n$  ( $j = 0, 1$ ). Soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions entières non toutes nulles avec  $\rho(d_j) < n$  ( $j = 0, 1, 2$ ), et soit  $\varphi(z) \neq 0$  une fonction méromorphe d'ordre fini. Si  $f(z) \neq 0$  est une solution de l'équation

$$f'' + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f = 0, \quad (5.9)$$

alors le polynôme différentiel  $g$  satisfait  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$  et  $\bar{\lambda}_2(g - \varphi) = \rho_2(g) = \rho_2(f) = n$ .

Dans ce qui suit nous donne un Théorème générale

**Théorème 5.4** [11] Soient  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F$  des fonction méromorphes d'ordre fini. Soit  $\varphi$  une fonction méromorphe d'ordre fini et qui nest pas une solution de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_1f' + A_0f = F. \quad (5.10)$$

(i) Si  $f$  est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation (5.10), alors on a  $\bar{\lambda}(f - \varphi) = \rho(f) = \infty$ .

(ii) Si  $f$  est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation (5.10) et  $\rho_2(f) = \rho$ , alors  $\bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \rho_2(f) = \rho$ .

**Corollaire 5.2** [11] Soient  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F$  des fonction méromorphes d'ordre fini telles que  $zA_0 + A_1 \neq F$ . Alors toute solution de l'équation (5.10) a un nombre infini de points fixes et  $\bar{\tau}(f) = \rho(f) = \infty$ . Si  $f$  est une solution de l'équation (5.10) avec  $\rho_2(f) = \rho$ , alors on a  $\tau_2(f) = \bar{\tau}_2(f) = \rho_2(f) = \rho$ .

**Corollaire 5.3** [11] Soient  $P_j(z) = \sum_{i=0}^n a_{i,j} z^i$  ( $j = 0, \dots, k-1$ ) des polynômes où  $a_{0,j}, \dots, a_{n,j}$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) des nombres complexes tels que  $a_{n,j} a_{n,0} \neq 0$  ( $j = 1, \dots, k-1$ ), soit  $A_j(z) (\neq 0)$  ( $j = 1, \dots, k-1$ ) des fonctions entières. Supposons que  $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$  ou  $a_{n,j} = ca_{n,0}$  ( $0 < c < 1$ ) ( $j = 1, \dots, k-1$ ),  $\rho(A_j) < n$  ( $j = 1, \dots, k-1$ ). Soit  $\varphi \neq 0$  une fonction entière d'ordre fini. Alors toute solution  $f(z) \neq 0$  de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) e^{P_1(z)} f' + A_0(z) e^{P_0(z)} f = 0, \quad (5.11)$$

où  $k \geq 2$ , satisfait  $\bar{\lambda}(f - \varphi) = \rho(f) = \infty$  et  $\bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \rho_2(f) = n$ . En particulier toute solution  $f(z) \neq 0$  de l'équation (5.11) a un nombre infini de points fixes et  $\bar{\tau}(f) = \rho(f) = \infty$ ,  $\tau_2(f) = \bar{\tau}_2(f) = \rho_2(f) = n$ .

**Remarque 5.1** Si la condition  $h \neq 0$ , n'est pas satisfaite dans les Théorèmes 5.1, 5.2 alors le polynôme différentiel peut être d'ordre fini. Par exemple si  $d_2(z) \neq 0$  est une fonction entière et  $d_0(z) = A_0 d_2(z)$ ,  $d_1(z) = A_1 d_2(z)$ , alors  $g = d_2(z) F$  est d'ordre fini.

## 5.2.1 Applications

Des applications des théorèmes précédents feront l'objet de cette partie

**Théorème 5.5** [12] Soient  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  et  $Q(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i$  des polynômes où  $a_i, b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des nombres complexes tels que  $a_n b_n \neq 0$ ,  $\arg a_n = \arg b_n$  ou  $a_n = c b_n$  ( $0 < c < 1$ ). Soient  $A_1(z), A_0(z) (\neq 0)$  et  $F \neq 0$  des fonctions entières avec  $\max\{\rho(A_j) \ (j = 0, 1), \rho(F)\} < n$ . Soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions entières non toutes nulles avec  $\rho(d_j) < n$  ( $j = 0, 1, 2$ ),  $\varphi(z)$  une fonction entière d'ordre fini. Si  $f$  une solution de l'équation

$$f'' + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f = F, \quad (5.12)$$

alors le polynôme différentiel  $g$  satisfait  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$ . En particulier le polynôme différentiel  $g$  possède un nombre infini de points fixes et  $\bar{\lambda}(g - z) = +\infty$ .

**Théorème 5.6** [12] Supposons que  $P(z), Q(z), A_1(z), A_0(z), d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) vérifient les hypothèses du Théorème 5.5. Soit  $F$  une fonction entière avec  $\rho(F) > n$  et  $\varphi$  une fonction entière d'ordre fini telle que  $\psi(z)$  n'est pas une solution de l'équation (5.12). Si  $f$  est une solution de l'équation (5.12) alors le polynôme différentiel  $g$  satisfait  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$  avec au plus une solution d'ordre fini  $f_0$ .

**Théorème 5.7** [12] Supposons que  $P(z), Q(z), A_1(z), A_0(z), d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) vérifient les hypothèses du Théorème 5.5. Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux fonctions entières telles que  $\max\{\rho(F_j) \ (j = 0, 1)\} < n$ , et  $F_1 - C F_2 \neq 0$ , pour toute constante  $C$ , soit  $\varphi(z)$  une fonction entière d'ordre fini. Si  $f_1$  est une solution de l'équation

$$f'' + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f = F_1 \quad (5.13)$$

et  $f_2$  est une solution de l'équation

$$f'' + A_1(z) e^{P(z)} f' + A_0(z) e^{Q(z)} f = F_2, \quad (5.14)$$

alors le polynôme différentiel  $g_{f_1 - C f_2} = d_2 (f_1 - C f_2)'' + d_1 (f_1 - C f_2)' + d_0 (f_1 - C f_2)$  satisfait  $\bar{\lambda}(g_{f_1 - C f_2} - \varphi) = \infty$  pour toute constante  $C$ .

Dans le cas où  $P(z) = az$ , et  $Q(z) = bz$  on a les résultats suivants :

**Théorème 5.8** [14] Soient  $A_1(z), A_0(z) (\neq 0)$  et  $F \neq 0$  des fonctions entières avec  $\max\{\rho(A_j) \ (j = 0, 1)\} < 1$ . Soient  $a, b$  deux nombres complexes tels que  $ab(a - b) \neq 0$ . Soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions méromorphes non tous nul avec  $\rho(d_j) < 1$  ( $j = 0, 1, 2$ ),  $\varphi(z)$  une fonction entière d'ordre fini. Si  $f$  est une solution de l'équation

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = F, \quad (5.15)$$

alors le polynôme différentiel  $g$  satisfait  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$ . En particulier le polynôme différentiel  $g$  possède un nombre infini de points fixes et  $\bar{\lambda}(g - z) = +\infty$ .

**Théorème 5.9** [14] Supposons que  $A_1(z), A_0(z), d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ )  $a, b$  vérifient les hypothèses du Théorème 5.8. Soit  $F$  une fonction entière avec  $\rho(F) > 1$  et soit  $\varphi$  une fonction entière d'ordre fini telle que  $\psi(z)$  n'est pas une solution de l'équation (5.12). Si  $f$  est une solution de l'équation (5.12) alors le polynôme différentiel  $g$  satisfait  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$  avec au plus une solutions d'ordre fini  $f_0$ .

**Théorème 5.10** [14] *Supposons que  $P(z), Q(z), A_1(z), A_0(z)$   $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) vérifient les hypothèses du Théorème 5.8. Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux fonctions entières telles que  $\max_{(j=0,1)} \rho(F_j) < n$ , et  $F_1 - CF_2 \not\equiv 0$  pour toute constante  $C$ , et  $\varphi(z)$  un fonction entière d'ordre fini. Si  $f_1$  est une solution de l'équation*

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = F_1 \quad (5.16)$$

et si  $f_2$  est une solution de l'équation

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = F_2, \quad (5.17)$$

alors le polynôme différentiel  $g_{f_1-Cf_2} = d_2(f_1 - Cf_2)'' + d_1(f_1 - Cf_2)' + d_0(f_1 - Cf_2)$  satisfait  $\bar{\lambda}(g_{f_1-Cf_2} - \varphi) = \infty$  pour toute constante  $C$ .

### 5.3 Lemmes préliminaires

**Lemme 5.1** (45). *Soit l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + a_0f = 0 \quad (5.18)$$

satisfaite dans le plan complexe par les fonctions méromorphes linéairement indépendantes  $f_1, f_2, \dots, f_k$  alors les coefficients  $a_{k-1}, \dots, a_0$  sont méromorphes dans le plan avec la propriété suivante :

$$m(r, a_j) = O\{\log[\max(T(r, f_s) : s = 1, \dots, k)]\} \quad (j = 0, \dots, k-1). \quad (5.19)$$

**Lemme 5.2** *Supposons que  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$  sont des fonctions méromorphes telles qu'il existe  $A_s$  ( $0 \leq s \leq k-1$ ) qui soit transcendante. Si toute solution de (5.10) est méromorphe, alors (5.10) admet une solution d'ordre infini.*

**Preuve.** Comme toute solution de l'équation (5.10) est méromorphe, alors toute solution de l'équation différentielle homogène

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + A_0f = 0 \quad (5.20)$$

est méromorphe. Supposons que  $\{f_1, \dots, f_k\}$  est un système fondamental des solutions de l'équation (5.20). Alors par le Lemme 5.1, nous avons pour  $j = 0, \dots, k-1$

$$m(r, A_j) = O\{\log[\max(T(r, f_s) : s = 1, \dots, k)]\}. \quad (5.21)$$

Comme  $A_s$  est transcendant, au moins un des  $f_1, \dots, f_k$  est d'ordre infini. Supposons que  $f_1$  satisfait  $\rho(f_1) = \infty$ .

**Preuve** Si  $f_0$  est une solution de (5.10), alors toute solution  $f$  de (5.10) peut s'écrire sous la forme

$$f = C_1f_1 + C_2f_2 + \dots + C_kf_k + f_0, \quad (5.22)$$

où  $C_1, C_2, \dots, C_k$  sont des constantes arbitraires. Si  $\rho(f_0) = \infty$ , alors le Lemme 5.2 est satisfait, si  $\rho(f_0) < \infty$ , alors  $f = f_1 + f_0$  est une solution méromorphe de (5.10) et  $\rho(f) = \infty$ .

**Lemme 5.3** *Supposons que  $A_1(z), A_0(z) (\not\equiv 0), F$  sont des fonctions méromorphes. Soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions méromorphes non toutes nulles avec  $\rho(d_j) < \infty$  ( $j = 0, 1, 2$ ), telles que  $h \not\equiv 0$ , où  $h$  est définie dans (5.9).*

(i) *Si  $f(z)$  est une solution méromorphe de (5.2), alors le polynôme différentiel  $g = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$  satisfait*

$$\rho(g) = \rho(f) = \infty. \quad (5.23)$$

(ii) *Si  $f(z)$  est une solution méromorphe de (5.2) d'ordre infini et si  $\rho_2(f) = \rho$ , alors le polynôme différentiel  $g = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$  satisfait*

$$\rho_2(g) = \rho_2(f) = \rho. \quad (5.24)$$

**Preuve.** (i) On suppose que  $f(z) \not\equiv 0$  est une solution de l'équation (5.2) avec  $\rho(f) = \infty$ . On suppose que  $d_2(z) \not\equiv 0$ . En remplaçant  $f'' = F - A_1 f' - A_0 f$  dans  $g$ , on obtient

$$g - d_2 F = (d_1 - d_2 A_1) f' + (d_0 - d_2 A_0) f. \quad (5.25)$$

En dérivant (5.25) et en remplaçant  $f''$  par  $f'' = F - A_1 f' - A_0 f$ , on obtient

$$\begin{aligned} g' - (d_2 F)' - (d_1 - d_2 A_1) F &= \left[ d_2 A_1^2 - (d_2 A_1)' - d_1 A_1 - d_2 A_0 + d_0 + d_1' \right] f' \\ &+ \left[ d_2 A_0 A_1 - (d_2 A_0)' - d_1 A_0 + d_0' \right] f. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Soit

$$\alpha_1 = d_1 - d_2 A_1, \quad \alpha_0 = d_0 - d_2 A_0, \quad (5.27)$$

$$\beta_1 = d_2 A_1^2 - (d_2 A_1)' - d_1 A_1 - d_2 A_0 + d_0 + d_1', \quad (5.28)$$

$$\beta_0 = d_2 A_0 A_1 - (d_2 A_0)' - d_1 A_0 + d_0'. \quad (5.29)$$

Alors, on a

$$\alpha_1 f' + \alpha_0 f = g - d_2 F, \quad (5.30)$$

$$\beta_1 f' + \beta_0 f = g' - (d_2 F)' - (d_1 - d_2 A_1) F. \quad (5.31)$$

Soit

$$\begin{aligned} h = \alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1 &= (d_1 - d_2 A_1) \left( d_2 A_1^2 - (d_2 A_1)' - d_1 A_1 - d_2 A_0 + d_0 + d_1' \right) \\ &- (d_0 - d_2 A_0) \left( d_2 A_0 A_1 - (d_2 A_0)' - d_1 A_0 + d_0' \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Comme  $h \not\equiv 0$  de (5.30) et (5.31), on obtient

$$f = \frac{\alpha_1 \left( g' - (d_2 F)' - \alpha_1 F \right) - \beta_1 (g - d_2 F)}{h}. \quad (5.33)$$

Si  $\rho(g) < \infty$ , alors de (5.33) on obtient  $\rho(f) < \infty$ , c'est une contradiction. Donc  $\rho(g) = \infty$ .

Supposons maintenant que  $d_2 \equiv 0$ ,  $d_1 \not\equiv 0$  ou  $d_2 \equiv 0$ ,  $d_1 \equiv 0$  et  $d_0 \not\equiv 0$ . En utilisant le même raisonnement que celui utilisé dans (i), on déduit que  $\rho(g) = \infty$ .

(ii) De (5.25) on a  $\rho_2(g) \leq \rho_2(f)$  et par (5.33) on a  $\rho_2(f) \leq \rho_2(g)$ . Donc  $\rho_2(g) = \rho_2(f) = \rho$

**Lemme 5.4** [5] Soient  $P_j(z) = \sum_{i=0}^n a_{i,j} z^i$  ( $j = 0, \dots, k-1$ ) des polynômes non constants où  $a_{0,j}, \dots, a_{n,j}$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) sont des nombres complexes tels que  $a_{n,j} a_{n,0} \neq 0$  ( $j = 1, \dots, k-1$ ), soient  $A_j(z) (\neq 0)$  ( $j = 0, \dots, k-1$ ) des fonctions entières. Supposons que  $\arg a_{n,j} \neq \arg a_{n,0}$  et  $a_{n,j} = c a_{n,0}$  ( $0 < c < 1$ ) ( $j = 1, \dots, k-1$ ),  $\rho(A_j) < n$  ( $j = 0, \dots, k-1$ ). Alors, chaque solution  $f(z) \not\equiv 0$  de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) e^{P_{k-1}(z)} f^{(k-1)} + \dots + A_1(z) e^{P_1(z)} f' + A_0(z) e^{P_0(z)} f = 0, \quad (5.34)$$

ou  $k \geq 2$ , est d'ordre infini et  $\rho_2(f) = n$

**Lemme 5.5** [7] Soient  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  et  $Q(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i$  des polynômes non constants où  $a_i, b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont des nombres complexes,  $a_n b_n \neq 0$  tels que  $\arg a_n \neq \arg b_n$  ou  $a_n = c b_n$  ( $0 < c < 1$ ). On note les ensembles d'indices par

$$\Lambda_1 = \{0, P\},$$

$$\Lambda_2 = \{0, P, Q, 2P, P + Q\}.$$

(i) Si  $H_j$  ( $j \in \Lambda_1$ ),  $H_Q \not\equiv 0$  sont toutes des fonctions méromorphes d'ordre inférieur à  $n$ , et  $\Psi_1(z) = \sum_{j \in \Lambda_1} H_j(z) e^j$ , alors  $\Psi_1(z) + H_Q e^Q \not\equiv 0$ .

(ii) Si  $H_j$  ( $j \in \Lambda_2$ ),  $H_{2Q} \not\equiv 0$  sont toutes des fonctions méromorphes d'ordre inférieur à  $n$ , et  $\Psi_2(z) = \sum_{j \in \Lambda_2} H_j(z) e^j$ , alors  $\Psi_2(z) + H_{2Q} e^{2Q} \not\equiv 0$ .

## 5.4 Preuve du Théorème 5.1

(i) Soit  $w(z) = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f - \varphi$ . Comme  $\rho(\varphi) < \infty$ , alors  $\rho(w) = \rho(g) = \rho(f) = \infty$ . Pour montrer que  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$ , il suffit de montrer que  $\bar{\lambda}(w) = \infty$ . En remplaçant  $g = w + \varphi$  dans (5.33) on obtient

$$f = \frac{\alpha_1 w' - \beta_1 w}{h} + \psi(z), \quad (5.35)$$

ou  $\alpha_1, \beta_1, h, \psi(z)$  sont définis dans (5.3) – (5.6). En substituant (5.35) dans l'équation (5.2), nous obtenons

$$\frac{\alpha_1}{h} w''' + \phi_2 w'' + \phi_1 w' + \phi_0 w$$

$$= F - \left( (\psi(z))'' + A(\psi(z))' + B\psi(z) \right) = A, \quad (5.36)$$

où  $\phi_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) sont des fonctions méromorphes avec  $\rho(\phi_j) < \infty$  ( $j = 0, 1, 2$ ). comme  $\psi(z)$  n'est pas une solution de (5.2), il s'ensuit que  $A \neq 0$  et par le Lemme 4.3, nous obtenons  $\bar{\lambda}(w) = \lambda(w) = \rho(w) = \infty$ , i.e.,  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$ .

Supposons maintenant  $d_2 \equiv 0$ ,  $d_1 \neq 0$  ou  $d_2 \equiv 0$ ,  $d_1 \equiv 0$  et  $d_0 \neq 0$ . L'utilisation d'un raisonnement analogue à celui ci-dessus nous obtenons  $\bar{\lambda}(w) = \lambda(w) = \rho(w) = \infty$ , i.e.,  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$ .

(ii) Si  $\rho_2(f) = \rho$ , alors par le Lemme 5.3, nous avons  $\rho_2(g) = \rho_2(f) = \rho$  en utilisant un raisonnement analogue à celui ci-dessus et par le Lemme 4.4, nous obtenons (5.8).

## 5.5 Preuve du Théorème 5.2

Par les hypothèses du Théorème 5.2 toute solution de l'équation (5.3) est d'ordre infini, à partir de (5.6), nous voyons que  $\psi(z)$  est d'ordre fini, alors  $\psi(z)$  n'est pas une solution de (5.2). D'après le Théorème 5.1, nous obtenons le Théorème 5.2.

## 5.6 Preuve du Théorème 5.3

Par le Lemme 5.2, nous savons que l'équation (5.2) admet une solution d'ordre infini  $f$ . Alors, par le Théorème 5.1,  $g$  satisfait (5.7).

## 5.7 Preuve du Corollaire 5.1

D'abord, nous supposons que  $d_2 \neq 0$ . Notons

$$\begin{aligned} h = \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 = (d_1 - d_2A_1e^P) & \left[ d_2A_0A_1e^{P+Q} - ((d_2A_0)'\right. \\ & \left. + Q'd_2A_0 + d_1A_0)e^Q + d_0' \right] - (d_0 - d_2A_0e^Q) \left[ d_2A_1^2e^{2P} - ((d_2A_1)'\right. \\ & \left. + P'd_2A_1 + d_1A_1)e^P - d_2A_0e^Q + d_0 + d_1' \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Maintenant, vérifions tous les termes de  $h$ . Puisque le terme  $d_2^2A_1^2A_0e^{2P+Q}$  est éliminé, par (5.37) nous pouvons écrire  $h = \Psi_2(z) - d_2^2A_0^2e^{2Q}$ , où  $\Psi_2(z)$  est définie comme dans le Lemme 5.5. Comme  $d_2 \neq 0$ ,  $A_0 \neq 0$  alors d'après le lemme 5.5 nous voyons que  $h \neq 0$ . D'après le Théorème 5.2, le polynôme différentiel  $g = d_2f'' + d_1f' + d_0f$  satisfait  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$  et  $\bar{\lambda}_2(g - \varphi) = \rho_2(g) = \rho_2(f) = n$ .

Supposons maintenant  $d_2 \equiv 0$ ,  $d_1 \neq 0$  ou  $d_2 \equiv 0$ ,  $d_1 \equiv 0$  et  $d_0 \neq 0$ . L'utilisation d'un raisonnement analogue à celui ci-dessus nous permet d'obtenir  $\bar{\lambda}(g - \varphi) = \infty$ . et  $\bar{\lambda}_2(g - \varphi) = \rho_2(g) = \rho_2(f) = n$ .

## 5.8 Preuve du Théorème 5.4

(i) Soit  $f(z)$  une solution d'ordre infini de l'équation (5.10). Posons  $w = f - \varphi$ . Alors, on a  $\rho(w) = \rho(f - \varphi) = \rho(f) = \infty$ . En remplaçant  $f = w + \varphi$  dans l'équation (5.10), on obtient

$$\begin{aligned} & w^{(k)} + A_{k-1}w^{(k-1)} + \dots + A_1w' + A_0w \\ &= F - \left( \varphi^{(k)} + A\varphi^{(k-1)} + \dots + A_1\varphi' + A_0\varphi \right) = W. \end{aligned}$$

Comme  $\varphi$  n'est pas une solution de l'équation (5.10), alors on a  $W \neq 0$ . Du Lemme 4.3, on obtient  $\bar{\lambda}(w) = \bar{\lambda}(f - \varphi) = \rho(w) = \rho(f - \varphi) = \infty$ .

(ii) D'après (i) et le Lemme 4.4, on obtient  $\bar{\lambda}_2(f - \varphi) = \rho_2(f) = \rho$ .

# Chapitre 6

## Croissance et oscillation des polynômes différentiels à coefficients fonctions analytiques dans le disque unité

### 6.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de la croissance et de l'oscillation des polynômes différentiels des solutions des équations différentielles linéaires homogènes. Pour cela, on va introduire des conditions sur l'ordre des coefficients. Tout d'abord, on donne des définitions et quelques résultats de base concernant le développement de la théorie des équations différentielles dans le disque unité  $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ .

L'idée d'appliquer la théorie de Nevanlinna dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles dans le plan complexe revient à S. Bank et I. Laine dans leur célèbre travail ([1], [2]) sur l'équation

$$f'' + Af = 0. \tag{6.1}$$

Plus tard, plusieurs mathématiciens se sont intéressés ([9], [10], [11], [13], [29], [30], etc) à ce problème :

**Problème 6.1** *Quelles sont les conditions sur les coefficients  $A_0, \dots, A_{k-1}$  de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \dots + A_0(z)f = 0 \tag{6.2}$$

*pour assurer que  $f$  soit d'ordre infini.*

J. Tu et C. F. Yi ([27]) ont démontré le théorème suivant.

**Théorème A.** Soient  $A_0, \dots, A_{k-1}$  des fonctions entières satisfaisant  $\rho(A_0) = \rho$  ( $0 < \rho < \infty$ ) et  $\sigma(A_0) = \sigma$  ( $0 < \sigma < \infty$ ), et soit  $\rho(A_j) \leq \rho$  et  $\sigma(A_j) < \sigma$  si  $\rho(A_j) = \rho$  ( $j = 1, \dots, k-1$ ). Alors toute solution  $f \not\equiv 0$  de l'équation (6.2) satisfait

$$\rho_2(f) = \rho(A_0) = \rho \quad (6.3)$$

Et ils ont posé le problème suivant.

**Problème 6.2** Peut-on obtenir le même résultat que celui du Théorème A lorsque tous les coefficients de l'équation (6.2) sont des fonctions analytiques dans le disque unité  $\Delta$ ?

J. Heittokangas ([13, 16, 17, 18]) est le premier qui a utilisé la théorie de Nevanlinna dans l'étude des équations différentielles ordinaires dans le disque unité, et prouva le théorème fondamental suivant pour l'équation :

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \dots + A_0(z)f = F \quad (6.4)$$

où  $A_0, \dots, A_{k-1}, F$  des fonctions analytiques dans le disque unité.

**Théorème B.** Si tous les coefficients de l'équation (6.4) sont analytiques dans  $\Delta$ , alors toute solution de (6.4) est analytique sur le disque unité.

En 2008, T. B. Cao et H. X. Yi ([5]) ont démontré les théorèmes suivants :

**Théorème C.** Soient  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  des fonctions analytiques sur  $\Delta$ . Si  $\max\{\rho(A_j), j = 1, \dots, k-1\} < \rho(A_0)$ , alors toute solution de l'équation (6.2) vérifie

$$\rho(A_0) \leq \rho_2(f) \leq \alpha_M \quad (6.5)$$

où  $\alpha_M = \max\{\rho_M(A_j), j = 0, \dots, k-1\}$ .

**Théorème D.** Sous les hypothèses de Théorème C et si  $\rho_2(A_j) < \infty$ , alors toute solution  $f \not\equiv 0$  de l'équation (6.2) vérifie

$$\bar{\lambda}_2(f - z) = \rho_2(f). \quad (6.6)$$

Dans [18] T. B. Cao posa la question suivante :

**Problème 6.3** Que pouvons-nous dire sur le polynôme différentiel des solutions des équations différentielles sur le disque unité ?

Le but de ce chapitre est de répondre aux problèmes 6.2 et 6.3 pour les équations différentielles d'ordre deux. On va aussi donner une relation entre l'ordre des coefficients et l'ordre du polynôme différentiel, et bien sûr ne pas oublier l'oscillation de ce dernier. Pour cela on va considérer l'équation suivante

$$f'' + A_1(z) f' + A_0(z) f = F. \quad (6.7)$$

Avant d'énoncer nos résultats, on note par :

$$\alpha_0 = d_0 - d_2 A_0, \quad \beta_0 = d_2 A_0 A_1 - (d_2 A_0)' - d_1 A_0 + d_0', \quad (6.8)$$

$$\alpha_1 = d_1 - d_2 A_1, \quad \beta_1 = d_2 A_1^2 - (d_2 A_1)' - d_1 A_1 - d_2 A_0 + d_0 + d_1', \quad (6.9)$$

$$h = \alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1, \quad (6.10)$$

et

$$\psi(z) = \frac{\alpha_1 (\varphi' - (d_2 F)' - \alpha_1 F) - \beta_1 (\varphi - d_2 F)}{h}, \quad (6.11)$$

où  $A_0, A_1, d_0, d_1, d_2$ , et  $F$  sont des fonctions analytiques d'ordre fini dans le disque unité  $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ .

On a obtenu les résultats suivants :

**Théorème 6.1** [16] Soient  $A_0(z), A_1(z) (\neq 0), F$  des fonctions analytiques d'ordre  $p$ - itératif fini dans  $\Delta$ , et soient  $d_0, d_1, d_2$  des fonctions analytiques dans  $\Delta$  qui ne sont pas toutes nulles avec  $\rho_p(d_j) < \infty$  ( $j = 0, 1, 2$ ) telles que  $h \neq 0$ , où  $h$  est définie dans (6.10).

Si  $f$  est une solution d'ordre  $p$ - itératif infini de (6.7) et  $\rho_{p+1}(f) = \rho$ , alors le polynôme différentiel  $g = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$  satisfait

$$\rho_p(g) = \rho_p(f) = \infty, \quad (6.12)$$

et

$$\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f) = \rho. \quad (6.13)$$

**Théorème 6.2** [16] Soient  $A_1(z), A_0(z) \neq 0, F$  des fonctions analytiques dans  $\Delta$  d'ordre itératif fini. Soient  $d_0(z), d_1(z), d_2(z)$  des fonctions analytiques dans  $\Delta$  qui ne sont pas toutes égales à zéro avec  $\rho_p(d_j) < \infty$  ( $j = 0, 1, 2$ ) telles que  $h \neq 0$  et  $\varphi(z)$  une fonction analytique dans  $\Delta$  d'ordre itératif fini telle que  $\psi(z)$  n'est pas une solution de (6.7).

Si  $f$  est une solution d'ordre itératif infini de (6.7) et  $\rho_{p+1}(f) = \rho$ , alors le polynôme différentiel  $g = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$  satisfait

$$\bar{\lambda}_p(g - \varphi) = \rho_p(g) = \rho_p(f) = \infty, \quad (6.14)$$

et

$$\bar{\lambda}_{p+1}(g - \varphi) = \rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f) = \rho. \quad (6.15)$$

**Remarque 6.1** La condition  $\psi$  n'est pas une solution de l'équation (6.7) est nécessaire, car si on prend par exemple l'équation différentielle suivante

$$f'' + a_1(z) f' + a_0(z) f = -\frac{\exp(1-z)^{-1}}{(1-z)^3} - \frac{1}{(1-z)^3} \quad (6.16)$$

où

$$a_1(z) = -\frac{\exp(1-z)^{-1}}{(1-z)^2} - \frac{1}{(1-z)^2} \quad (6.17)$$

et

$$a_0(z) = -\frac{\exp(1-z)^{-1}}{(1-z)^3} - \frac{1}{(1-z)^3} \quad (6.18)$$

Les deux fonctions  $f_1(z) = (1-z) \exp(\exp(1-z)^{-1}) + 1$  et  $f_2(z) = 2-z$  sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation (6.16).

Si on prend  $d_2 = d_1 = 0$ ,  $d_0 = (1-z)^{-1} \exp(1-z)^{-1}$  et  $\varphi(z) = d_0 \left(\frac{f_1+1}{2}\right)$ , alors on obtient que  $\psi(z) = \frac{\varphi(z)}{d_0}$  et  $g = (1-z)^{-1} f(z)$ .

Il est claire que  $f = \frac{f_1 + f_2}{2}$  est une solution de l'équation (6.16). Si on prend  $\varphi(z) = d_0(z) f_2(z)$ , alors  $\psi(z) = f_2(z)$  est une solution de l'équation (6.16) et on a

$$\bar{\lambda}(d_0 f - \varphi) = \bar{\lambda} \left( d_0 \frac{f_2 - 1}{2} \right) = \bar{\lambda} \left( \frac{1}{2} \exp(1-z)^{-1} (\exp(1-z)^{-1}) \right) = 0, \quad (6.19)$$

alors que

$$\rho(d_0 f_1) = \infty. \quad (6.20)$$

ce qui est en contradiction avec le Théorème 6.1.

**Théorème 6.3** [16] Soient  $A_1(z)$ ,  $A_0(z) \not\equiv 0$ ,  $F$  des fonctions analytiques d'ordre itératif fini dans  $\Delta$  de telle sorte que toute solution de (6.7) soit d'ordre itératif infini. Soient  $d_0(z)$ ,  $d_1(z)$ ,  $d_2(z)$  des fonctions analytiques dans  $\Delta$  qui ne sont pas toutes égales à zéro avec  $\rho_p(d_j) < \infty$  ( $j = 0, 1, 2$ ) telles que  $h \not\equiv 0$  et  $\varphi(z)$  une fonction analytique dans  $\Delta$  d'ordre itératif fini.

Si  $f(z)$  est une solution de (6.7) et  $\rho_{p+1}(f) = \rho$ , alors le polynôme différentiel  $g = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$  satisfait (6.14) et (6.15).

Dans la suite nous donnons une application des résultats ci-dessus. Pour cela on considère l'équation homogène :

$$f'' + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0. \quad (6.21)$$

**Corollaire 6.1** [16] Soient  $A_1, A_0 \not\equiv 0$ ,  $d_0, d_1, d_2$  des fonctions analytiques d'ordre itératif fini sur le disque  $\Delta$  et  $i(A_0) = p$  ( $p \geq 1$  est un entier), telles que

$$\max \{ \rho_p(A_1), \rho_p(d_j) \ (j = 0, 1, 2) \} < \rho_p(A_0) = \rho \ (0 < \rho < \infty),$$

$\sigma_p(A_0) = \sigma$  ( $0 < \sigma < \infty$ ), et soit  $\varphi \not\equiv 0$  une fonction analytique sur le disque  $\Delta$  d'ordre itératif fini. Si  $f \not\equiv 0$  est une solution de l'équation (6.21), alors le polynôme différentiel  $g = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ , vérifie

$$\bar{\lambda}_p(g - \varphi) = \lambda_p(g - \varphi) = \rho_p(g) = \rho_p(f) = \infty, \quad (6.22)$$

et

$$\rho_p(A_0) \leq \bar{\lambda}_{p+1}(g - \varphi) = \lambda_{p+1}(g - \varphi) = \rho_{p+1}(g) \leq \alpha_M, \quad (6.23)$$

où  $\alpha_M = \max \{ \rho_{M,p}(A_j), j = 0, 1 \}$ .

**Corollaire 6.2** [16] Sous les hypothèses du Corollaire 6.1, le polynôme différentiel  $g = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ , vérifie

$$\rho_p(A_0) \leq \bar{\lambda}_{p+1}(g - z) = \lambda_{p+1}(g - z) = \rho_{p+1}(f) \leq \alpha_M, \quad (6.24)$$

où  $\alpha_M = \max \{ \rho_{M,p}(A_0), \rho_{M,p}(A_1) \}$ .

**Corollaire 6.3** [16] Soient  $A_0(z), A_1(z) (\not\equiv 0)$ ,  $F$  des fonctions analytiques d'ordre fini dans  $\Delta$ , et soient  $d_0, d_1, d_2$  des fonctions analytiques dans  $\Delta$  qui ne sont pas toutes égales à zéro avec  $\rho(d_j) < \infty$  ( $j = 0, 1, 2$ ) telles que  $h \not\equiv 0$ , où  $h$  est définie dans (6.10).

Si  $f$  est une solution d'ordre infini de (6.7) et  $\rho_2(f) = \rho$ , alors le polynôme différentiel  $g = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$  satisfait

$$\rho(g) = \rho(f) = \infty, \quad (6.25)$$

et

$$\rho_2(g) = \rho_2(f) = \rho. \quad (6.26)$$

**Théorème 6.4** [34] Soient  $A_1(z), A_0(z) (\not\equiv 0)$ ,  $F$  des fonctions analytiques dans  $\Delta$  d'ordre fini. Soient  $d_0(z), d_1(z), d_2(z)$  des fonctions analytiques dans  $\Delta$  qui ne sont pas toutes égales à zéro avec  $\rho(d_j) < \infty$  ( $j = 0, 1, 2$ ) telles que  $h \not\equiv 0$  et  $\varphi(z)$  une fonction analytique dans  $\Delta$  d'ordre fini telle que  $\psi(z)$  n'est pas une solution de (6.7).

Si  $f$  est une solution d'ordre infini de (6.7) et  $\rho_2(f) = \rho$ , alors le polynôme différentiel  $g = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$  satisfait

$$\bar{\lambda}(g - \varphi) = \rho(g) = \rho(f) = \infty, \quad (6.27)$$

et

$$\bar{\lambda}_2(g - \varphi) = \rho_2(g) = \rho_2(f) = \rho. \quad (6.28)$$

**Corollaire 6.4** [34] Soient  $A_1(z), A_0(z) \not\equiv 0$ ,  $F$  des fonctions analytiques d'ordre fini dans  $\Delta$  de telle sorte que toute solution de (6.7) soit d'ordre infini. Soient  $d_0(z), d_1(z), d_2(z)$  des fonctions analytiques dans  $\Delta$  qui ne sont pas toutes égales à zéro avec  $\rho(d_j) < \infty$  ( $j = 0, 1, 2$ ) telles que  $h \not\equiv 0$  et  $\varphi(z)$  une fonction analytique dans  $\Delta$  d'ordre fini.

Si  $f(z)$  est une solution de (6.7) et  $\rho_2(f) = \rho$ , alors le polynôme différentiel  $g = d_2f'' + d_1f' + d_0f$  satisfait (6.27) et (6.28).

**Corollaire 6.5** [34] Soient  $A_1, A_0 \not\equiv 0$  deux fonctions analytiques d'ordre fini sur le disque  $\Delta$ , telles que  $\sigma(A_1) < \sigma(A_0) = \sigma$  ( $0 < \sigma < \infty$ ),  $\tau(A_0) = \tau$  ( $0 < \tau < \infty$ ), soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions analytiques sur  $\Delta$  qui ne sont pas toutes égales à zéro avec  $\sigma(d_j) < \sigma(A_0)$  ( $j = 0, 1, 2$ ) et  $\varphi \not\equiv 0$  une fonction analytique sur le disque  $\Delta$  d'ordre fini. Si  $f \not\equiv 0$  est une solution de l'équation (6.21), alors le polynôme différentiel  $g = d_2f'' + d_1f' + d_0f$  vérifie

$$\bar{\lambda}(g - \varphi) = \lambda(g - \varphi) = \infty, \quad (6.29)$$

et

$$\sigma(A_0) \leq \bar{\lambda}_2(g - \varphi) = \lambda_2(g - \varphi) \leq \alpha_M, \quad (6.30)$$

où  $\alpha_M = \max\{\sigma_M(A_j), j = 0, 1\}$ .

**Corollaire 6.6** [34] Soient  $A_1, A_0 \not\equiv 0$  deux fonctions analytiques d'ordre fini sur le disque  $\Delta$ , telles que  $\sigma(A_1) = \sigma(A_0) = \sigma$  ( $0 < \sigma < \infty$ ), et  $\tau(A_1) < \tau(A_0) = \tau$  ( $0 < \tau < \infty$ ), soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions analytiques sur  $\Delta$  qui ne sont pas toutes égales à zéro avec  $\sigma(d_j) < \sigma(A_0)$  ( $j = 0, 1, 2$ ) et  $\varphi(z)$  une fonction analytique dans  $\Delta$  d'ordre fini telle que  $\psi(z) \not\equiv 0$ . Si  $f \not\equiv 0$  est une solution de l'équation (6.21), alors le polynôme différentiel  $g = d_2f'' + d_1f' + d_0f$ , vérifie (6.29) et (6.30)

Dans la suite nous donnons une application des résultats ci-dessus. Pour cela on considère l'équation homogène :

$$f'' + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0. \quad (6.31)$$

**Corollaire 6.7** [34] Soient  $A_1, A_0 \not\equiv 0$  deux fonctions analytiques d'ordre fini sur le disque  $\Delta$ , telles que  $\sigma(A_0) = \sigma$  ( $0 < \sigma < \infty$ ),  $\tau(A_0) = \tau$  ( $0 < \tau < \infty$ ) et soit  $\sigma(A_1) < \sigma(A_0) = \sigma$  et  $\tau(A_1) < \tau(A_0) = \tau$  si  $\sigma(A_1) = \sigma(A_0)$ , soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions analytiques sur  $\Delta$  qui ne sont pas toutes égales à zéro avec  $\sigma(d_j) < \sigma(A_0)$  ( $j = 0, 1, 2$ ). Si  $f \not\equiv 0$  est une solution de l'équation (6.31), alors le polynôme différentiel  $g = d_2f'' + d_1f' + d_0f$ , vérifie

$$\sigma(g) = \sigma(f) = \infty, \quad (6.32)$$

et

$$\sigma(A_0) \leq \sigma_2(g) \leq \alpha_M, \quad (6.33)$$

où  $\alpha_M = \max\{\sigma_M(A_j), j = 0, 1\}$ .

**Corollaire 6.8** [34] Soient  $A_1, A_0 \not\equiv 0$  deux fonctions analytiques d'ordre fini sur le disque  $\Delta$ , telles que  $\sigma(A_0) = \sigma$  ( $0 < \sigma < \infty$ ),  $\tau(A_0) = \tau$  ( $0 < \tau < \infty$ ) et soit  $\sigma(A_1) < \sigma(A_0) = \sigma$  et  $2\tau(A_1) < \tau(A_0) = \tau$  si  $\sigma(A_1) = \sigma(A_0)$ , soient  $d_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) des fonctions analytiques sur  $\Delta$  qui ne sont pas toutes égales à zéro avec  $\sigma(d_j) < \sigma(A_0)$  ( $j = 0, 1, 2$ ). Si  $f \not\equiv 0$  est une solution de l'équation (6.21), alors le polynôme différentiel  $g = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ , vérifie

$$\sigma(A_0) \leq \overline{\lambda}_2(g - z) = \lambda_2(g - z) = \sigma_2(f) \leq \alpha_M, \quad (6.34)$$

où  $\alpha_M = \max\{\sigma_M(A_0), \sigma_M(A_1)\}$ .

## 6.2 Lemmes préliminaires

**Lemme 6.1**  $\square$  Soit  $f(z)$  une solution méromorphe de l'équation

$$L(f) = f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \dots + A_0(z)f = F(z), \quad (k \in \mathbb{N}^*), \quad (6.35)$$

où  $A_0, \dots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$  des fonctions méromorphes sur  $\Delta$  telles que  $\max\{\rho_i(F), \rho_i(A_j) (j = 0, k-1)\} < \rho_i(f)$ , où  $i = 1, 2$ . Alors

$$\overline{\lambda}_i(f) = \lambda_i(f) = \rho_i(f). \quad (6.36)$$

**Lemme 6.2** [18] Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions méromorphes sur le disque  $\Delta$ ,  $p \geq 1$  un entier. Alors

- (i)  $\rho_p(f) = \rho_p\left(\frac{1}{f}\right)$ ,  $\rho_p(a \cdot f) = \rho_p(f)$  ( $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ );
- (ii)  $\rho_p(f) = \rho_p(f')$ ;
- (iii)  $\max\{\rho_p(f+g), \rho_p(fg)\} \leq \max\{\rho_p(f), \rho_p(g)\}$ ;
- (iv) Si  $\rho_p(f) < \rho_p(g)$ , alors  $\rho_p(f+g) = \rho_p(fg) = \rho_p(g)$ .

**Lemme 6.3** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions méromorphes dans le disque  $\Delta$  avec  $0 < \rho_p(f)$ ,  $\rho_p(g) < \infty$  et  $0 < \sigma_p(f)$ ,  $\sigma_p(g) < \infty$  ( $p \geq 1$ ).

i) Si  $\rho_p(f) < \rho_p(g)$ , alors

$$\sigma_p(f+g) = \sigma_p(fg) = \sigma_p(g).$$

ii) Si  $\sigma_p(f) \neq \sigma_p(g)$

$$\rho_p(f+g) = \rho_p(fg) = \rho_p(f) = \rho_p(g) = \rho. \quad (6.37)$$

**Preuve** (i) D'après la définition de type itaratif, on a

$$\begin{aligned} \sigma_p(f+g) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} (1-r)^{\rho_p(f+g)} \log_{p-1}^+ T(r, f+g) \\ &\leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} (1-r)^{\rho_p(f+g)} \log_{p-1}^+ (T(r, f) + T(r, g) + O(1)) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Comme  $\rho_p(f) < \rho_p(g)$ , d'après le Lemme 6.2,  $\sigma_p(f+g) = \sigma_p(f)$  et  $T(r, g) = o(T(r, f))$   $r \rightarrow 1^-$ . Donc de la relation (6.38) on obtient

$$\sigma_p(f+g) \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} (1-r)^{\rho_p(f)} \log_{p-1}^+ (T(r, f) + o(T(r, f)) + O(1)) = \sigma_p(f). \quad (6.39)$$

Comme  $\sigma_p(f+g) = \sigma_p(f) > \sigma_p(g)$  alors de (6.39) on a

$$\sigma_p(f) = \sigma_p(f+g-f) \leq \sigma_p(f+g) \quad (6.40)$$

De (6.39) et (6.40) on déduit que  $\sigma_p(f+g) = \sigma_p(f)$ . Par la même méthode on montre que  $\sigma_p(fg) = \sigma_p(f)$ .

(ii) Montrons que  $\rho_p(fg) = \rho_p(g)$  et par la même méthode on peut prouver que  $\rho_p(f+g) = \rho_p(f)$ . Supposons que  $\rho_p(f) = \rho_p(g) = \rho$  et  $\sigma_p(f) < \sigma_p(g)$ . Alors d'après le Lemme 6.2 on a

$$\rho_p(fg) \leq \max\{\rho_p(f), \rho_p(g)\} = \rho_p(f)$$

Si on suppose que  $\rho_p(fg) < \rho_p(f)$  alors d'après (i) on a

$$\sigma_p(f) = \sigma_p\left(fg \frac{1}{g}\right) = \sigma_p\left(\frac{1}{g}\right) = \sigma_p(g)$$

ceci est une contradiction. Donc  $\rho_p(fg) = \rho_p(f)$

### 6.3 Preuve du Théorème 6.1

Supposons que  $f(z) \not\equiv 0$  est une solution de l'équation (6.7) d'ordre infini. En substituant  $f'' = F - A_1 f' - A_0 f$  dans  $g$ , on obtient

$$g - d_2 F = (d_1 - d_2 A_1) f' + (d_0 - d_2 A_0) f. \quad (6.41)$$

En dérivant les deux côtés de l'équation (6.41) et en remplaçant  $f''$  par  $f'' = F - A_1 f' - A_0 f$ , on obtient

$$\begin{aligned} g - (d_2 F)' - (d_1 - d_2 A_1) F &= \left[ d_2 A_1^2 - (d_2 A_1)' - d_1 A_1 - d_2 A_0 + d_0 + d_1' \right] f' \\ &+ \left[ d_2 A_0 A_1 - (d_2 A_0)' - d_1 A_0 + d_0' \right] f. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Notons par :

$$\alpha_1 = d_1 - d_2 A_1, \quad \alpha_0 = d_0 - d_2 A_0, \quad (6.43)$$

$$\beta_1 = d_2 A_1^2 - (d_2 A_1)' - d_1 A_1 - d_2 A_0 + d_0 + d_1', \quad (6.44)$$

$$\beta_0 = d_2 A_0 A_1 - (d_2 A_0)' - d_1 A_0 + d_0'. \quad (6.45)$$

Alors, on obtient

$$\alpha_1 f' + \alpha_0 f = g - d_2 F, \quad (6.46)$$

$$\beta_1 f' + \beta_0 f = g - (d_2 F)' - (d_1 - d_2 A_1) F. \quad (6.47)$$

On note aussi

$$\begin{aligned} h = \alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1 &= (d_1 - d_2 A_1) \left( d_2 A_1^2 - (d_2 A_1)' - d_1 A_1 - d_2 A_0 + d_0 + d_1' \right) \\ &\quad - (d_0 - d_2 A_0) \left( d_2 A_0 A_1 - (d_2 A_0)' - d_1 A_0 + d_0' \right). \end{aligned}$$

D'après la condition  $h \neq 0$ , (6.46) et (6.47), on obtient

$$f = \frac{\alpha_1 \left( g' - (d_2 F)' - \alpha_1 F \right) - \beta_1 (g - d_2 F)}{h}. \quad (6.48)$$

Si  $\rho_p(g) < \infty$ , alors d'après (6.48) on a  $\rho_p(f) < \infty$  ce qui est une contradiction. Donc  $\rho_p(g) = \infty$ .

Montrons maintenant que  $\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f)$ . D'après la définition de  $g$  on obtient  $\rho_{p+1}(g) \leq \rho_{p+1}(f)$  et d'après (6.48) on a  $\rho_{p+1}(f) \leq \rho_{p+1}(g)$ . Donc  $\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f) = \rho$ .

## 6.4 Preuve du Théorème 6.2

Soit  $f$  une solution de (6.7) d'ordre infini. Posons  $w(z) = g - \varphi$ . Comme  $\rho_p(\varphi) < \infty$ , alors d'après le Lemme 6.2 on a  $\rho_p(w) = \rho_p(g) = \rho_p(f) = \infty$ .

Pour prouver  $\lambda_p(g - \varphi) = \infty$ , il suffit de montrer que  $\bar{\lambda}_p(w) = \infty$ . D'après  $g = w + \varphi$ , et en utilisant (6.48) on obtient

$$f = \frac{\alpha_1 w' - \beta_1 w}{h} + \psi(z), \quad (6.49)$$

où  $\alpha_1, \beta_1, h, \psi(z)$  sont définis dans (6.8) – (6.11). En substituant (6.49) dans l'équation (6.7), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_1}{h} w''' + \phi_2 w'' + \phi_1 w' + \phi_0 w \\ &= F - \left( (\psi(z))'' + A(\psi(z))' + B\psi(z) \right) = A, \end{aligned} \quad (6.50)$$

où  $\phi_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) sont des fonctions méromorphes dans  $\Delta$  avec  $\rho_p(\phi_j) < \infty$  ( $j = 0, 1, 2$ ). Comme  $\psi(z)$  n'est pas une solution de (6.7), il s'ensuit que  $A \neq 0$  et d'après le Lemme 6.1, on obtient  $\bar{\lambda}_p(w) = \lambda_p(w) = \rho_p(w) = \infty$ , i.e.,  $\bar{\lambda}_p(g - \varphi) = \infty$ .

Si  $\rho_{p+1}(f) = \rho$ , alors d'après le Théorème 6.1 on a  $\rho_{p+1}(g) = \rho_{p+1}(f) = \rho$ . En utilisant les mêmes arguments précédents et d'après le Lemme 6.1, on obtient (6.15).

## 6.5 Preuve du Théorème 6.3

D'après l'hypothèse du Théorème 6.3, toute solution de l'équation (6.7) est d'ordre itératif infini. De (6.11), nous voyons que  $\psi(z)$  est une fonction d'ordre itératif fini, alors  $\psi(z)$  n'est pas une solution de (6.7). D'après le Théorème 6.2, on obtient le Théorème 6.3.

## 6.6 Preuve du Corollaire 6.1

D'après le Théorème C toute solution de l'équation (6.21) est d'ordre itératif infini et  $\rho_p(A_0) \leq \rho_{p+1}(f) \leq \max\{\rho_{M,p}(A_0), \rho_{M,p}(A_1)\}$ . Il reste à prouver que  $h \neq 0$ . Posons

$$\alpha_1 = d_1 - d_2A_1, \quad \alpha_0 = d_0 - d_2A_0, \quad (6.51)$$

$$\beta_1 = d_2A_1^2 - (d_2A_1)' - d_1A_1 - d_2A_0 + d_0 + d_1', \quad (6.52)$$

$$\beta_0 = d_2A_0A_1 - (d_2A_0)' - d_1A_0 + d_0'. \quad (6.53)$$

Alors, on obtient

$$\alpha_1f' + \alpha_0f = g, \quad (6.54)$$

$$\beta_1f' + \beta_0f = g'. \quad (6.55)$$

On pose aussi

$$\begin{aligned} h = \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 &= (d_1 - d_2A_1) \left( d_2A_0A_1 - (d_2A_0)' - d_1A_0 + d_0' \right) \\ &\quad - (d_0 - d_2A_0) \left( d_2A_1^2 - (d_2A_1)' - d_1A_1 - d_2A_0 + d_0 + d_1' \right). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Par des calculs simples, on peut écrit  $h$  sous la forme

$$\begin{aligned} h &= -d_2^2A_0^2 - d_0d_2A_1^2 + (-d_2d_1 + d_1'd_2 + 2d_0d_2 - d_1^2)A_0 \\ &\quad + (d_2'd_0 - d_2d_0' + d_0d_1)A_1 + d_1d_2A_0A_1 - \\ &\quad d_1d_2A_0' + d_0d_2A_1' + d_2^2A_0'A_1 - d_2^2A_0A_1' + d_0'd_1 - d_0d_1' - d_0^2, \end{aligned}$$

d'où

$$h = -d_2^2 A_0^2 + B_0 A_1^2 + B_1 A_0 + B_2 A_1 + B_3 A_0 A_1 + B_4 A_0' + B_5 A_1' + B_6 A_0' A_1 + B_7 A_0 A_1' + B_8$$

où  $\rho_p(B_j) < \rho_p(A_0)$  ( $j = 0, \dots, 8$ ). Et comme  $d_2 \neq 0$ ,  $A_0 \neq 0$  et  $0 < \rho, \sigma < \infty$ , alors d'après le Lemme 2.4  $\rho_p(h) = \rho_p(A_0)$ , pour  $d_2 = 0, d_1 \neq 0$  et  $d_0 = 0$  ou  $d_2 = 0, d_1 = 0$  et  $d_0 \neq 0$  on utilise le même raisonnement et on obtient  $\rho(h) = \rho(A_0)$ , ce qui implique que  $h \neq 0$ .

Comme  $\psi \neq 0$  est d'ordre itératif fini, alors  $\psi$  n'est pas une solution de l'équation (4.21), et d'après les Théorèmes 6.1-6.2 on obtient le Corollaire 6.1

## 6.7 Preuve du Corollaire 6.2

Il suffit de remplacer  $\varphi(z) = z$ , on voit que  $\varphi(z) = z$  satisfait que  $\psi$  n'est pas une solution de l'équation (6.21), et d'après les Corollaires 6.1 on obtient le Corollaire 6.2

## Annexe

Rolf Nevanlinna, décédé le 28 mai 1980 à l'âge de 84 ans, avait été élu correspondant de l'Académie dans la Section de Géométrie en 1967. Né en Finlande en 1895, fils d'un professeur de mathématiques au lycée d'Helsinki, il était devenu célèbre dès 1925 par sa découverte de la « fonction de croissance » attachée à une fonction méromorphe d'une variation complexe. Cette notion nouvelle le conduisit à de remarquables extensions du fameux théorème de Picard.

Devenu membre de l'Académie de Finlande lors de la fondation de celle-ci en 1948, il avait acquis une autorité internationale qui fut consacrée par sa désignation comme Président de l'Union Mathématique Internationale de 1959 à 1962, puis comme Président du Congrès International des Mathématiciens à Stockholmen 1962.

C'est aussi en raison de son prestige scientifique que la ville d'Helsinki fut choisie pour tenir le Congrès international des mathématiciens en 1978.

La carrière universitaire de Rolf Nevanlinna s'est déroulée à l'Université d'Helsinki : il y avait débuté comme Docent en 1922, à l'âge de 27 ans, puis était devenu professeur quatre ans plus tard. En 1929, il déclina l'offre qui lui était faite de succéder à Hermann Weyl dans sa chaire de l'École Polytechnique Fédérale de Zürich.

Recteur de l'Université d'Helsinki de 1941 à 1945, il fut ensuite nommé professeur à l'Université de Zürich et, jusqu'à sa retraite, partagea son activité entre les Universités de Zürich et d'Helsinki.

Enfin, de 1965 à 1970, il remplit les fonctions de Chancelier de l'Université de Turku.

Nevanlinna maniait la langue française et la langue allemande aussi bien que sa propre langue.

Il avait des attaches avec l'École mathématique française de « théorie des fonctions », comme on disait alors. Cette branche des mathématiques avait été illustrée par Emile Picard, Jacques Hadamard, Emile Borel ; puis la théorie des fonctions entières ou méromorphes d'une variable complexe avait été affinée par Gaston Julia, Georges Valiron. Les recherches de Nevanlinna qui le rendirent célèbre ont été publiées aux Comptes rendus de l'Académie, entre 1922 et 1925, dans une série de Notes présentées par Emile Borel.

Rolf Nevanlinna fit ensuite deux séjours prolongés à Paris, en 1926 et en 1929. Lorsque la théorie de Nevanlinna eut pris sa forme définitive, il écrivit à la demande d'Emile Borel un exposé d'ensemble pour un volume de la fameuse Collection de monographies sur la théorie des fonctions. Le livre de Nevanlinna parut en 1929 sous le titre : « Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes ». Cet ouvrage fait date dans l'histoire de la théorie des fonctions méromorphes ; épuisé, il fut réédité 45 ans plus tard aux États-Unis.

Deux autres monographies, écrites plus tard en langue allemande et contenant d'autres résultats originaux, resteront aussi d'indispensables outils de travail pour ceux qui veulent approfondir les problèmes fondamentaux de la théorie des fonctions en relation avec la théorie

---

du potentiel. Elles ont paru dans la Collection des « Grundlehren » chez Springer : « Eindeutige analytische Funktionen » en 1936, « Uniformisierung » en 1953.

Dans ce dernier ouvrage, Nevanlinna développe notamment la théorie des intégrales abéliennes sur les surfaces de Riemann ouvertes.

Cette Notice sur Rolf Nevanlinna serait incomplète si l'on omettait d'y parler de son frère Frithiof Nevanlinna, son aîné d'un an. Certains des premiers travaux de Rolf ont été signés avec son frère. Frithiof enseigna aussi à l'Université d'Helsinki. Il mourut en 1977.

Il ne serait pas non plus concevable de ne pas nommer ici un élève illustre de Rolf Nevanlinna : le Finlandais Lars Ahlfors se révéla en 1929 pour avoir prouvé, à l'âge de 22 ans, la fameuse conjecture de Denjoy, selon laquelle toute fonction méromorphe d'ordre  $\rho \geq \frac{1}{2}$  possède au plus 2 « valeurs asymptotiques ». La première des Médailles Fields fut attribuée à Ahlfors en 1936. Plus tard, lorsque Ahlfors quitta sa chaire à l'Université de Zurich en 1946 pour aller enseigner à Harvard, c'est son maître Nevanlinna qui lui succéda !

Toute sa vie, Nevanlinna fit preuve d'une activité considérable. Le catalogue de ses publications compte plus de 200 numéros. Tous ceux qui l'ont connu ne pouvaient manquer d'être frappés par sa forte personnalité : c'était un homme de caractère dont l'autorité s'imposait. On l'a bien vu lorsque, présidant le comité international chargé d'établir le programme des conférences au Congrès international de Moscou en 1966, il tint tête à ses collègues soviétiques.

Rolf Nevanlinna était un homme qui inspirait le respect.

# Bibliographie

- [1] **S. Bank and I. Laine**, *On the oscillation theory of  $f'' + Af = 0$  where  $A$  is entire*, Trans. Amer Math.Soc. 273(1982), 351-363.
- [2] **S. Bank and I. Laine**, *On the zeros of meromorphic solutions of second order linear differential equations*,
- [3] **B. Belaïdi**, *Oscillation of fixed points of solutions of some linear differential equations*, Acta. Math. Univ. Comenianae, Vol 77, N 2, 2008, 263-269.
- [4] **B. Belaïdi**, *Growth and oscillation theory of solutions of some linear differential equations*, Mat. Vesnik 60 (2008), no. 4, 233–246.
- [5] **B. Belaïdi**, *Some precise estimates of the hyper order of solutions of some complex linear differential equations* (JIPAM) volume 8 (2007), issue 4, article 107, 14 pp.
- [6] **B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Some properties of solutions of certain complex linear differential equations with meromorphic coefficients*, Methods and Applications of Analysis, Vol. 14, N° 4, 2007, 395-306.
- [7] **B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Differential polynomials generated by some complex linear differential equations with meromorphic coefficients*, Glasnik Matematicki, Vol. 43(63) 2008, 363-373.
- [8] **B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Relation between differential polynomials of certain complex linear differential equations and meromorphic functions of finite order*, Tsukuba J. Math., Vol. 32, N°2 (2008), 291-307.
- [9] **B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Differential Polynomials Generated by Second Order Linear Differential Equations*, Journal of Applied Analysis, Vol. 14, N°2 (2008), 259-271.
- [10] **B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Oscillation theory to some complex linear large differential equations*, Annals of Differential Equations, 2009, N°1, 1-7.
- [11] **B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Growth and Oscillation Theories of Differential Polynomials*, Novi Sad J. Math., Vol. 39, No. 2, 2009, 61-70.

- 
- [12] **B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Growth of Solutions and Oscillation of Differential Polynomials Generated by Some Complex Linear Differential Equations*, Hokkaido Math. J. 39(2010), 127-138.
- [13] **B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Some Results On the Complex Oscillation Theory Of Some Differential Polynomials*, Acta Universitatis Apulensis, No. 22, 2010, 123-131.
- [14] **B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Relation Between Differential Polynomials and Small Functions*, Kyoto J. Math. Volume 50, Number 2 (2010), 453-468.
- [15] **B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Growth and Complex Oscillation of Differential Polynomials Generated by Solutions of Differential Equations*, International Journal of Qualitative Theory of Differential Equations and Applications, Vol. 4, No. 1 (2010), pp. 77-87.
- [16] **B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Fixed Points and Iterated Order of Differential Polynomial Generated by Solutions of Linear Differential Equations in the Unit Disc*, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, Vol. 3, Issue. 1, 2011, 161-172.
- [17] **B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Growth and oscillation of solutions of some higher order linear differential equations with transcendental meromorphic coefficients*, Journal of Advanced Research in dynamical and control systems, Vol.3, Issue 3, 2011, pp. 50-65
- [18] **T.-B. Cao**, *The growth, oscillation and fixed points of solutions of complex linear differential equations in the unit disc*, J. Math. Anal. Appl. 352 (2008), no. 2, 739-748.
- [19] **T.-B. Cao and H.-X. Yi**, *The growth of solutions of linear differential equations with coefficients of iterated order in the unit disc*, J. Math. Anal. Appl. 319 (2006), 278-294.
- [20] **T.-B. Cao and H.-X. Yi**, *On the complex oscillation theory of analytic solutions of lineare differential equations in the unit disc*, Math. Nachr. 282(2009), no. 6, 820-831.
- [21] **Z. X. Chen and S. Gao**, *Some oscillation theorems of higher order non-homogeneous linear differential equations with transcendental meromorphic coefficients*, Ann. Differential Equations 12 (1996), no. 1, 28-39.
- [22] **Z. X. Chen and C. C. Yang**, *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*, Kodai. Math. J.,22 (1999), 273-285.
- [23] **Z. X. Chen and C. C. Yang**, *Some oscillation theorems for linear differential equations with meromorphic coefficients*, Southeast Asian Bull. Math., 23 (1999), 409-417.
- [24] **Z. X. Chen and G. Zongsheng**, *The complex oscillation solutions of non-homogeneous linear differential equations* Acte Math, 1992, 35(2), 196-203 (in Chinese).

- 
- [25] **Z. X. Chen**, *Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, *Analysis*, 14 (1994), 425-438.
- [26] **Z.-X. Chen**, *The fixed points and hyper order of solutions of second order complex differential equations*, *Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed.* 20(2000), no. 3, 425-432. (in Chinese).
- [27] **Z. X. Chen**, *The growth of solutions of  $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$  where the order  $(Q) = 1$* , *Sci. China Ser. A* 45 (2002), no. 3, 290-300.
- [28] **Z.-X. Chen and K.-H. Shon**, *On the growth and fixed points of solutions of second order differential equations with meromorphic coefficients*, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* 21(2005), 753-764.
- [29] **Z.-X. Chen and K.-H. Shon**, *The growth of solution of differential equations with coefficients of small growth in the unit disc*. *J Math Anal Appl*, 2004, 297, 285-304.
- [30] **M. Chuaqui and D. Stowe**, *Valence and oscillation of functions in the unit disc*, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 33(2008), 561-584.
- [31] **I. Chyzykhov, G. Gundersen, J. Heittokangas**, *Linear differential equations and logarithmic derivative estimates*, *Proc. London Math. Soc.* 86(2003), 735-754.
- [32] **A. El Farissi, and B. Belaïdi** *On Oscillation Theorems for Differential Polynomials*, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, No. 22. (2009), 1-10.
- [33] **A. El Farissi, B. Belaïdi and Z. Latreuch**, *Growth and oscillation of differential polynomials in the unit disc*, *Electron. J. Diff. Equ.*, Vol. 2010(2010), No. 87, pp. 1-7.
- [34] **A. El Farissi and B. Belaïdi**, *Complex Oscillation Theory of Differential Polynomials*, *Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica* 50, 1 (2011) 43-52.
- [35] **A. El Farissi and B. Belaïdi**, *Growth of solutions of higher order linear differential equations*, *Mathematical Journal of Okayama University*.
- [36] **A. El Farissi and B. Belaïdi**, *On the Growth of Solutions of Some Higher Order Linear Differential Equations*, *Applications of Mathematics*.
- [37] **G. Frank, S. Hellerstein**, *On the meromorphic solutions of non-homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients*, *Proc. London Math. Soc. (3)* 53 (1986), no. 3, 407-428.
- [38] **G. Gundersen**, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates* *J. London, Math Soc.* 1988, 37(2), 88-104.
- [39] **W. Hayman**, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

- 
- [40] **J. Heittokangas**, *On complex differential equations in the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. 122(2000), 1-54.
- [41] **J. Heittokangas, R. Korhonen and J. Rattya**, *Fast growing solutions of linear differential equations*, Ann Acad Sci Fenn Math, 2004, 29, 233-246.
- [42] **J. Heittokangas, R. Korhonen and J. Rattya**, *Growth estimates for solutions of linear differential equations in the unit disc*, Result. Math. 49(2006), 265-278.
- [43] **L. Kinnunen**, *Linear differential equations with solutions of finite iterated order*, Southeast Asian Bull. Math., **22 : 4** (1998), 385-405.
- [44] **K. H. Kwon**, *Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations*, Kodai Math. J. 19 (1996), 378-387.
- [45] **I. Laine**, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, W. de Gruyter, Berlin, 1993.
- [46] **I. Laine and J. Rieppo**, *Differential polynomials generated by linear differential equations*, Complex Var. Elliptic Equ. 49(2004), 897-911.
- [47] **I. Laine and S. B. Bank**, *On the oscillation theory of  $f'' + Af = 0$ , where  $A$  is entire*, Tran. Amer. Math. Soc. , 273 (1982), 351-363.
- [48] **J. Wang, I. Laine**, *Growth of solutions of second order linear differential equations with meromorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. 342 (2008), no. 1, 39–51.
- [49] **X.Y. Li**, *The complex oscillation theory of  $f'' + Af' + Bf = F$ , where  $A, B, F$  are transcendental meromorphic functions*, Kodai math. J 17 (1994), 299-310.
- [50] **M. S. Liu, and X. M. Zhang**, *Fixed points of meromorphic solutions of higher order Linear differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., **31**(2006), 191-211.
- [51] **A. Z. Mohon'ko**, *The Nevanlinna characteristic of certain meromorphic functions*, Teor. Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen. 14 (1971), 83-87.
- [52] **R. Nevanlinna**, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929.
- [53] **R. Nevanlinna**, *Eindeutige Analytische Funktionen*, Zweite Auflage. Reprint. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 46. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.
- [54] **D. Shea and L. Sons**, *Value distribution theory for meromorphic functions of slow growth in the disk*, Houston J. Math. 12(1986), no. 2, 249-266.

- 
- [55] **M. Tsuji**, *Potential theory in modern function theory*, reprinting of the 1959 edition, (Chelsea, New York, 1957).
- [56] **J. Tu, C.-F. Yi**, *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order*, J Math Ana Appl, Volume 340, Issue 1, 1 April 2008, Pages 487-497.
- [57] **G. Valiron**, *Lectures on the General Theory of Integral Functions*, translated by E. F. Collingwood, Chelsea, New York, 1949.
- [58] **J. Wang and W.-R. Lü**, *The fixed points and hyper-order of solutions of second order linear differential equations with meromorphic coefficients*, Acta Math. Appl. Sin. 27(2004), 72-80. (in Chinese).
- [59] **J. Wang and H.-X. Yi**, *Fixed points and hyper order of differential polynomials generated by solutions of differential equation*, Complex Var. Elliptic Equ. 48(2003), no. 1, 83-94.
- [60] **H. Y. Xu, T. B. Cao**, *Oscillation of solutions of some higher order linear differential equations*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2009, No. 63, 18 pp.
- [61] **L. Yang**, *Value distribution theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993/ Science Press, Beijing, 1982.
- [62] **H. X. Yi, C. C. Yang**, *The Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, Science Press, Beijing, 1995 (in Chinese).
- [63] **G. Zhang and A. Chen**, *Fixed points of the derivative and  $k$ -th power of solutions of complex linear differential equations in the unit disc*, Electron. J. Diff. Eqns. 2009, No. 48, 1-9.
- [64] **Q. T. Zhang and C. C. Yang**, *The Fixed Points and Resolution Theory of Meromorphic Functions*, Beijing University Press, Beijing, 1988 (in Chinese).