

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES



THÈSE

présentée pour l'obtention d'un

DOCTORAT LMD en MATHÉMATIQUES

Spécialité : "Analyse Mathématique"

par :

Aboubaker El-Saddik BOUZIANE

Sur l'existence et la ULAM-stabilité de certaines classes de systèmes dynamiques à dérivées arbitraires

soutenu publiquement le 09 juillet 2026 devant le jury composé de :

Président :	Mohand OULD ALI	Professeur	UMAB
Examineurs :	Zoubir DAHMANI Amouria HAMMOU	Professeur MCA	Univ Blida 1 UMAB
Directeur de thèse :	Berrabah BENDOUKHA	Professeur	UMAB
Invité :	Samira HAMANI	Professeure	UMAB

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu Le Tout-Puissant de m'avoir accordé la patience, la volonté et l'énergie nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, le professeur **BEN-DOUKHA Berrabah**, pour son soutien et ses précieux conseils tout au long de mon doctorat. Son mentorat a été déterminant dans le développement de mes recherches et de mon parcours universitaire. Je tiens à témoigner ma profonde et sincère reconnaissance à la professeure **HAMANI Samira** pour son encadrement exemplaire, la finesse de ses analyses et la pertinence de ses orientations, qui ont constitué un appui déterminant dans l'aboutissement de nos travaux de recherche. J'adresse également mes remerciements aux membres de mon comité de thèse pour leurs commentaires pertinents, qui ont grandement contribué à l'amélioration de mon travail.

De plus, je suis profondément reconnaissant envers mes parents pour leur soutien indéfectible, qui a été une source constante de force. Leurs encouragements m'ont motivé à persévérer face aux difficultés. Enfin, je tiens à remercier ma famille et mes amis pour leurs encouragements durant cette étape importante de ma vie. Leur confiance en moi a été une force motrice, et je leur suis sincèrement reconnaissant de leur présence et de leur soutien tout au long de ce parcours. Merci à tous d'avoir contribué à ma réussite.

Publications et Communications

Publications Internationales

- **A. E-S. BOUZIANE, B. BENDOUKHA, S. HAMANI.** *Boundary Value Problem for Fractional Differential Inclusions with Integral Boundary Conditions.* Arab Journal of Mathematical Sciences, 32 (2), (2026), 161-177. <https://doi.org/10.1108/AJMS-11-2024-0171>
- **A. E-S. BOUZIANE, B. BENDOUKHA.** *Existence and Ulam-Hyers Stability for a Singular Caputo-Fractional Problem with Integral Boundary Conditions.* Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization, (2026). <https://doi.org/10.22067/ijnao.2026.93179.1636>

Conférences Nationales et Internationales

- **Aboubaker El-Saddik BOUZIANE., Berrabah BENDOUKHA.** *On the singular Caputo-fractional problem with integral boundary condition.* The International Conference on Contemporary Mathematics and its Applications (ICCMa 2023), November 26-27, 2023, University Center of Mila "Abdelhafid Boussouf", Mila, Algeria.
- **Aboubaker El-Saddik BOUZIANE., Berrabah BENDOUKHA.** *On a Certain Singular Caputo-Fractional Problem with Two Boundary Integral Conditions.* The International Conference on Mathematical Analysis and Applications in Science and Engineering, June 20-22, 2024, ISEP, Porto, Portugal.
- **Aboubaker El-Saddik BOUZIANE., Berrabah BENDOUKHA.** *Existence of Solutions for Caputo-Fractional Differential Equation Via Fixed Point Theorems.* The 1st National Conference on Applied Mathematics, Statistics and Applications (NCAMSA 2024), November 18-19, 2024, University of Batna 2 "Mostefa Ben Boulaid", Batna, Algeria.
- **Aboubaker El-Saddik BOUZIANE., Berrabah BENDOUKHA.** *On a Certain Class of Singular Fractional Caputo-Differential Problems Via Fixed Point Technique.* The 1st National Symposium on Innovative Mathematics : Retrospective and Perspectives, December 11-12, 2024, Faculty of Exact Sciences and Computer Science, Abdelhamid Ibn Badis University, Mostaganem, Algeria.
- **Aboubaker El-Saddik BOUZIANE., Berrabah BENDOUKHA.** *Applications of a Fixed Point Results for Solving Fractional-Differential Problem With Integral Boundary Conditions.* The International Conference on Mathematics and its Applications in Science and Technology (ICMAST 2024), December 15-16, 2024, University of Sétif 1 "Ferhat Abbas", Sétif, Algeria.
- **Aboubaker El-Saddik BOUZIANE., Berrabah BENDOUKHA.** *New Existence Results for Caputo-Fractional Differential Equation With Two Integral Boundary Conditions in Banach Space.* The Two-Day Conference on Mathematical Sciences and Applica-

tions, January 02-03, 2025, Department of Mathematical Sciences, Tezpur University, Tezpur, India.

- **Aboubaker El-Saddik BOUZIANE., Berrabah BENDOUKHA.** *Existence Solutions for Singular Caputo-Fractional Differential Problem Via Krasnosel'skii Fixed Point Theorem.* The 2nd International Conference on Recent Advances in Mathematics and Informatics (ICRAMI'2025), November 20-23, 2025, University of Carthage, Sousse, Tunisia.
- **Aboubaker El-Saddik BOUZIANE., Berrabah BENDOUKHA.** *Existence of Solutions for Caputo Fractional Equations Under Integral Boundary Value Conditions.* The 1st International Conference on Algebraic Structures and Partial Differential Equations (ICAPDE 2025), November 25-26, 2025, Higher School of Teachers "Mesoud Zeghar", Sétif, Algeria.
- **Aboubaker El-Saddik BOUZIANE., Berrabah BENDOUKHA.** *Investigating a Class of Caputo-Type Fractional Integro-Differential Equations.* The 2nd International Conference Mohand Moussaoui on Applied Mathematics and Modeling (ICMAM'25), December 15-16, 2025, University 8 May 1945, Guelma, Algeria.

Sur l'existence et la ULAM-stabilité de certaines classes de systèmes dynamiques à dérivées arbitraires

Résumé : La présente thèse est consacrée à l'étude de certains problèmes fractionnaires différentielles assujettis à des conditions intégrales. Dans un premier temps, on considère le cas où, le second membre est une fonction à valeurs réelles. Un résultat d'existence et d'unicité est alors obtenu grâce au principe de contraction de Banach. Trois résultats d'existence sont aussi obtenus grâce au théorème du point fixe de Schauder. Dans un second temps, on considère le cas où, le second membre est une fonction multivoque, on est alors en présence d'une inclusion différentielle fractionnaire. Des résultats d'existence sont alors obtenus grâce au théorème de Covitz-Nadler et du théorème de Bohnenblust-Karlin, le cas convexe et le cas non convexe sont séparément traités. Enfin, on considère le cas où, le second membre est à valeurs dans un espace de Banach et les conditions intégrales contiennent des opérateurs linéaires bornés. Dans ce cas, un résultat d'existence et d'unicité est obtenu grâce au principe de contraction de Banach et un autre d'existence, grâce au théorème de Krasnosel'skii. Notons enfin que dans tous les cas d'existence et d'unicité, des résultats de stabilité au sens de Ulam-Hyers et Ulam-Hyers-Rassias sont établis.

Mots-Clés. Calcul fractionnaire, Conditions intégrales, Dérivée du Caputo, Point fixe, Ulam-stabilités.

On the existence and ULAM-stability of certain classes of dynamic systems with arbitrary derivatives

Abstract : The present thesis is devoted to the study of certain fractional differential problems with integral conditions. In a first time, the case of real value second member is considered. For this case, an existence and uniqueness result is obtained thanks to the Banach contraction principle. Three existence results are established by mean of the Schauder fixed point theorem. In a second time, it is supposed that the second member is a multivalued map, we are then dealing with a fractional differential inclusion. Existence results are obtained by means of the Covitz-Nadler and the Bohnenblust-Karlin theorems, the convex and nonconvex cases are treated separately. Finally, we consider the case where the second member takes values in a Banach space and the integral conditions contain bounded linear operators. An existence and uniqueness result is obtained thanks to the Banach contraction principle and an existence result by mean of the Krasnosel'skii fixed point theorem. Finally, it should be noted that in all cases of existence and uniqueness, stability results in the sense of Ulam-Hyers and Ulam-Hyers-Rassias are established.

Key Words. Boundary problems, Caputo derivative, Fixed points, Fractional calculus, Integral conditions, Ulam stabilities.

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaires	5
1 Quelques espaces fonctionnels de Banach	5
2 Théorèmes classiques de la théorie du point fixe	6
3 Fondamentaux du calcul fractionnaire. Cas des fonctions réelles	7
2 Existence et Ulam-stabilités des solutions : Cas des conditions intégrales à coefficients réels	8
1 Résultats auxiliaires	8
2 Existence des solutions	13
3 Ulam - stabilités	22
3 Existence de solution dans le cas d'une inclusion différentielle	25
1 Rappels des fondamentaux des fonctions multivoques	25
2 Existence de solutions	27
2.1 Le cas convexe	27
2.2 Le cas non convexe	29
3 Exemple	31
4 Existence et stabilité des solutions : Cas des conditions intégrales à coefficients opérateurs linéaires	33
1 Introduction	33
2 Concepts et résultats préliminaires fondamentaux	33
2.1 Intégrale de Bochner	33
2.2 Calcul fractionnaire pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach	36
2.3 Résultats auxiliaires	37
2.4 Existence de solutions	41
2.5 Stabilités d'Ulam	45
3 Exemples	47
Conclusion	51
Bibliographie	52

Introduction

Les équations différentielles d'ordre fractionnaire se sont ces dernières années révélées être des outils efficaces dans la modélisation de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie. En effet, il y a des applications en biologie [10, 53], systèmes chaotiques [37, 78], contrôle [17, 56, 75], processus de diffusion [39, 46, 70], économie [57], électrochimie [58], électromagnétisme [52], les problèmes variationnels [6], la viscoélasticité [54], etc... Les inclusions différentielles sont utilisées dans la modélisation de problèmes réels découlant de l'économie, du contrôle optimal, etc..., c'est pourquoi, elles suscitent ces derniers temps l'intérêt de nombreux auteurs, voir ([1, 4, 8, 9, 19, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 38, 40, 42, 69]) et références s'y trouvant. Il existe plusieurs types de dérivées fractionnaires. Cependant, les problèmes appliqués nécessitent la définition de dérivées fractionnaires permettant l'utilisation de données initiales physiquement interprétables, qui contiennent les valeurs $y(0)$, $y'(0)$, etc..., et les mêmes exigences pour les conditions aux limites. La dérivée fractionnaire de Caputo répond justement à ces exigences. Concernant le calcul fractionnaire en général et la théorie des équations différentielles fractionnaires en particulier, nous renvoyons aux monographies de Hilfer. R. [43], Kilbas. A. A. *et al.* [48], Podlubny. I. [61], Zhou. Y. [79].

Outre l'existence, l'unicité et la régularité des solutions des équations différentielles fractionnaires, l'étude de la Ulam-Hyers et la Ulam-Hyers-Rassias stabilités suscitent l'intérêt des chercheurs dans leurs investigations des problèmes différentiels fractionnaires.

Le problème de stabilité a été formulé et discuté pour la première fois par Ulam et Hyers [45, 72, 73] pour les équations fonctionnelles. En 1978, Rassias [62] a fourni une généralisation du théorème de Hyers qui permet à la différence de Cauchy d'être non bornée. Les résultats de Hyers et Rassias ont été généralisés dans de nombreuses directions à d'autres contextes (voir par exemple [3, 64, 65, 71] et les références y figurant). Ils ont également inspiré de nombreux chercheurs pour le cas des équations différentielles fractionnaires. Dans le cas de la dérivée de Caputo, un travail pionnier a été publié en 2011 par Wang *et al.* [75]. En utilisant la technique du point fixe, Wang *et al.* ont fourni des conditions suffisantes de stabilité pour le problème Caputo-fractionnaire suivant

$${}^C D^\alpha x(t) + f(t, x(t)) = 0, \quad t \in [a, +\infty) \quad (1)$$

où, la fonction f est continûment définie à partir de $[a, +\infty) \times \mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est un espace de Banach donné. Depuis, il y a eu beaucoup de travaux dédiés à la Ulam-Hyers et Ulam-Hyers-Rassias stabilités des équations différentielles fractionnaires du type (1) et divers genres de données initiales (voir par exemple [9, 11, 36, 47, 59, 67] et références s'y trouvant).

En 2015, Rezapour. S. *et al.* [63] considèrent le problème Caputo-fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) + f(t, x(t)) = 0, & t \in [0, 1], \quad n = [\alpha] + 1 \\ x(0) = x'(0) = x^{(3)}(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0 \\ ax(1) = I^p x(1), \end{cases}, \quad \begin{matrix} a \geq 1, \alpha \geq 3, p \geq 1, 2\Gamma(p) \geq \Gamma(\alpha) \end{matrix} \quad (2)$$

où, I^p est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre p , f une fonction singulière au point $t = 0$. Après transformation en un problème intégral équivalent, un critère suffisant d'existence et d'unicité est obtenu à l'aide du principe de contraction de Banach et un critère suffisant d'existence en utilisant la forme compressive du théorème du cône de Guo-Krasnosel'skii. En 2020, Kheiryan. A. *et al.* [47] investiguèrent la Ulam-stabilité du problème (2) via sa formulation intégrale.

La présente thèse, principalement inspirée par les travaux [63] et [47] est dédiée à l'étude (existence de solutions, unicité, stabilité et quelques extensions) du problème différentiel fractionnaire (PDF dans la suite) constitué de l'équation

$${}^C D^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \quad t \in J = [0, 1], \alpha \geq 3, \quad (3)$$

assujettie aux conditions initiales

$$x^{(j)}(0) = 0, \quad j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{j_1, j_2\}, \quad n = [\alpha] + 1 \quad (4)$$

et aux conditions intégrales

$$a_k x^{(q_k)}(1) = I^{p_k} x(1), \quad (a_k, p_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \quad 0 < a_k, \quad 1 \leq p_k, \quad k = \overline{1, 2}. \quad (5)$$

où, ${}^C D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo-Liouville, $f : [0, 1] \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une fonction donnée vérifiant certaines conditions qui seront précisées plus bas, $\mathcal{E}$ est un espace de Banach réel, $j_1, j_2, q_1, q_2, p_1, p_2$ sont des entiers positifs tels que

$$0 \leq q_1 \neq q_2 \leq q_0 := \max(q_1, q_2) < j_0 := \min(j_1, j_2) \leq j_1 \neq j_2 \leq \max(j_1, j_2) \leq [\alpha]. \quad (6)$$

Notons que si on pose

$$q_1 = q_2 := 0, \quad j_1 = j_2 := 2, \quad p_1 = p_2 := p, \quad a_1 = a_2 := a \geq 1,$$

on retrouve la formulation du problème investigué dans [63] mais sans la condition supplémentaire $2\Gamma(p) \geq \Gamma(\alpha)$.

La thèse est organisée comme suit. Dans le chapitre 1 des préliminaires, nous commençons par introduire certains espaces fonctionnels de Banach classiques et rappelons les théorèmes du point fixe de Banach, de Schauder et de Krasnosel'skii. Nous terminons par le rappel des fondamentaux de l'intégration et la dérivation fractionnaires au sens de Caputo-Liouville. Le chapitre 2 est dédié à l'existence de solutions et la stabilité du PDF (3 - 6) dans le cas où, f est à valeurs réelles, c'est à dire $\mathcal{E} = \mathbb{R}$. On montre en premier lieu (voir lemme 2.1) que ce problème est équivalent à une équation intégrale à noyau continu, ce qui permet d'introduire dans l'espace de Banach des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ un opérateur intégral dont les points fixes sont les solutions de notre problème. En imposant successivement différentes conditions à la fonction f , nous obtenons respectivement un résultat d'existence et d'unicité (voir théorème 2.1) grâce au théorème du point fixe de Banach et trois résultats d'existence (voir théorèmes 2.2, 2.3, 2.4) par application du théorème du point fixe de schauder. Par la suite, nous montrons que si pour un certain $0 < \sigma < 1$, la fonction $t^\sigma |f(t, 0)|$ possède un suprémum fini strictement positif alors, sous certaines conditions supplémentaires, on a la Ulam-Hyers et la Ulam-Hyers-Rassias stabilités (voir les théorèmes 2.5, 2.6).

Dans le chapitre 3, nous considérons le cas où, f est une fonction multivoque c'est à dire, que ses valeurs sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on est en présence d'un problème d'inclusion différentielle

$${}^C D^\alpha x(t) \in f(t, x(t)), \quad t \in J = [0, 1], \alpha \geq 3$$

avec les mêmes conditions initiales (4) et les mêmes conditions intégrales (5). Après rappel des fondamentaux de la théorie des inclusions différentielles, nous donnons deux résultats d'existence. Le premier utilise le lemme de Bohnenblust-Karlin et correspond au cas où f est à valeurs convexes (voir théorème 3.2). Le second, utilise le lemme de Covitz-Nadler et correspond où f à valeurs non convexes mais compactes (voir théorème 3.3). Dans le quatrième et dernier chapitre, nous reprenons l'équation (3) en supposant que $f : [0, 1] \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ où, $\mathcal{E}$ est un espace de Banach réel. Nous conserverons les mêmes conditions initiales (4) cependant, dans les conditions intégrales (5) nous remplacerons les scalaires a_k par des opérateurs linéaires A_k , bornés dans $\mathcal{E}$. Comme dans le cas scalaire, nous montrons que le problème différentiel obtenu est équivalent à une équation intégrale à noyau continu, ce qui permet de définir un opérateur intégral défini dans l'espace de Banach des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathcal{E}$ un opérateur intégral dont les points fixes sont les solutions du problème étudié. Comme dans le cas réel, un résultat d'existence et d'unicité (voir théorème 4.7) est obtenu grâce au théorème du point fixe de Banach et un résultat d'existence (voir théorème 4.8) est établi par application du théorème du point fixe de Krasnosel'skii. Par la suite, nous montrons que sous certaines conditions sur f , le problème étudié est Ulam-Hyers stable (théorème 4.9) et Ulam-Hyers-Rassias stable (théorème 4.10) par rapport à toute fonction φ Riemann intégrable sur $[0, 1]$ et vérifiant pour une certaine constante positive δ_φ la condition

$$\forall \tau \in [0, 1] : \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta \leq \delta_\varphi \varphi(\tau).$$

Dans chaque chapitre, des exemples sont donnés pour illustrer les résultats obtenus. Notons enfin que les résultats du chapitre 3, ont fait l'objet d'une publication dans la revue "Arab Journal of Mathematical Sciences" [26]. Un autre article, traitant l'existence, la ULAM stabilité avec des conditions contenant des opérateurs linéaires (chapitre 4) a été accepté pour publication par la revue "Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization" [27].

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons les résultats utiles pour la suite. Il s'agit essentiellement de certains théorèmes du point fixe, des fondamentaux du calcul fractionnaire des fonctions à valeurs réelles. L'intégration et la dérivation fractionnaires des fonctions à valeurs dans un espace de Banach seront exposées dans le chapitre 4.

1 Quelques espaces fonctionnels de Banach

Tout d'abord, rappelons qu'un espace de Banach est un espace vectoriel $\mathcal{X}$ muni d'une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ pour laquelle, toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{X}$ converge dans $\mathcal{X}$.

Les espaces de Banach que nous utiliserons tout au long de cette thèse seront des espaces de fonctions définies sur un intervalle fini $J = [0, T]$, ($0 < T < +\infty$). Ainsi, on notera :

1) $C(J)$ - l'espace de Banach des fonctions réelles (à valeurs dans $\mathbb{R}$), définies continues sur J . La norme dans $C(J)$ est donnée par la formule :

$$\|x\|_{\infty} = \sup \{|x(t)| : t \in J\},$$

2) $L^p(J)$ ($1 \leq p < +\infty$)- L'espace de Banach des fonctions réelles, p - intégrables sur J . La norme dans cet espace est définie comme suit :

$$\|x\|_{L^p(J)} = \left(\int_J |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} := \left(\int_0^T |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $C(J)$ admet la généralisation suivante. Etant donné un espace de Banach $\mathcal{E}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, on note :

3) $C(J, \mathcal{E})$ - l'espace de Banach des fonctions continûment définies sur J et à valeurs dans $\mathcal{E}$. La norme dans $C(J, \mathcal{E})$ est donnée par la formule :

$$\|x\|_{C(J, \mathcal{E})} = \sup \{\|x(t)\|_{\mathcal{E}} : t \in J\}.$$

Pour les espaces $C(J, \mathcal{E})$, on a les deux concepts très liés d'équicontinuité et de compacité relative d'un sous-ensemble.

Définition 1.1 *Un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $C(J, \mathcal{E})$ est dit équicontinu si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (t_1, t_2) \in J^2 \wedge |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|h(t_1) - h(t_2)\|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon, \forall h \in \mathcal{M}.$$

Définition 1.2 *Un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $C(J, \mathcal{E})$ est dit relativement compact si, son adhérence $\overline{\mathcal{M}}$ est un compact de $C(J, \mathcal{E})$.*

On a le théorème fondamental suivant

Théorème 1.1 (d'Ascoli-Arzelà [41])

Un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $C(J, \mathcal{E})$ est relativement compact si et seulement si, il est équicontinu et pour tout $t \in J$, l'ensemble

$$\mathcal{M}(t) = \{f(t) : f \in \mathcal{M}\}$$

est relativement compact dans $\mathcal{E}$.

Remarque 1.1 .

Dans le cas où, l'espace de Banach $\mathcal{E}$ est de dimension finie (par exemple $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$), pour que l'ensemble $\mathcal{M}(x)$ soit relativement compact dans $\mathcal{E}$, il suffit qu'il soit borné. En effet, en dimension finie les seules parties compactes sont les fermés bornés.

2 Théorèmes classiques de la théorie du point fixe

Dans toute cette section, $\mathcal{X}$ désigne un espace de Banach.

Définition 1.3 Une application $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ est dite *Lypshitzienne* s'il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_{\mathcal{X}} \leq L \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{X}}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}.$$

On dit aussi que f est *L-Lypshitzienne*. Si de plus, $0 < L < 1$, on dit alors que f est une application contractante (ou que f est une contraction dans $\mathcal{X}$).

En 1922, le mathématicien polonais S. Banach établit le très célèbre résultat suivant, connu dans la littérature sous le nom de "Principe de contraction de Banach".

Théorème 1.2 [18] (Principe de contraction de Banach)

Toute contraction f dans un espace de métrique complet (en particulier dans $\mathcal{X}$), admet un point fixe unique. En d'autres termes, l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans $\mathcal{X}$.

Définition 1.4 Une application $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ est dite *complètement continue* si, elle est continue et compacte (c'est à dire, transforme tout sous-ensemble borné en un sous-ensemble à adhérence compacte).

Notons que dans le cas, d'une application linéaire bornée, les concepts d'application complètement continue et application compacte coïncident. Pour les applications complètement continues, il existe plusieurs résultats du point fixe parmi lesquels

Théorème 1.3 [68] (Théorème du point fixe de Schauder)

Soit Ω un sous-ensemble non vide, fermé, convexe et borné d'un espace de Banach $\mathcal{X}$. Alors, toute application complètement continue $H : \Omega \longrightarrow \Omega$ admet au moins un point fixe dans Ω .

Théorème 1.4 [49] (Théorème du point fixe de Krasnosel'skii)

Soit $\mathcal{M}$ un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathcal{X}$. Soient Φ, Ψ deux applications de $\mathcal{X}$ dans lui même et vérifiant les conditions :

(a) $\Phi(z) + \Psi(y) \in \mathcal{M}$ pour tous z, y dans $\mathcal{M}$.

(b) Φ est complètement continue.

(c) Ψ est une contraction.

Alors, il existe $x \in \mathcal{M}$ tel que $\Phi(x) + \Psi(x) = x$.

3 Fondamentaux du calcul fractionnaire. Cas des fonctions réelles

Dans cette section, nous exposons les concepts fondamentaux du calcul fractionnaire [48, 61, 66]. Soient $\alpha > 0$, $[\alpha] := n - 1$ sa partie entière et $J = [0, T]$, $T < +\infty$.

Définition 1.5 [48] *L'intégrale fractionnaire (au sens de Riemann-Liouville) d'ordre α d'une fonction $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par*

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

quand cette intégrale existe.

Définition 1.6 [48] *La dérivée fractionnaire de Caputo - Liouville d'ordre α de f est donnée par la formule*

$${}^C D_0^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & (n-1 < \alpha < n) \\ f^{(n)}(t), & (\alpha = n) \end{cases}$$

Dans les deux définitions précédentes $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Pour l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, on a les propriétés fondamentales suivantes

Lemme 1.1 [48]

(i) *Propriété de régularisation : La dérivée fractionnaire de Caputo-Liouville de toute fonction constante est la fonction nulle.*

(ii) *Propriété de linéarité : Si $I_0^\alpha f_1(t)$ et $I_0^\alpha f_2(t)$ existent alors, $I_0^\alpha (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t)$ existe et on a :*

$$I_0^\alpha (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t) = \lambda_1 I_0^\alpha f_1(t) + \lambda_2 I_0^\alpha f_2(t), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

(iii) *Propriété du semi-groupe*

$$I_0^\alpha I_0^\beta f(t) = I_0^{\alpha+\beta} f(t), \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

(iv) *Si $\alpha > 0$, $\gamma > -1$, alors*

$$I_0^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma}.$$

(v) *Si $\alpha > 0$, $\gamma > -1$, alors*

$${}^C D_0^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} t^{\gamma-\alpha}.$$

Lemme 1.2 [48] *Si l'intégrale fractionnaire d'ordre α de la fonction h existe alors, la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire ${}^C D^\alpha x(t) + h(t) = 0$, $(0 \leq t \leq 1)$ est donnée par la formule*

$$x(t) = \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_0 + c_1 t + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

où, $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ sont des constantes réelles.

Chapitre 2

Existence et Ulam-stabilités des solutions : Cas des conditions intégrales à coefficients réels

Ce chapitre est dédié à l'étude du problème différentiel fractionnaire aux valeurs limites (PDF) (3)-(6) par la méthode classique, c'est à dire par l'utilisation de l'un des théorèmes du point fixe cités dans le chapitre 1.

1 Résultats auxilliaires

Définition 2.1 Une fonction $y \in C^n(J)$, $n \in \mathbb{N}$ est dite solution du PDF (3)-(6) si, y satisfait l'équation $({}^C D^\alpha x)(t) = f(t, x(t))$ dans J ainsi que les conditions (4), (5).

Dans la suite, nous utiliserons les fonctions auxilliaires suivantes :

$$u(a, j, p, q) = \Gamma(j+1) \frac{a\Gamma(p+j+1) - \Gamma(j-q+1)}{\Gamma(p+j+1)\Gamma(j-q+1)}. \quad (2.1)$$

$$v(s, a, p, q) = \frac{a\Gamma(\alpha+p)(1-s)^{\alpha-q-1} - \Gamma(\alpha-q)(1-s)^{\alpha+p-1}}{\Gamma(\alpha-q)\Gamma(\alpha+p)}, \quad (0 \leq s \leq 1). \quad (2.2)$$

$$A = u(a_1, j_1, p_1, q_1)u(a_2, j_2, p_2, q_2) - u(a_1, j_2, p_1, q_1)u(a_2, j_1, p_2, q_2). \quad (2.3)$$

$$g_1(s) = \frac{u(a_2, j_2, p_2, q_2)v(s, a_1, p_1, q_1) - u(a_1, j_2, p_1, q_1)v(s, a_2, p_2, q_2)}{u(a_1, j_1, p_1, q_1)u(a_2, j_2, p_2, q_2) - u(a_1, j_2, p_1, q_1)u(a_2, j_1, p_2, q_2)}, \quad (s \in J), \quad A \neq 0, \quad (2.4)$$

$$g_2(s) = \frac{u(a_1, j_1, p_1, q_1)v(s, a_2, p_2, q_2) - u(a_2, j_1, p_2, q_2)v(s, a_1, p_1, q_1)}{u(a_1, j_1, p_1, q_1)u(a_2, j_2, p_2, q_2) - u(a_1, j_2, p_1, q_1)u(a_2, j_1, p_2, q_2)} \quad (s \in J), \quad A \neq 0. \quad (2.5)$$

Un calcul direct permet d'établir que,

$$u(a_1, j_1, p_1, q_1)g_1(s) + u(a_1, j_2, p_1, q_1)g_2(s) = v(s, a_1, p_1, q_1), \quad (s \in J), \quad (2.6)$$

$$u(a_2, j_1, p_2, q_2)g_1(s) + u(a_2, j_2, p_2, q_2)g_2(s) = v(s, a_2, p_2, q_2), \quad (s \in J). \quad (2.7)$$

Nous allons ici démontrer (2.6), la relation (2.7) se démontre de manière similaire. On a pour $s \in J$, $A \neq 0$

$$\begin{aligned}
 & u(a_1, j_1, p_1, q_1)g_1(s) + u(a_1, j_2, p_1, q_1)g_2(s) = \\
 & u(a_1, j_1, p_1, q_1) \frac{u(a_2, j_2, p_2, q_2)v(s, a_1, p_1, q_1) - u(a_1, j_2, p_1, q_1)v(s, a_2, p_2, q_2)}{u(a_1, j_1, p_1, q_1)u(a_2, j_2, p_2, q_2) - u(a_1, j_2, p_1, q_1)u(a_2, j_1, p_2, q_2)} \\
 & + u(a_2, j_2, p_2, q_2) \frac{u(a_1, j_1, p_1, q_1)v(s, a_2, p_2, q_2) - u(a_2, j_1, p_2, q_2)v(s, a_1, p_1, q_1)}{u(a_1, j_1, p_1, q_1)u(a_2, j_2, p_2, q_2) - u(a_1, j_2, p_1, q_1)u(a_2, j_1, p_2, q_2)} \\
 & = \frac{u(a_1, j_1, p_1, q_1)u(a_2, j_2, p_2, q_2)v(s, a_1, p_1, q_1) - u(a_1, j_1, p_1, q_1)u(a_1, j_2, p_1, q_1)v(s, a_2, p_2, q_2)}{u(a_1, j_1, p_1, q_1)u(a_2, j_2, p_2, q_2) - u(a_1, j_2, p_1, q_1)u(a_2, j_1, p_2, q_2)} \\
 & + \frac{u(a_2, j_2, p_2, q_2)u(a_1, j_1, p_1, q_1)v(s, a_2, p_2, q_2) - u(a_2, j_2, p_2, q_2)u(a_2, j_1, p_2, q_2)v(s, a_1, p_1, q_1)}{u(a_1, j_1, p_1, q_1)u(a_2, j_2, p_2, q_2) - u(a_1, j_2, p_1, q_1)u(a_2, j_1, p_2, q_2)} \\
 & = \frac{u(a_1, j_1, p_1, q_1)u(a_2, j_2, p_2, q_2) - u(a_1, j_2, p_1, q_1)u(a_2, j_1, p_2, q_2)}{u(a_1, j_1, p_1, q_1)u(a_2, j_2, p_2, q_2) - u(a_1, j_2, p_1, q_1)u(a_2, j_1, p_2, q_2)} v(s, a_1, p_1, q_1) \\
 & = v(s, a_1, p_1, q_1).
 \end{aligned}$$

Pour l'existence des solutions du problème (3)-(6), nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1 *Supposons que $h \in L^1(J)$ et $A \neq 0$ alors, x est solution dans J du problème*

$$({}^C D^\alpha x)(t) = h(t), \quad t \in J = [0, 1], \alpha \geq 3 \quad (2.8)$$

$$x^{(j)}(0) = 0, \quad j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{j_1, j_2\}, \quad n = [\alpha] + 1 \quad (2.9)$$

$$a_k x^{(q_k)}(1) = I^{p_k} x(1), \quad (a_k, p_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \quad 0 < a_k, \quad 1 \leq p_k, \quad k = \overline{1, 2} \quad (2.10)$$

si et seulement si, elle admet la représentation

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) h(s) ds, \quad (2.11)$$

où,

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + t^{j_1} g_1(s) + t^{j_2} g_2(s); & 0 \leq s < t \\ t^{j_1} g_1(s) + t^{j_2} g_2(s); & t \leq s \leq 1 \end{cases}. \quad (2.12)$$

Preuve. D'après le lemme 1.2, la forme générale de la solution du problème (2.8)-(2.10) est

$$x(t) = \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_0 + c_1 t + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

où, $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ sont des constantes réelles.

En utilisant les conditions initiales au point $t = 0$, on obtient que $c_k = 0$ pour $k \notin \{j_1, j_2\}$ et donc,

$$x(t) = \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_{j_1} t^{j_1} + c_{j_2} t^{j_2}, \quad (0 \leq t \leq 1).$$

La condition intégrale $a_k x^{(q_k)}(1) = I^{p_k}(1)$ nous donne

$$\begin{aligned} & \frac{-a_k}{\Gamma(\alpha - q_k)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-q_k+1} h(s) ds + \frac{a_k \Gamma(j_1+1)}{\Gamma(j_1 - q_k + 1)} c_{j_1} + \frac{a_k \Gamma(j_2+1)}{\Gamma(j_2 - q_k + 1)} c_{j_2} \\ &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha + p_k)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+p_k+1} h(s) ds + \frac{\Gamma(j_1+1)}{\Gamma(j_1 + p_k + 1)} c_{j_1} + \frac{\Gamma(j_2+1)}{\Gamma(j_2 + p_k + 1)} c_{j_2} \end{aligned}$$

ou sous forme équivalente

$$\begin{aligned} & c_{j_1} \left(\frac{a_k \Gamma(j_1+1)}{\Gamma(j_1 - q_k + 1)} - \frac{\Gamma(j_1+1)}{\Gamma(j_1 + p_k + 1)} \right) + c_{j_2} \left(\frac{a_k \Gamma(j_2+1)}{\Gamma(j_2 - q_k + 1)} - \frac{\Gamma(j_2+1)}{\Gamma(j_2 + p_k + 1)} \right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{a_k (1-s)^{\alpha-q_k+1}}{\Gamma(\alpha - q_k)} - \frac{(1-s)^{\alpha+p_k+1}}{\Gamma(\alpha + p_k)} \right) h(s) ds, \end{aligned}$$

c'est à dire,

$$c_{j_1} u(a_k, j_1, p_k, q_k) + c_{j_2} u(a_k, j_2, p_k, q_k) = \int_0^1 v(s, a_k, p_k, q_k) h(s) ds.$$

En posant dans la précédente équation successivement $k = 1$ et $k = 2$, on obtient que c_{j_1} et c_{j_2} vérifient le système linéaire

$$(S): \begin{cases} c_{j_1} u(a_1, j_1, p_1, q_1) + c_{j_2} u(a_1, j_2, p_1, q_1) = \int_0^1 v(s, a_1, p_1, q_1) h(s) ds \\ c_{j_1} u(a_2, j_1, p_2, q_2) + c_{j_2} u(a_2, j_2, p_2, q_2) = \int_0^1 v(s, a_2, p_2, q_2) h(s) ds \end{cases} \quad (2.13)$$

Il est clair que le déterminant "det(S)" de ce système est la quantité A définie par la formule (2.3) :

$$\det(S) = A = u(a_1, p_1, j_1, q_1) u(a_2, p_2, j_2, q_2) - u(a_1, p_1, j_2, q_1) u(a_2, p_2, j_1, q_2). \quad (2.14)$$

Puisque $A \neq 0$ par hypothèse, le système (S) admet une solution unique (c_{j_1}, c_{j_2}) définie par :

$$\begin{cases} c_{j_1} = \frac{1}{\det(S)} \int_0^1 (u(a_2, p_2, j_2, q_2) v(s, a_1, p_1, q_1) - u(a_1, p_1, j_2, q_1) v(s, a_2, p_2, q_2)) h(s) ds \\ c_{j_2} = \frac{1}{\det(S)} \int_0^1 (u(a_1, p_1, j_1, q_1) v(s, a_2, p_2, q_2) - u(a_2, p_2, j_1, q_2) v(s, a_1, p_1, q_1)) h(s) ds \end{cases} \quad (2.15)$$

En remarquant que

$$(c_{j_1}, c_{j_2}) = \left(\int_0^1 g_1(s) h(s) ds, \int_0^1 g_2(s) h(s) ds \right)$$

et après report dans l'expression de $x(t)$, on trouve

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_{j_1} t^{j_1} + c_{j_2} t^{j_2} \\ &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + t^{j_1} \int_0^1 g_1(s) h(s) ds + t^{j_2} \int_0^1 g_2(s) h(s) ds \\ &= \int_0^1 G(t, s) h(s) ds. \end{aligned}$$

Inversement, supposons que la fonction $x(t)$, $t \in J$ admet la représentation (2.11). En remarquant que x peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = -I^\alpha h(t) + t^{j_1} \int_0^1 g_1(s) h(s) ds + t^{j_2} \int_0^1 g_2(s) h(s) ds,$$

on obtient facilement que

$$\begin{cases} ({}^C D^\alpha x)(t) + h(t) = 0, & t \in J \\ x^{(j)}(0) = 0, & 0 \leq j \neq j_1, j \neq j_2 \leq n-1 = [\alpha] \end{cases}$$

D'autre part pour tous naturels q_1, p_1 , vérifiant $0 \leq q_1 < \min(j_1, j_2)$, $p_1 \geq 1$ et tout réel $a_1 > 0$,

$$\begin{aligned} a_1 x^{(q_1)}(1) - I^{p_1} x(1) &= \int_0^1 \left(\frac{(1-s)^{\alpha+p_1-1}}{\Gamma(\alpha+p_1)} - \frac{a_1(1-s)^{\alpha-q_1-1}}{\Gamma(\alpha-q_1)} \right) h(s) ds \\ &\quad + \Gamma(j_1+1) \int_0^1 \frac{a_1 \Gamma(j_1+p_1+1) - \Gamma(j_1-q_1+1)}{\Gamma(j_1+p_1+1) \Gamma(j_1-q_1+1)} g_1(s) h(s) ds \\ &\quad + \Gamma(j_2+1) \int_0^1 \frac{a_1 \Gamma(j_2+p_1+1) - \Gamma(j_2-q_1+1)}{\Gamma(j_2+p_1+1) \Gamma(j_2-q_1+1)} g_1(s) h(s) ds \\ &= - \int_0^1 v(s, a_1, p_1, q_1) h(s) ds \\ &\quad + \int_0^1 (u(a_1, j_1, p_1, q_1) g_1(s) + u(a_1, j_2, p_1, q_1) g_2(s)) h(s) ds. \end{aligned}$$

D'où, en tenant compte de (2.6),

$$a_1 x^{(q_1)}(1) = I^{p_1} x(1).$$

Un raisonnement analogue permet à l'aide de la formule (2.7) de vérifier que

$$a_2 x^{(q_2)}(1) = I^{p_2} x(1).$$

Le lemme 2.1 est donc entièrement démontré. ■

Remarque 2.1 On a $A = \det(S) \neq 0$ par exemple si,

$$\begin{cases} a_1 > \max\left(\frac{\Gamma(j_1-q_1+1)}{\Gamma(p_1+j_1+1)}, \frac{\Gamma(j_2-q_1+1)}{\Gamma(p_1+j_2+1)}\right) \\ \min\left(\frac{\Gamma(j_2-q_2+1)}{\Gamma(p_2+j_2+1)}, \frac{\Gamma(j_1-q_2+1)}{\Gamma(p_2+j_1+1)}\right) < a_2 < \max\left(\frac{\Gamma(j_2-q_2+1)}{\Gamma(p_2+j_2+1)}, \frac{\Gamma(j_1-q_2+1)}{\Gamma(p_2+j_1+1)}\right) \end{cases}$$

En effet, dans ce cas, ou bien

$$u(a_1, p_1, j_1, q_1) u(a_2, p_2, j_2, q_2) > 0 \text{ et } u(a_1, p_1, j_2, q_1) u(a_2, p_2, j_1, q_2) < 0,$$

ou bien

$$u(a_1, p_1, j_1, q_1) u(a_2, p_2, j_2, q_2) < 0 \text{ et } u(a_1, p_1, j_2, q_1) u(a_2, p_2, j_1, q_2) > 0.$$

Lemme 2.2 Si, $A = \det(S) \neq 0$ alors, on a les propriétés suivantes :

- (P1) $G(0, s) = 0 = G(t, 1)$, $\forall s, t \in [0, 1]$.
(P2) Les fonctions g_1 et g_2 sont continues dans J .
(P3) La fonction G est continue dans $J \times J$.
(P4) Posons

$$M := \max_{0 \leq s, t \leq 1} |G(t, s)|.$$

Alors,

$$M < \Delta := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2(\Gamma(j_1 + 1) + \Gamma(j_2 + 1))}{|\det(S)|} \times \frac{(a_2 + 1)(a_1 + 1)}{\Gamma(j_0 - q_0 + 1)\Gamma(\alpha - q_0)} \quad (2.16)$$

où, comme déjà signalé dans l'introduction,

$$q_0 := \max(q_1, q_2) < j_0 := \min(j_1, j_2) \leq [\alpha] = n - 1.$$

Preuve.

- (1) (P1) est évidente.
(2) La continuité des fonctions g_1, g_2 et G est une conséquence directe de la continuité des fonctions

$$(t, s) \mapsto (t - s)^{\alpha - 1}, \quad (t, s) \mapsto (t - s)^{\alpha - q_1 - 1}, \quad (t, s) \mapsto (t - s)^{\alpha - q_2 - 1},$$

car toutes les grandeurs $\alpha - 1$, $\alpha - q_1 - 1$, $\alpha - q_2 - 1$ sont positives (voir formule (6)).

- (3) Notons tout d'abord que

$$0 \leq |u(a, p, j, q)| \leq \frac{(a + 1)\Gamma(j + 1)}{\Gamma(j - q + 1)} \quad \text{et} \quad 0 \leq |v(s, a, p, q)| \leq \frac{a + 1}{\Gamma(\alpha - q)}.$$

Par conséquent, pour tout $0 \leq s \leq 1$,

$$\begin{aligned} |g_1(s)| &= \frac{|u(a_2, p_2, j_2, q_2)v(s, a_1, p_1, q_1) - u(a_1, p_1, j_2, q_1)v(s, a_2, p_2, q_2)|}{|\det(S)|} \\ &\leq \frac{|u(a_2, p_2, j_2, q_2)v(s, a_1, p_1, q_1)| + |u(a_1, p_1, j_2, q_1)v(s, a_2, p_2, q_2)|}{|\det(S)|} \\ &\leq \frac{1}{|\det(S)|} \left(\frac{(a_2 + 1)(a_1 + 1)\Gamma(j_2 + 1)}{\Gamma(j_2 - q_2 + 1)\Gamma(\alpha - q_1)} + \frac{(a_1 + 1)(a_2 + 1)\Gamma(j_2 + 1)}{\Gamma(j_2 - q_1 + 1)\Gamma(\alpha - q_2)} \right). \end{aligned}$$

Puisque $q_1 \neq q_2$ et $q_0 = \max(q_1, q_2)$, on a ou bien $\Gamma(\alpha - q_1) > \Gamma(\alpha - q_0)$, ou bien $\Gamma(\alpha - q_2) > \Gamma(\alpha - q_0)$. Donc, nécessairement

$$\begin{aligned} |g_1(s)| &< \frac{1}{|\det(S)|} \left(\frac{(a_2 + 1)(a_1 + 1)\Gamma(j_2 + 1)}{\Gamma(j_2 - q_0 + 1)\Gamma(\alpha - q_0)} + \frac{(a_1 + 1)(a_2 + 1)\Gamma(j_2 + 1)}{\Gamma(j_2 - q_0 + 1)\Gamma(\alpha - q_0)} \right) \\ &= \frac{2\Gamma(j_2 + 1)(a_2 + 1)(a_1 + 1)}{|\det(S)|\Gamma(\alpha - q_0)\Gamma(j_0 - q_0 + 1)}. \end{aligned}$$

De la même manière, pour tout $0 \leq s \leq 1$,

$$\begin{aligned} |g_2(s)| &= \frac{|u(a_1, p_1, j_1, q_1)v(s, a_2, p_2, q_2) - u(a_2, p_2, j_1, q_2)v(s, a_1, p_1, q_1)|}{|\det(S)|} \\ &< \frac{2\Gamma(j_1 + 1)(a_2 + 1)(a_1 + 1)}{|\det(S)|\Gamma(\alpha - q_0)\Gamma(j_0 - q_0 + 1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous $0 \leq s, t \leq 1$,

$$\begin{aligned} |G(t, s)| &\leq \frac{|(t-s)^{\alpha-1}|}{\Gamma(\alpha)} + |t^{j_1} g_1(s)| + |t^{j_2} g_2(s)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + |g_1(s)| + |g_2(s)| \\ &< \Delta := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2(\Gamma(j_1+1) + \Gamma(j_2+1))}{|\det(S)|} \times \frac{(a_2+1)(a_1+1)}{\Gamma(j_0-q_0+1)\Gamma(\alpha-q_0)}. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.2 Il découle des considérations précédentes que

$$|g_1(s)| \leq \Delta \text{ et } |g_2(s)| \leq \Delta, \quad (0 \leq s \leq 1).$$

2 Existence des solutions

Notre premier résultat est un résultat d'existence et d'unicité basé sur le principe de contraction de Banach.

Théorème 2.1 Supposons que $A \neq 0$ et que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H1) Il existe une constante strictement positive k telle que

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq k|u - v|, \quad \forall (t, u, v) \in J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

(H2) La fonction $t \mapsto f(t, u)$ est un élément de $L^1(J)$ pour tout u fixé dans $\mathbb{R}$.

Si,

$$k\Delta < 1, \tag{2.17}$$

alors, le PDF (3)-(6) possède une solution unique u définie dans J . De plus,

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\Delta}{1 - k\Delta} \int_0^1 |f(s, 0)| ds. \tag{2.18}$$

Preuve. Transformons en premier lieu le problème (3)-(6) en un problème du point fixe. Pour cela, considérons l'opérateur

$$N : C(J) \longrightarrow C(J)$$

défini par

$$(Ny)(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, y(s)) ds, \tag{2.19}$$

où, la fonction $G(t, s)$ est donnée par (2.12). L'hypothèse (H2) avec l'inégalité (2.16) et la continuité de G garantissent que N est bien défini. C'est à dire, l'existence de l'intégrale dans (2.19) ainsi que sa continuité par rapport à l'argument $t \in J$.

D'après le lemme 2.1, les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème (3)-(6).

Pour tous $x, y \in C(J)$ et tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} |(Ny)(t) - (Nx)(t)| &= \left| \int_0^1 G(t, s) (f(s, y(s)) - f(s, x(s))) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 \max_{0 \leq s, t \leq 1} |G(t, s)| |f(s, y(s)) - f(s, x(s))| ds. \end{aligned}$$

D'après (H1) et (2.16),

$$|(Ny)(t) - (Nx)(t)| \leq k\Delta \|y - x\|_\infty.$$

D'où,

$$\|N(y) - N(x)\|_\infty \leq k\Delta \|y - x\|_\infty.$$

On en déduit d'après (2.17) que N est une contraction et donc, d'après le principe de contraction de Banach, l'opérateur N possède un seul point fixe u qui est l'unique solution du problème (3 - 6).

L'inégalité (2.18) découle immédiatement des inégalités

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty = \|N(u)\|_\infty &\leq \|N(u) - N(0)\|_\infty + \|N(0)\|_\infty \\ &\leq k\Delta \|u\|_\infty + \Delta \int_0^1 |f(s, 0)| ds. \end{aligned}$$

■

Nous allons maintenant donner plusieurs résultats d'existence.

Théorème 2.2 *Soit $A \neq 0$ et supposons que la fonction $f(t, u)$ est continue par rapport au second argument u . Supposons aussi qu'il existe deux fonctions strictement positives l, q satisfaisant les hypothèses :*

(H3) $l \in L^1(J)$.

(H4) La fonction $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue.

(H5) $|f(t, u)| \leq l(t)q(u)$, $\forall (t, u) \in J \times \mathbb{R}$.

(H6) Il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\Delta \|l\|_{L^1(J)} \sup_{|u| \leq r_0} q(u) \leq r_0.$$

Alors, le PDF (3)-(6) admet au moins une solution dans J .

Preuve. Posons

$$N_q(r_0) = \sup_{u \in \mathbb{R}, |u| \leq r_0} q(u) \quad , \quad B_{r_0} = \{x \in C(J) : \|x\|_\infty \leq r_0\}.$$

La fonction q étant continue, on a $N_q(r_0) < +\infty$. D'autre part, B_{r_0} est un sous-ensemble convexe, fermé et borné de $C(J)$. Nous allons maintenant en plusieurs étapes établir que toutes les conditions du théorème 1.3 du point fixe de Schauder sont satisfaites.

Étape 1 : L'opérateur $N : B_{r_0} \rightarrow B_{r_0}$ est bien défini.

Les hypothèses (H3) et (H5) nous donnent pour tout $x \in B_{r_0}$ et tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} |(Nx)(t)| &\leq \int_0^1 |G(t, s)| |f(s, x(s))| ds \\ &\leq \int_0^1 |G(t, s)| l(s) q(x(s)) ds \\ &\leq \Delta N_q(r_0) \int_0^1 l(s) ds \\ &\leq \Delta N_q(r_0) \|l\|_{L^1(J)}. \end{aligned}$$

On en déduit par application de l'hypothèse (H6) que

$$\|N(x)\|_\infty \leq r_0, \quad \forall x \in B_{r_0}.$$

D'autre part, si x est un élément quelconque de B_{r_0} , $(t_1, t_2) \in J^2$ alors,

$$\begin{aligned} |N(x)(t_1) - N(x)(t_2)| &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| |f(s, x(s))| ds \\ &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| l(s) q(x(s)) ds \\ &\leq N_q(r_0) \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| l(s) ds \end{aligned}$$

Puisque

$$|G(t_1, s) - G(t_2, s)| l(s) \leq 2\Delta l(s), \forall s \in J$$

et la fonction $J \ni s \mapsto 2\Delta l(s)$ est un élément de $L^1(J)$ alors, par continuité de G ,

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} |N(x)(t_1) - N(x)(t_2)| \leq N_q(r_0) \int_0^1 \lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} |G(t_1, s) - G(t_2, s)| l(s) ds = 0.$$

En d'autres termes, l'image par N de tout élément de B_{r_0} est aussi une fonction continue sur J . L'opérateur $N : B_{r_0} \rightarrow B_{r_0}$ est donc bien défini.

Étape 2 : L'opérateur $N : B_{r_0} \rightarrow B_{r_0}$ est continu.

Soit $\{x_n\}_n$ une suite d'éléments de B_{r_0} qui converge vers $x \in B_{r_0}$. Alors, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} |(Nx_n)(t) - (Nx)(t)| &\leq \int_0^1 |G(t, s)| |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds \\ &\leq \Delta \int_0^1 |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|Nx_n - Nx\|_\infty = \sup_{t \in J} |(Nx_n)(t) - (Nx)(t)| \leq \Delta \int_0^1 |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds.$$

Puisque q est continue alors, la suite $\{q(x_n(t))\}_n$ converge vers $q(x(t))$ pour tout $t \in J$. On en déduit que la quantité

$$\rho(t) := \sup_{t \in J} \{q(x(t)), q(x_1(t)), q(x_2(t)), \dots\}$$

existe et vérifie la condition

$$0 < \rho(t) \leq N_q(r_0), \forall t \in J.$$

De plus, d'après (H5),

$$|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| \leq |f(s, x_n(s))| + |f(s, x(s))| \leq 2N_q(r_0)l(s), \forall s \in J.$$

D'où, en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et la continuité de $f(t, u)$ par rapport au second argument u ,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|Nx_n - Nx\|_\infty \leq \Delta \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds = 0.$$

Ceci prouve que l'opérateur $N : B_{r_0} \rightarrow B_{r_0}$ est continu.

Étape 3 : Pour tout $t \in J$, l'ensemble $(N(B_{r_0}))(t)$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$.

Notons tout d'abord que

$$(N(B_{r_0}))(t) := \{(Nx)(t) : x \in B_{r_0}\}.$$

Les hypothèses (H3) et (H5) nous donnent pour tout $x \in B_{r_0}$ et tout $t \in J$

$$\begin{aligned} |(Nx)(t)| &\leq \int_0^1 |G(t, s)| |f(s, x(s))| ds \\ &\leq \int_0^1 |G(t, s)| l(s) q(x(s)) ds \\ &\leq \Delta N_q(r_0) \int_0^1 l(s) ds \\ &\leq \Delta N_q(r_0) \|l\|_{L^1(J)}. \end{aligned}$$

Cela signifie que $(N(B_{r_0}))(t)$ est inclus dans l'intervalle compact $[-\Delta N_q(r_0) \|l\|_{L^1(J)}, \Delta N_q(r_0) \|l\|_{L^1(J)}]$ de $\mathbb{R}$. Par conséquent, $(N(B_{r_0}))(t)$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$.

Étape 4 : N transforme B_{r_0} en un sous-ensemble équicontinu de B_{r_0} .

Soit $x \in B_{r_0}$ et $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$. Alors,

$$\begin{aligned} |N(x)(t_1) - N(x)(t_2)| &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| |f(s, x(s))| ds \\ &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| l(s) q(x(s)) ds \\ &\leq N_q(r_0) \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| l(s) ds. \end{aligned}$$

Comme la fonction $G(t, s)$ est continue dans $J \times J$ et $l \in L^1(J)$ alors, on a indépendamment de x dans B_{r_0} ,

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} |N(x)(t_1) - N(x)(t_2)| = 0.$$

Par conséquent, $N(B_{r_0})$ est un sous-ensemble équicontinu de B_{r_0} .

Étape 5 : Existence de solutions.

Les étapes (3) et (4) de la preuve permettent d'affirmer (voir théorème 1.1) que l'opérateur N transforme tout borné de B_{r_0} en un sous-ensemble relativement compact de B_{r_0} . Comme N est en plus continu (étape 2), il est alors complètement continu de B_{r_0} dans B_{r_0} . Ainsi, l'opérateur $N : B_{r_0} \rightarrow B_{r_0}$ satisfait toutes les conditions du théorème 1.3 du point fixe de Schauder. Par conséquent, N admet dans B_{r_0} un point fixe qui est solution du problème (3)-(6). ■

Remarque 2.3 Si dans (H5), on a égalité pour tout $(t, u) \in J \times \mathbb{R}$ alors, la continuité de f par rapport au second argument découle de la continuité de q .

Théorème 2.3 Supposons que $A \neq 0$, qu'il existe une constante $m \geq 0$, une fonction positive $l \in L^1(J)$ et une fonction positive q définie dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$(H7) \quad |f(s, 0)| \leq m, \quad \forall s \in J.$$

$$(H8) \quad |f(t, u) - f(t, v)| \leq l(t) |q(u) - q(v)| \text{ pour tout } t \in J \text{ et tout couple de réels } u, v.$$

$$(H9) \quad \text{La fonction } q \text{ est bornée et continue dans } \mathbb{R}.$$

Alors, le PDF (3)-(6) admet au moins une solution définie dans J .

Preuve. Nous donnons une preuve en plusieurs étapes. Pour cela, posons

$$N_q = \sup_{u \in \mathbb{R}} q(u) < +\infty, \quad \Omega = \{x \in C(J) : \|x\|_\infty \leq \Delta(2N_q \|l\|_{L^1(J)} + m)\}.$$

Ω est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de $C(J)$. Nous allons montrer que dans le cas présent aussi, l'opérateur $N : \Omega \longrightarrow \Omega$ vérifie toutes les conditions du théorème du point fixe de Schauder.

Étape 1 : *L'image par N de tout élément de Ω est un élément de $C(J)$.*

Pour tout $x \in \Omega$ et tout couple $(t_1, t_2) \in J \times J$, on a par application de (H8) et (H9)

$$\begin{aligned} |(Nx)(t_1) - (Nx)(t_2)| &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| |f(s, x(s))| ds \\ &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| (|f(s, x(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|) ds \\ &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| (l(s)|q(x(s)) - q(0)| + |f(s, 0)|) ds \\ &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| (2N_q l(s) + m) ds \\ &\leq 2N_q \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| l(s) ds + m \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| ds. \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons citées dans l'étape 1 du théorème 2.2, ces deux dernières quantités tendent chacune vers 0 quand $|t_1 - t_2|$ tend vers 0. Cela signifie que l'image par N de tout élément de Ω est un élément de $C(J)$. Il est à noter que la limite précédente est indépendante de $x \in \Omega$. En d'autres termes, nous venons aussi de prouver que $N(\Omega)$ est un sous-ensemble équicontinu de $C(J)$.

Étape 2 : *L'image par N de tout élément de Ω est un élément de Ω .*

Si $x \in \Omega$ et $t \in J$ alors, toujours par application de (H7) et (H8),

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds \right| &\leq \int_0^1 |G(t, s) f(s, x(s))| ds \leq \Delta \int_0^1 |f(s, x(s))| ds \\ &\leq \Delta \int_0^1 |f(s, x(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)| ds \\ &\leq \Delta \int_0^1 |f(s, x(s)) - f(s, 0)| ds + \Delta \int_0^1 |f(s, 0)| ds \\ &\leq \Delta \int_0^1 l(s) |q(x(s)) - q(0)| ds + m\Delta \\ &\leq 2N_q \Delta \int_0^1 l(s) ds + m\Delta \\ &= \Delta(2N_q \|l\|_{L^1(J)} + m). \end{aligned}$$

On en déduit que N applique Ω dans lui même.

Il découle en particulier de ces deux premières étapes de la preuve que N transforme tout sous-ensemble de Ω en un sous-ensemble équicontinu de Ω .

Étape 3 : *L'opérateur $N : \Omega \longrightarrow \Omega$ est continu.*

Si x et y sont deux éléments arbitraires de Ω et $t \in J$ alors,

$$\begin{aligned} \|Ny - Nx\|_\infty = \sup_{t \in J} |(Ny)(t) - (Nx)(t)| &\leq \sup_{t \in J} \left(\int_0^1 |G(t, s)| |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \right) \\ &\leq \Delta \int_0^1 l(s) |q(y(s)) - q(x(s))| ds. \end{aligned}$$

Par application de (H9), $J \ni s \longmapsto q(y(s)) - q(x(s))$ est continue. On en déduit que la fonction

$$J \ni s \longmapsto l(s)(q(y(s)) - q(x(s)))$$

est un élément de $L^1(J)$. Puisque $|l(s)(q(y(s)) - q(x(s)))| \leq 2N_q l(s)$, $\forall s \in J$ alors,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{\|x-y\|_\infty \rightarrow 0} \|Ny - Nx\|_\infty &\leq \lim_{\|x-y\|_\infty \rightarrow 0} \left(\Delta \int_0^1 l(s) |q(y(s)) - q(x(s))| ds \right) \\ &\leq \Delta \int_0^1 l(s) \lim_{|x(s)-y(s)| \rightarrow 0} |q(y(s)) - q(x(s))| ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où, la continuité de l'opérateur $N : \Omega \rightarrow \Omega$.

Étape 4 : $N(\Omega)$ est un sous-ensemble relativement compact de Ω .

Conformément à ce qui a été remarqué après les deux premières étapes de la preuve, il suffit d'après le théorème 1.1 d'Ascoli-Arzelà de montrer que pour tout $t \in J$, l'ensemble

$$(N(\Omega))(t) := \{(Nx)(t) : x \in \Omega\}$$

est inclus dans un compact de $\mathbb{R}$. On a d'après l'étape 2,

$$t \in J, x \in \Omega \Rightarrow |(Nx)(t)| \leq b := \Delta(2N_q \|l\|_{L^1(J)} + m).$$

Cela implique que $(N(\Omega))(t)$ est contenu dans l'intervalle fermé borné (donc compact) $[-b, b]$.

Étape 5 : Conclusion.

Il découle de la compacité relative de $N(\Omega)$ que pour tout $\mathcal{M} \subseteq \Omega$, l'ensemble $N(\mathcal{M})$ est aussi relativement compact. Ainsi, l'opérateur $N : \Omega \rightarrow \Omega$ est complètement continu et donc d'après le théorème de Schauder, N admet dans Ω un point fixe qui est solution du PDF (3 - 6). ■

Corollaire 2.1 Supposons que $A \neq 0$ et qu'il existe $u_0 \in \mathbb{R}$ et une constante $M_f > 0$ tels que

$$\sup_{t \in J} |f(t, u_0)| < +\infty$$

et

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq M_f \frac{||u| - |v||}{(1 + |u|)(1 + |v|)}, \quad \forall (t, u, v) \in J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Alors, le PDF (3)-(6) admet au moins une solution définie dans J .

Preuve. Il suffit de poser dans le théorème 2.3

$$m = M_f + \sup_{t \in J} |f(t, u_0)|, \quad l(t) = M_f, \quad \forall t \in J, \quad q(u) = \frac{|u|}{1 + |u|}, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

■

Théorème 2.4 Supposons que $A \neq 0$, f est continue par rapport au second argument et qu'il existe deux fonctions positives l, q vérifiant les hypothèses suivantes :

(H10) $l \in L^1(J)$.

(H11) La fonction $q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est croissante, continue et pour un certain $R > 0$,

$$\frac{R}{q(R)} \geq \Delta \|l\|_{L^1(J)}. \quad (2.20)$$

(H12) $|f(t, u)| \leq l(t)q(|u|)$ pour tout $(t, u) \in J \times \mathbb{R}$.

Alors, le PDF (3)-(6) possède au moins une solution définie dans J .

Preuve. Comme dans les cas précédents, l'idée est de montrer que l'opérateur N défini par la formule (2.19) est bien défini et vérifie toutes les conditions du théorème de Schauder. L'hypothèse (H10), la croissance de q , la continuité de G garantissent avec l'inégalité (2.16) la bonne définition de N . En effet, pour tout $(t_1, t_2, x) \in J \times J \times C(J)$,

$$\begin{aligned} |(Nx)(t_1) - (Nx)(t_2)| &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| |f(s, x(s))| ds \\ &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| l(s) q(x(s)) ds \\ &\leq q(\|x\|_\infty) \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| l(s) ds. \end{aligned}$$

On en déduit comme dans le théorème précédent que $N(x) \in C(J)$ et que donc N est bien défini.

Pour tout $r > 0$, posons :

$$D_r := \{x \in C(J) : \|x\|_\infty \leq r\}.$$

D_r est un sous-ensemble fermé, borné et convexe de $C(J)$.

Étape 1 : N est continu.

Soit $\{x_n\}_{n \geq 1}$ une suite qui converge vers x dans $C(J)$. Dans ce cas, la suite $\{\|x_n\|_\infty\}_{n \geq 1}$ converge vers $\|x\|_\infty$ dans $\mathbb{R}$. De plus, il découle de la continuité de q que la suite $\{q(\|x_n\|_\infty)\}_{n \geq 1}$ converge vers $q(\|x\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \|Nx_n - Nx\|_\infty &= \sup_{t \in J} \|Nx_n(t) - Nx(t)\| \\ &\leq \sup_{t \in J} \left(\int_0^1 |G(t, s)| (f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))) ds \right) \\ &\leq \Delta \int_0^1 |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds \end{aligned}$$

Posons $\rho := \sup \{q(\|x\|_\infty), q(\|x_1\|_\infty), q(\|x_2\|_\infty), \dots\}$. On a $0 < \rho < +\infty$ et d'après (H12),

$$|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| \leq |f(s, x_n(s))| + |f(s, x(s))| \leq 2\rho l(s), \quad \forall s \in J.$$

Comme f est continue par rapport au second argument, il découle de l'inégalité précédente et du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Nx_n - Nx\|_\infty \leq \Delta \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds = 0.$$

L'opérateur N est donc continu.

Étape 2 : N transforme chaque D_r en un sous-ensemble uniformément borné de $C(J)$.

En utilisant (H12) ainsi que la croissance de q , on obtient pour tout $x \in D_r$,

$$\begin{aligned} \|Nx\|_\infty &\leq \sup_{t \in J} \left(\int_0^1 |G(t, s)| f(s, x(s)) ds \right) \\ &\leq \Delta \int_0^1 l(s) q(|x(s)|) ds \\ &\leq \Delta q(\|x\|_\infty) \int_0^1 l(s) ds \\ &\leq q(r) \Delta \|l\|_{L^1(J)}. \end{aligned}$$

D'où,

$$N(D_r) \subset D_{q(r)\Delta\|l\|_{L^1(J)}} := \{x \in C(J) : \|x\|_\infty \leq q(r)\Delta\|l\|_{L^1(J)}\}.$$

Autrement dit, $N(D_r)$ est un sous-ensemble uniformément borné de $C(J)$.

Étape 3 : N transforme chaque D_r en un sous-ensemble équicontinu de $C(J)$.

En effet, un raisonnement analogue à la preuve de la bonne définition de N nous donne que pour tout $x \in D_r$ et tous $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$,

$$|Nx(t_1) - Nx(t_2)| \leq q(r) \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| l(s) ds.$$

Par conséquent, on a indépendamment de x ,

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} |Nx(t_1) - Nx(t_2)| \leq q(r) \int_0^1 \lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} |G(t_1, s) - G(t_2, s)| l(s) ds = 0.$$

Étape 4 : *Existence de solutions*

Soit $R > 0$ une constante réelle vérifiant (2.20). D'après l'étape 2,

$$N(D_R) \subset D_{q(R)\Delta\|l\|_{L^1(J)}} \subset D_R.$$

On en déduit que l'ensemble

$$N(D_R)(t) := \{Nx(t) : x \in D_R\}$$

est contenu dans l'intervalle compact $[-R, R]$. Par conséquent, $N(D_R)$ est relativement compact. On peut donc conclure par application du théorème d'Ascoli-Arzelà que $N : D_R \rightarrow D_R$ est complètement continu. Toutes les conditions du théorème du point fixe de Schauder sont donc vérifiées. L'opérateur N possède donc dans D_R au moins un point fixe, solution du PDF (3)-(6). ■

Corollaire 2.2 *Théorème 2.4 reste vrai si au lieu de la condition (2.20), on suppose que*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{q(r)}{r} = 0.$$

Preuve. En effet, par définition de la limite,

$$\exists r_0 > 0 : r > r_0 \Rightarrow \frac{q(r)}{r} < \frac{1}{\Delta\|l\|_{L^1(J)}}.$$

■

Corollaire 2.3 *Soit $A \neq 0$, f continue par rapport au second argument et vérifie les hypothèses :*

(H13) *Il existe deux constantes positives $0 < k, \sigma < 1$ telles que*

$$t^\sigma |f(t, u) - f(t, v)| \leq k|u - v|, \forall t \in J, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(H14) *Il existe $R > 0$ tel que*

$$\frac{kR + m}{R} \leq \frac{1 - \sigma}{\Delta}, \text{ avec } m := \sup_{t \in J} |t^\sigma f(t, 0)| < +\infty.$$

Alors, le PDF (3)-(6) possède au moins une solution définie dans J . De plus, si $m > 0$ alors, la solution est unique.

Preuve. Considérons la fonction $l(t) = t^{-\sigma}$, $0 < t \leq 1$ et s'annulant en $t = 0$ ainsi que la fonction $q(u) = (ku + m)$, $u \in \mathbb{R}$.

La fonction l est un élément de $L^1(J)$ avec $\|l\|_{L^1(J)} = \frac{1}{1-\sigma}$. D'autre part, la fonction q est croissante, continue et d'après (H14), Il existe $R > 0$ tel que $R \geq q(R)\Delta\|l\|_{L^1(J)}$. D'après (H13),

$$\begin{aligned} (t, u) \in J \times \mathbb{R} \Rightarrow |f(t, u)| &= l(t)t^\sigma |f(t, u)| \\ &\leq l(t) (t^\sigma |f(t, u) - f(t, 0)| + t^\sigma |f(t, 0)|) \\ &\leq l(t) (k|u| + m) = l(t) q(|u|). \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les conditions du théorème 2.4 sont vérifiées. Par conséquent, le PDF (3)-(6) admet au moins une solution dans D_R .

Supposons maintenant que $m := \sup_{t \in J} |t^\sigma f(t, 0)| > 0$. Nous savons déjà (étape 4 de la preuve du théorème 2.4) que $N(D_R) \subseteq D_R$. Pour établir l'unicité de cette solution, nous allons montrer que l'opérateur N définit une contraction dans D_R . Pour cela, remarquons tout d'abord que

$$(H14) \Rightarrow \frac{k\Delta}{1-\sigma} < 1. \quad (2.21)$$

Si x, y sont deux éléments arbitraires de D_R alors,

$$\begin{aligned} \|Nx - Ny\|_\infty &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |Nx(t) - Ny(t)| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |G(t, s)| |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq \Delta \int_0^1 \frac{s^\sigma |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|}{s^\sigma} ds \\ &\leq k\Delta \|x - y\|_\infty \int_0^1 \frac{1}{s^\sigma} ds \\ &= \frac{k\Delta}{1-\sigma} \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

Exemple 2.1 Supposons que pour le PDF (3)-(6), $\alpha = \frac{175}{14}$, $\sigma = \frac{1}{2}$, $(j_1, j_2) = (10, 12)$, $(a_1, a_2) = (1, 3)$,

$(q_1, q_2) = (0, 2)$, $(p_1, p_2) = (6, 8)$ et la fonction f est donnée par la formule

$$f(t, u) = \begin{cases} \frac{e^{\beta t}}{\sqrt{t}} (\ln(e^2 + |u|) + \delta |u|), & t \neq 0, u \in \mathbb{R} \\ 0, & t = 0, u \in \mathbb{R} \end{cases},$$

où, β et δ sont deux réels positifs. Dans ce cas,

$$n := [\alpha] + 1 = 13, \quad A = 126, \quad \Delta \simeq 1,3412 \times 10^{-3}.$$

La fonction f est continue par rapport au second argument u et vérifie l'égalité $f(t, u) \leq l(t)q(|u|)$ où, les fonctions l et q sont définies comme suit :

$$l(t) = \begin{cases} \frac{e^{\beta t}}{\sqrt{t}}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}, \quad t \in J, \quad \beta \geq 0,$$

$$q(v) = \ln(e^2 + v) + \delta v, \quad v \geq 0, \quad \delta \geq 0.$$

D'autre part, l est un élément de $L^1(J)$ avec

$$\|l\|_{L^1(J)} = \int_0^1 \frac{e^{\beta s}}{\sqrt{s}} ds \leq \int_0^1 \frac{e^{\beta}}{\sqrt{s}} ds = 2e^{\beta}$$

et

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{q(r)}{r} = \delta.$$

Ainsi, d'après le corollaire 2.2 du théorème 2.4, le PDF (3)-(6) possède au moins une solution pour $\delta = 0$.

Si $\delta \neq 0$ alors, un calcul direct nous donne

$$\frac{1 - \frac{1}{2}}{\Delta} = \frac{1}{2\Delta} \simeq \frac{10^3}{2,6824},$$

$$m := \sup_{t \in J} t^{\frac{1}{2}} |f(t, 0)| = 2e^{\beta},$$

et pour tout triplet $(t, u, v) \in J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$t^{\frac{1}{2}} |f(t, u) - f(t, v)| \leq e^{\beta-2} (1 + \delta e^2) |u - v| := k |u - v|.$$

Par application du corollaire 2.3 du Théorème 2.4, le PDF (3)-(6) admet sous la condition $e^{\beta-2} (1 + \delta e^2) < 1$ une solution unique appartenant à D_R où, R est choisi tel que

$$0 < \frac{kR + m}{R} = \frac{e^{\beta-2} (1 + \delta e^2) R + 2e^{\beta}}{R} \leq \frac{1 - \frac{1}{2}}{\Delta} \simeq \frac{10^3}{2,6824}.$$

□

3 Ulam - stabilités

Dans cette section, nous étudions les Ulam-stabilités du PDF (3)-(6) via sa formulation intégrale équivalente

$$y(t) = Ny(t), \quad \text{où, } Ny(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, y(s)) ds. \quad (2.22)$$

Commençons tout d'abord par rappeler les différents types de l'Ulam - stabilité.

Définition 2.2 [47] On dira que l'équation intégrale (2.22) est Ulam-Hyers stable s'il existe $C_f > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute solution $x \in C(J)$ de l'inégalité

$$|x(t) - Nx(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in J, \quad (2.23)$$

il existe une solution $y \in C(J)$ de l'équation (2.22) telle que

$$|x(t) - y(t)| \leq C_f \varepsilon, \quad t \in J. \quad (2.24)$$

Notons que l'équation intégrale (2.22) est Ulam-Hyers stable si et seulement si, le PDF (3)-(6) l'est aussi [47].

Définition 2.3 On dira que l'équation intégrale (2.22) est Ulam-Hyers stable au sens généralisé s'il existe une fonction $\theta \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute solution $x \in C(J)$ de l'inégalité (2.23), il existe une solution $y \in C(J)$ de l'équation (2.22) telle que

$$|x(t) - y(t)| \leq \theta(\varepsilon), \quad t \in J. \quad (2.25)$$

Définition 2.4 On dira que l'équation intégrale (2.22) est Ulam-Hyers-Rassias stable par rapport à la fonction $\varphi \in C(J, \mathbb{R}^+)$ s'il existe une constante $C_f > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute solution $x \in C(J)$ de l'inégalité

$$|x(t) - Nx(t)| \leq \varepsilon \varphi(t), \quad t \in J, \quad (2.26)$$

il existe une solution $y \in C(J)$ de l'équation (2.22) telle que

$$|x(t) - y(t)| \leq C_f \varepsilon \varphi(t), \quad t \in J. \quad (2.27)$$

Théorème 2.5 Supposons que toutes les conditions du corollaire 2.3 sont satisfaites. Si,

$$m = \sup_{t \in J} t^\sigma |f(t, 0)| > 0,$$

alors, l'équation intégrale (2.22) est Ulam-Hyers stable.

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$, $x \in C(J)$ une solution de l'inégalité (2.23) et $y \in C(J)$ l'unique solution de l'équation intégrale (2.22) (Corollaire 2.3 du Théorème 2.4). Puisque, y est un point fixe de l'opérateur N alors, pour tout $t \in J = [0, 1]$

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - Nx(t)| + |Nx(t) - Ny(t)| \leq \varepsilon + |Nx(t) - Ny(t)|. \quad (2.28)$$

D'après la preuve du corollaire 2.3, $k\Delta < 1 - \sigma$ et

$$|Nx(t) - Ny(t)| \leq \frac{k\Delta}{1 - \sigma} \|x - y\|_\infty. \quad (2.29)$$

Cela implique que

$$\|x - y\|_\infty = \sup_{t \in J} |x(t) - y(t)| \leq \varepsilon + \frac{k\Delta}{1 - \sigma} \|x - y\|_\infty$$

ou de manière équivalente,

$$\|x - y\|_\infty \leq C_f \varepsilon, \quad \text{avec } C_f = \frac{1 - \sigma}{1 - \sigma - k\Delta}.$$

■

Remarque 2.4 En posant $\theta(\varepsilon) = \frac{1 - \sigma}{1 - \sigma - k\Delta} \varepsilon$, on obtient que l'équation intégrale (2.22) est aussi Ulam-Hyers au sens généralisé.

Théorème 2.6 Sous les conditions du théorème 2.5, l'équation intégrale (2.22) est Ulam-Hyers-Rassias stable par rapport à toute fonction $\varphi \in C(J, \mathbb{R}^+)$ vérifiant (2.26).

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$, $x \in C(J)$ une solution de l'inégalité (2.26) et $y \in C(J)$ l'unique solution de l'équation intégrale (2.22). En raisonnant de manière similaire au théorème 2.5 précédent, on vérifie facilement que

$$|x(t) - y(t)| \leq C_f \varepsilon \varphi(t), \text{ avec } C_f = \frac{1 - \sigma}{1 - \sigma - k\Delta}.$$

■

Exemple 2.2 Comme dans l'exemple 2.1, supposons que dans le PDF (3)-(6), $\alpha = \frac{175}{14}$, $(j_1, j_2) = (10, 12)$, $(a_1, a_2) = (1, 3)$, $(q_1, q_2) = (0, 2)$, $(p_1, p_2) = (6, 8)$ et la fonction f est donnée par

$$f(t, u) = \begin{cases} \frac{e^{\beta t}}{\sqrt{t}} (\ln(e^2 + |u|) + \delta |u|), & t \neq 0, u \in \mathbb{R} \\ 0, & t = 0, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Nous savons déjà (voir exemple 2.1) que $\Delta \simeq 1,3412 \times 10^{-3}$ et que toutes les conditions du corollaire 2.3 sont vérifiées pour

$$\sigma = \frac{1}{2}, \quad k = e^{\beta-2}(1 + \delta e^2), \quad m := \sup_{t \in J} t^{\frac{1}{2}} |f(t, 0)| = 2e^{\beta} > 0.$$

De plus, pour $\delta \neq 0$, l'équation intégrale (2.22) possède une solution unique. On peut par application du théorème 2.5 conclure qu'on a la Ulam-Hyers stabilité, et qu'on a la Ulam-Hyers-Rassias stabilité par application du théorème 2.6.

Chapitre 3

Existence de solution dans le cas d'une inclusion différentielle

Dans ce chapitre, nous investiguons l'existence des solutions pour le problème d'inclusion différentielle fractionnaire (PIDF en abrégé)

$${}^C D^\alpha x(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in J = [0, 1], \alpha \geq 3, \quad (3.1)$$

assujetti aux mêmes conditions (4 - 6). Ici, $F : [0, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une fonction multivoque. Nous distinguerons séparément le cas convexe et le cas non convexe de la fonction F . Pour le premier cas, un résultat d'existence est obtenu par application du théorème du point fixe de Bohnenblust-Karlin [25]. Le théorème du point fixe des contractions multivoques de H. Covitz et S.B. Nadler [33] est utilisé dans le cas non convexe.

1 Rappels des fondamentaux des fonctions multivoques

Dans cette section, nous exposons les concepts fondamentaux des fonctions multivoques conformément aux besoins de la suite. Pour plus de littérature et de détails sur les fonctions multivoques, le lecteur peut aussi consulter les livres de J.P. Aubin et A. Cellina [15], J.P. Aubin et H. Frankowska [16], C. Castaing et M. Valadier [28], K. Deimling [34], S. Hu et N. Papageorgiou [44].

Définition 3.1 Soient $\mathcal{X}$ un espace métrique et $\mathcal{Y}$ un espace de Banach. On appelle fonction multivoque de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ toute application $h : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y})$. En d'autres termes, l'image de tout élément de $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{Y}$.

Définition 3.2 Une fonction multivoque $H : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ est dite

- (a) à valeurs convexes (fermées) si, $H(x)$ est un sous-ensemble convexe (fermé) de $\mathcal{Y}$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.
- (b) bornée sur les sous-ensembles bornés si, $H(\mathcal{B}) = \bigcup_{x \in \mathcal{B}} H(x)$ est un sous-ensemble borné de $\mathcal{Y}$ pour toute partie bornée $\mathcal{B}$ de $\mathcal{X}$.
- (c) semi-continue supérieurement (s.c.s.) dans $\mathcal{X}$ si, pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$, l'ensemble $H(x_0)$ est non vide, fermé dans $\mathcal{Y}$ et pour tout ouvert $\mathcal{B}$ de $\mathcal{Y}$ contenant $H(x_0)$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{N}$ de x_0 tel que $H(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{B}$.
- (d) complètement continue si, $H(\mathcal{B})$ est relativement compact dans $\mathcal{Y}$ pour toute partie $\mathcal{B}$ bornée de $\mathcal{X}$.
- (e) possède un point fixe, si $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ et s'il existe $x \in \mathcal{X}$ tel que $x \in H(x)$.

Notons que si H est complètement continue et à valeurs non vides et compactes alors, H est s.c.s. si et seulement si, H a un graphe fermé, c'est à dire :

$$(x_n \longrightarrow x, y_n \longrightarrow y, y_n \in H(x_n)) \Rightarrow y \in H(x).$$

Définition 3.3 Soit $F : J \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ une fonction multivoque et soit $y \in C(J, \mathcal{Y})$. On appelle selection de F associée à y le sous-ensemble $S_{F,y}$ de $L^1(J, \mathcal{Y})$ défini par

$$S_{F,y} := \{v \in L^1(J, \mathcal{Y}) : v(t) \in F(t, y(t)) \text{ pour presque tout } t \in J\}.$$

Soit d la métrique induite dans $\mathcal{Y}$ par sa norme $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$:

$$d(x, y) = \|x - y\|_{\mathcal{Y}}, \quad x, y \in \mathcal{Y}.$$

Alors, la formule

$$H_d(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b)\},$$

définit une métrique généralisée (peut prendre la valeur infinie) dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$. Dans la suite, nous utiliserons les sous-ensembles suivants de $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$:

- i) $P_{cl}(\mathcal{Y})$ (respectivement $P_c(\mathcal{Y})$) est l'ensemble de tous les sous-ensembles fermés (respectivement convexes) de $\mathcal{Y}$.
- ii) $P_{cp}(\mathcal{Y})$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles compacts de $\mathcal{Y}$.
- iii) $P_{cl,c}(\mathcal{Y})$ (respectivement $P_{cp,c}(\mathcal{Y})$) est l'ensemble de tous les sous-ensembles non vides, fermés et convexes (respectivement non vides, compacts et convexes) de $\mathcal{Y}$.

Définition 3.4 Une fonction multivoque $N : \mathcal{Y} \longrightarrow P_{cl}(\mathcal{Y})$ est dite

- (1) γ -Lipschitzienne s'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$H_d(N(x), N(y)) \leq \gamma d(x, y), \quad \text{pour tous } x, y \in \mathcal{Y},$$

- (2) contraction (ou contractive) si, elle est γ -Lipschitzienne avec $\gamma < 1$.

Lemme 3.1 (H. Covitz et S.B. Nadler [33]) Soit $(\mathcal{Y}, d)$ un espace métrique.

Si, $H : \mathcal{Y} \longrightarrow P_{cl}(\mathcal{Y})$ est une contraction alors, l'ensemble $Fix(H)$ des points fixes de H est non vide.

Théorème 3.1 (Bohnenblust-Karlin [25]) Soit $D \in P_{cl,c}(\mathcal{Y})$ et soit $H : D \longrightarrow P_{cl,c}(D)$ une fonction s.c.s. telle que $\overline{H(D)}$ est compact. Alors, H admet un point fixe ($Fix(H) \neq \emptyset$).

Définition 3.5 Une fonction multivoque $F : J \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est dite de Carathéodory si, elle est mesurable par rapport à $t \in J$ pour tout $x \in \mathcal{Y}$ fixé et s.c.s. dans $\mathcal{Y}$ pour presque tout $t \in J$.

Lemme 3.2 [51] Soit I un intervalle réel et compact de $\mathbb{R}$, ϕ une application linéaire continue de $L^1(I)$ dans $C(I)$. Soit aussi $F : I \times \mathbb{R} \longrightarrow P_{cl,c}(\mathbb{R})$ une fonction multivoque satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) F est de Carathéodory.
- (ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'ensemble $S_{F,x} := \{f \in L^1(I) : f(t) \in F(t, x) \text{ pour tout } t \in I\}$ est non vide.

Alors, l'opérateur $\phi \circ S_F$ défini de $C(I)$ dans $P_{cl,c}(C(I))$ par $(\phi \circ S_F)(x) = \phi(S_{F,x})$ est un opérateur à graphe fermé dans $C(I) \times C(I)$.

2 Existence de solutions

2.1 Le cas convexe

Dans la présente section, nous donnons un résultat d'existence de solution pour le PIDF (3.1) assujetti aux conditions (4)-(6) pour le cas où $F(t, s)$ est une fonction multivoque à valeurs convexes dans $\mathcal{P}(\mathcal{Y} = \mathbb{R})$.

Définition 3.6 Une fonction $n = ([\alpha] + 1)$ -continûment dérivable $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ est dite solution du PIDF (3.1) assujetti aux conditions (4)-(6) si, elle vérifie l'équation $({}^C D^\alpha x)(t) = F(t, x(t))$ dans J ainsi que les conditions (4), (5).

Théorème 3.2 Soit $A \neq 0$ et supposons que la fonction multivoque F satisfait aux hypothèses suivantes :

(H15) $F : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow P_{cl,c}(\mathbb{R})$ est de Carathéodory.

(H16) Pour tout $r > 0$, il existe une fonction positive $\rho_r \in L^1(J)$ telle que

$$(t, x) \in J \times \mathbb{R} \text{ et } |x| \leq r \Rightarrow \|F(t, x)\| := \sup \{|u| : u(t) \in F(t, x)\} \leq \rho_r(t).$$

Si,

$$\mu := \liminf_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{\int_0^1 \rho_r(t) dt}{r} \right) < \frac{1}{\Delta}, \quad (3.2)$$

alors, le PIDF (3.1) assujetti aux conditions (4)-(6) possède au moins une solution.

Preuve. Tout d'abord, rappelons que conformément aux notations adoptées dans l'introduction, $C(J) := C(J, \mathbb{R})$. Considérons l'opérateur multivoque,

$$N : C(J) \rightarrow \mathcal{P}(C(J)), \quad N(y) = \left\{ h \in C(J) : h(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds, f \in S_{E,y} \right\}$$

où, la fonction $G(t, s)$ est donnée par (2.12). Pour $r > 0$ soit

$$D_r := \{x \in C(J) : \|x\|_\infty \leq r\}.$$

D'après le lemme 2.1, les points fixes de N sont les solutions du problème en étude.

Étape 1 : Il existe $r_0 > 0$ tel que $N(D_{r_0}) \subseteq D_{r_0}$.

Si ce n'est pas le cas,

$$\forall r > 0, N(D_r) = \bigcup_{x \in D_r} N(x) \not\subseteq D_r.$$

Ceci est équivalent à

$$\forall r > 0, \exists x_r \in D_r, \exists h_r \in N(x_r) : \|h_r\|_\infty > r$$

avec

$$h_r(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds, f \in S_{E,x_r}.$$

D'après (H16), il existe une fonction positive $\rho_r \in L^1(J)$ telle que

$$|f(s)| \leq \rho_r(s), \forall s \in J.$$

Par conséquent,

$$r < \|h_r\|_\infty \leq \Delta \int_0^1 \rho_r(s) ds.$$

En divisant des deux cotés par r et en prenant la limite inférieure quand $r \rightarrow \infty$, on obtient

$$\Delta \liminf_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{\int_0^1 \rho_r(t) dt}{r} \right) \geq 1,$$

ce qui contredit (3.2). Ainsi donc, $N(D_{r_0}) \subseteq D_{r_0}$ pour un certain $r_0 > 0$.

Soit N_0 la restriction de N au sous-ensemble convexe et fermé D_{r_0} . Il est clair que chaque point fixe pour N_0 , l'est aussi pour N . Nous allons maintenant suivre le schéma proposé dans [9, 30] pour prouver que N_0 vérifie toutes les conditions du théorème 3.1.

Étape 2 : $N_0(x)$ est convexe pour tout $x \in D_{r_0}$.

Soient h_1, h_2 deux éléments de $N_0(x)$. Il existe deux fonctions $f_1, f_2 \in S_{F,x}$ telles que pour tout $t \in J$,

$$h_i(t) = \int_0^1 G(t, s) f_i(s) ds, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Si, $0 \leq \lambda \leq 1$ alors,

$$(\lambda h_1 + (1 - \lambda) h_2)(t) = \int_0^1 G(t, s) (\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2)(s) ds, \quad \forall t \in J.$$

Puisque $S_{F,x}$ est convexe (car F est à valeurs convexes) alors, $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 \in S_{F,x}$ et donc,

$$\lambda h_1 + (1 - \lambda) h_2 \in N_0(x).$$

Étape 3 : $\overline{N_0(D_{r_0})}$ est un sous-ensemble compact de D_{r_0} .

On sait d'après l'étape 1 que $N_0(D_{r_0})$ est une partie de D_{r_0} . Elle est donc uniformément bornée. Il suffit donc de prouver que $N_0(D_{r_0})$ est équicontinue. Si, $x \in D_{r_0}$ et $h \in N_0(x)$, il existe $f \in S_{F,x}$ telle que

$$h(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds.$$

Par conséquent, pour $t_1, t_2 \in J$: $t_1 < t_2$ et par application de (H16),

$$\begin{aligned} |h(t_2) - h(t_1)| &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| |f(s)| ds \\ &\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| \rho_{r_0}(s) ds \end{aligned}$$

Puisque $\rho_{r_0} \in L^1(J)$ et $G(t, s)$ est continue par rapport à l'argument $t \in J$, le dernier membre de la double inégalité précédente tend vers zéro quand t_1 tend vers t_2 . De plus, cette limite est indépendante de x dans D_{r_0} . Ceci implique que $N_0(D_{r_0})$ est équicontinue et que $\overline{N_0(D_{r_0})}$ est une partie compacte de D_{r_0} .

Étape 4 : Le graphe de N_0 est fermé

Nous devons montrer que

$$(x_n \rightarrow x_*, h_n \in N_0(x_n), h_n \rightarrow h_*) \Rightarrow h_* \in N_0(x_*).$$

On a,

$$h_n \in N_0(x_n) \Leftrightarrow \left(\exists f_n \in S_{F,x_n} : h_n(t) = \int_0^1 G(t,s) f_n(s) ds, \forall t \in J \right). \quad (3.3)$$

Soit $\phi : L^1(J) \longrightarrow C(J)$ l'opérateur linéaire défini par :

$$f \longmapsto (\phi(f))(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds.$$

On vérifie facilement que

$$\|\phi(f)\|_\infty = \sup_{t \in J} |(\phi(f))(t)| \leq \Delta \|f\|_{L^1(J)}.$$

Cela signifie que ϕ est borné et donc, continu. D'après le lemme 3.2, $\phi \circ S_F$ est à graphe fermé. On déduit de la relation $h_n := \phi(f_n) \in \phi(S_{F,x_n}) = \phi \circ S_F(x_n)$ que

$$h_* = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(f_n) \in \phi(S_{F,x_*}) = \phi \circ S_F(x_*).$$

En d'autres termes,

$$\exists f_* \in S_{F,x_*} : h_*(t) = (\phi(f_*))(t) = \int_0^1 G(t,s) f_*(s) ds, \forall t \in J,$$

ce qui signifie que le graphe de N_0 est fermé.

En résumé, l'opérateur multivoque N_0 est à graphe fermé, borné, à valeurs convexes et fermées donc compactes (car $\overline{N(D_{r_0})}$ est compact). On peut donc à l'aide du Lemme 3.2 affirmer que N_0 est semi-continu supérieurement. D'après le théorème 3.1, N_0 possède au moins un point fixe $x \in D_r$ qui est solution du PIDF(3.1) assujetti aux conditions (4)-(6). ■

2.2 Le cas non convexe

Nous allons maintenant explorer l'existence des solutions dans le cas où la fonction F n'est pas à valeurs convexes. Notre approche sera basée sur le lemme 3.1 de Covitz H. et Nadler S.B. [33] et la condition de convexité des valeurs de F sera remplacée par leur compacité.

Théorème 3.3 Soit $A \neq 0$ et supposons que

(H17) $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$, la fonction $F(., u) : J \longrightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ est mesurable pour tout $u \in \mathbb{R}$ fixé.

(H18) Pour tout $y \in C(J)$, il existe une constante $M_y > 0$ dépendant seulement de y et telle que

$$|w| \leq M_y, \text{ pour tout } w \in \bigcup_{t \in J} F(t, y(t)).$$

(H19) Il existe une fonction $l \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$H_d(F(t, u), F(t, \bar{u})) \leq l(t)|u - \bar{u}|, \text{ pour tout } u, \bar{u} \in \mathbb{R},$$

Si,

$$\Delta \|l\|_{L^1(J)} < 1 \quad (3.4)$$

alors, le PIDF (3.1) assujetti aux conditions (4)-(6) possède au moins une solution.

Remarque 3.1 Par application de (H17), on peut voir que $S_{F,x} \neq \emptyset$ pour tout $x \in L^1(J, \mathbb{R})$. On en déduit que F possède une sélection mesurable (voir [28], Théorème III.6)

Preuve. (du théorème)

Étape 1 : On montre que $N(x) \in \mathcal{P}_{cl}(C(J))$ pour tout $x \in C(J)$.

Soit $(h_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $N(x)$ telle que $h_n \rightarrow \bar{h}$ dans $C(J)$. Alors, $\bar{h} \in C(J)$ et pour tout nombre naturel n , il existe un sous-ensemble de mesure nulle J_n de $J = [0, 1]$ et une fonction $v_n \in L^1(J)$ tels que

$$t \in J \setminus J_n \Rightarrow v_n(t) \in F(t, x(t)) \text{ et } h_n(t) = \int_0^1 G(t, s) v_n(s) ds.$$

Le sous-ensemble $\bar{J} = \bigcup_n J_n$ est aussi de mesure nulle et $v_n(t) \in F(t, x(t))$ pour tout n et tout $t \in J \setminus \bar{J}$.

En utilisant la compacité de $F(t, x(t))$, $t \in J$, on obtient (par passage à une sous-suite si nécessaire) que $\{v_n(t)\}_n$ converge vers une certaine fonction $\bar{v}(t) := \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(t)$, $t \in J$. De manière évidente, $\bar{v}(t) \in F(t, x(t))$, $\forall t \in J \setminus \bar{J}$.

Par application de l'hypothèse (H18),

$$\sup \{|\bar{v}(t)|, |v_1(t)|, |v_2(t)|, \dots\} \leq M_x, \forall t \in J.$$

Cela implique que $\bar{v} \in L^1(J)$.

Donc, par application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned} \bar{h}(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 G(t, s) v_n(s) ds \\ &= \int_0^1 G(t, s) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(s) \right) ds = \int_0^1 G(t, s) \bar{v}(s) ds. \end{aligned}$$

Ainsi, $\bar{x} \in N(x)$ et donc, $N(x) \in \mathcal{P}_{cl}(C(J))$ pour tout $x \in C(J)$.

Étape 2 : On montre qu'il existe $0 < \gamma < 1$ tq $H_d(N(x), N(\bar{x})) < \gamma \|x - \bar{x}\|_{L^1(J)}$ pour tous $x, \bar{x} \in C(J)$.

Soient $x, \bar{x} \in C(J)$ et $h_1 \in N(x)$. Il existe $v_1 \in F(t, x(t))$ telle que pour tout $t \in J$

$$h_1(t) = \int_0^1 G(t, s) v_1(s) ds.$$

Par application de (H19),

$$H_d(F(t, x(t)), F(t, \bar{x}(t))) \leq l(t) |x(t) - \bar{x}(t)|$$

Il s'ensuit, qu'il existe $w \in F(t, \bar{x}(t))$ tel que

$$|v_1(t) - w| \leq l(t) |x(t) - \bar{x}(t)|, t \in J.$$

Considérons la fonction $U : J \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ donnée par

$$U(t) = \{w \in \mathbb{R} : |v_1(t) - w| \leq l(t) |x(t) - \bar{x}(t)|\}$$

Puisque la fonction multivoque $V(t) = U(t) \cap F(t, \bar{x}(t))$ est mesurable, il existe une fonction $v_2(t)$ qui est une sélection mesurable de V . Par conséquent, $v_2 \in F(t, \bar{x}(t))$ et pour tout $t \in J$,

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq l(t) |x(t) - \bar{x}(t)|, t \in J.$$

Posons

$$h_2(t) = \int_0^1 G(t, s) v_2(s) ds, \quad t \in J.$$

On a, $h_2 \in N(\bar{x})$ et pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned} \|h_1 - h_2\|_\infty &\leq \int_0^1 |G(t, s)| |l(s)| |v_1(s) - v_2(s)| ds \\ &\leq \int_0^1 \Delta l(s) |v_1(s) - v_2(s)| ds \\ &\leq \Delta \|l\|_{L^1(J)} \|x - \bar{x}\|_\infty. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|h_1 - h_2\|_\infty \leq \Delta \|l\|_{L^1(J)} \|x - \bar{x}\|_\infty.$$

On obtient une relation analogue en interchangeant les rôles de x et $\bar{x}$. On peut donc affirmer que

$$H_d(N(x), N(\bar{x})) \leq \Delta \|l\|_{L^1(J)} \|x - \bar{x}\|_\infty.$$

D'après (3.4), N est une contraction. Par application du lemme 3.1, on obtient que N possède au moins un point fixe x solution du PIDF. Ceci achève la preuve du théorème. ■

3 Exemple

Considérons le PIDF suivant :

$$({}^C D^{\frac{70}{8}} x)(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in J = [0, 1] \quad (3.5)$$

$$x^{(j)}(0) = 0, \quad j \notin \{4, 8\} \quad (3.6)$$

$$ax^{(q)}(1) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} x(s) ds, \quad (a, p, q) \in \{(1, 5, 0); (3, 7, 2)\} \quad (3.7)$$

où,

$$F(t, x) = \begin{cases} \frac{(1-\sigma)|x|}{2\Delta t^\sigma} \cdot [0, 1] := [0, \frac{(1-\sigma)|x|}{2\Delta t^\sigma}], & \text{si } t \neq 0 \\ \{0\}, & \text{si } t = 0 \end{cases}, \quad 0 < \sigma < 1.$$

Dans ce cas,

$$\alpha = \frac{70}{8}, n := [\alpha] + 1 = 9, (j_1, j_2) = (4, 8), (q_1, q_2) = (0, 2), (a_1, a_2) = (1, 3), (p_1, p_2) = (5, 7)$$

et $A := \det(S) = 131, 99$. La formule (2.16) nous donne, $\Delta \simeq 5, 3979$.

Il est évident que, F est de Carathéodory à valeurs fermées et convexes. Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction f_x définie dans $[0, 1]$ par :

$$f_x(t) = \begin{cases} \frac{(1-\sigma)|x|}{2\Delta t^\sigma}, & \text{si } t \neq 0 \\ 0, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est un élément de $S_{F,x}$. De plus,

$$\forall r > 0, (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \wedge |x| \leq r \Rightarrow \|F(t, x)\| \leq \rho_r(t) := f_r(t).$$

Finalement, il découle de l'inégalité

$$\left(\int_0^1 \frac{\rho_r(t) dt}{r} \right) = \int_0^1 \frac{(1-\sigma)}{2\Delta t^\sigma} dt = \frac{1}{2\Delta}$$

que

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \frac{\rho_r(t) dt}{r} \right) < \frac{1}{\Delta}.$$

Ainsi, toutes les conditions du Théorème 3.2 sont vérifiées. Par conséquent, le PIDF (3.5)-(3.7) admet au moins une solution x définie dans $[0, 1]$.

Chapitre 4

Existence et stabilité des solutions : Cas des conditions intégrales à coefficients opérateurs linéaires

1 Introduction

Dans la présente section, nous nous intéressons à l'existence, l'unicité, la Ulam-Hyers et la Ulam-Hyers-Rassias stabilités des solutions du problème singulier suivant :

$${}^C D^\alpha y(\tau) + \psi(\tau, y(\tau)) = 0, \tau \in [0, 1], \alpha \geq 3 \quad (4.1)$$

$$y^{(j)}(0) = 0, j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{j_1, j_2\}, n = [\alpha] + 1 \quad (4.2)$$

$$A_k(y^{(q_k)}(1)) = \frac{1}{\Gamma(p_k)} \int_0^1 (1-\theta)^{p_k-1} y(\theta) d\theta, p_k \in \mathbb{N}^*, k = \overline{1, 2} \quad (4.3)$$

où, $j_1, j_2, q_1, q_2, p_1, p_2$ sont des entiers naturels tels que

$$0 \leq q_1 \neq q_2 \leq j_1 \neq j_2 \leq [\alpha], \quad (4.4)$$

la fonction ψ est définie $[0, 1] \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ et possède la singularité

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \|\psi(\tau, \theta)\|_{\mathcal{E}} = +\infty, \forall \theta \in \mathcal{E} \quad (4.5)$$

et vérifie certaines conditions qui seront précisées plus bas, $\mathcal{E}$ est un espace de Banach réel, A_1 et A_2 sont deux opérateurs linéaires bornés commutants, définis dans $\mathcal{E}$. Il est évident que le problème ainsi posé est une version "espace de Banach" du problème traité dans le chapitre 2.

2 Concepts et résultats préliminaires fondamentaux

2.1 Intégrale de Bochner

Nous commençons par un bref exposé de l'intégrale de Bochner et de ses propriétés. Les résultats que nous énonçons ici sont le strict nécessaire pour la suite. Pour plus de détails et d'information sur l'intégrale de Bochner, le lecteur peut consulter [24, 55]. Dans la suite, $\mathcal{E}^*$ désignera le dual topologique de $\mathcal{E}$, c'est à dire l'espace de Banach de toutes les formes linéaires continues de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 4.1 Une fonction $f : J \longrightarrow \mathcal{E}$ est dite simple si elle admet la représentation

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{A_k}(t) x_k, \quad N \leq +\infty, \quad (t \in J) \quad (4.6)$$

où, les x_k sont des vecteurs fixés de $\mathcal{E}$, les A_k -des sous-ensembles dont la réunion est J , $\mathbb{1}_{A_k}$ est la fonction indicatrice de A_k .

Définition 4.2 Une fonction $f : J \longrightarrow \mathcal{E}$ est dite fortement mesurable s'il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions simples qui converge presque partout vers f .

On a la caractérisation suivante

Théorème 4.1 Une fonction $f : J = [0, 1] \longrightarrow \mathcal{E}$ est fortement mesurable si et seulement si,
 i) Elle prend ses valeurs dans un sous-espace fermé séparable $\mathcal{E}_0$ de $\mathcal{E}$.
 ii) Pour tout $x^* \in \mathcal{E}^*$, la fonction $x^* \circ f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable.

Remarque 4.1 Notons que si $\mathcal{E}$ est séparable alors, la condition (i) est automatiquement satisfaite. Si $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ alors, les concepts de mesurabilité et mesurabilité forte coïncident. En effet, $\mathbb{R}$ est séparable et les seules formes linéaires sur $\mathbb{R}$ sont les homothéties.

Définition 4.3 Une fonction simple $f : J \longrightarrow \mathcal{E}$ admettant la représentation (4.6) est dite Bochner intégrable si la série $\sum_{k=1}^N \text{mes}(A_k) \|x_k\|_{\mathcal{E}}$ converge. Dans ce cas, le vecteur

$$\int_J f(t) dt := \sum_{k=1}^N \text{mes}(A_k) x_k$$

est appelé intégrale de Bochner de f dans J .

Remarque 4.2 L'intégrale de Bochner d'une fonction simple est indépendante de la représentation (4.6).

Définition 4.4 Une fonction $f : J \longrightarrow \mathcal{E}$ est dite Bochner intégrable s'il existe une suite $\{f_n\}$ de fonction simples Bochner intégrables telle que

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = f(t)$ presque partout dans J .

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J \sup_{t \in J} \|f_n(t) - f(t)\|_{\mathcal{E}} dt = 0$.

Dans ce cas, on pose

$$\int_J f(t) dt := \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J f_n(t) dt.$$

On a la caractérisation suivante

Théorème 4.2 Une fonction $f : J = [0, 1] \longrightarrow \mathcal{E}$ fortement mesurable est Bochner-intégrable si et seulement si,

$$\int_0^1 \|f(t)\|_{\mathcal{E}} dt < +\infty. \quad (4.7)$$

Dans ce cas,

$$\left\| \int_0^1 f(t) dt \right\|_{\mathcal{E}} \leq \int_0^1 \|f(t)\|_{\mathcal{E}} dt. \quad (4.8)$$

Par définition, deux fonctions presque partout égales possèdent la même intégrale de Bochner. Si l'on considère de telles fonctions comme étant identiques alors, l'ensemble $L^1(J, \mathcal{E})$ des fonctions $f : J \rightarrow \mathcal{E}$ Bochner intégrables est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{L^1(J, \mathcal{E})} := \int_0^1 \|f(t)\|_{\mathcal{E}} dt. \quad (4.9)$$

Notons au passage que toute fonction $f : J = [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}$ continue est un élément de l'espace $L^1(J, \mathcal{E})$. En effet, pour tout $x^* \in \mathcal{E}^*$, la fonction $x^* \circ f : J \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, donc mesurable. L'ensemble $J \cap \mathbb{Q}$ étant dénombrable et dense dans J , on obtient par continuité de f que l'ensemble $f(J \cap \mathbb{Q})$ est aussi dénombrable et dense dans le sous-espace fermé $\mathcal{E}_0$ qu'il engendre. Ainsi, f est fortement mesurable. D'autre part, J étant compact, la fonction continue f est bornée. Par conséquent,

$$\int_0^1 \|f(t)\|_{\mathcal{E}} dt \leq \sup_{t \in J} \|f(t)\|_{\mathcal{E}} \int_J dt = \sup_{t \in J} \|f(t)\|_{\mathcal{E}} < +\infty.$$

D'après le théorème de caractérisation 4.2, la fonction f est un élément de $L^1(J, \mathcal{E})$.

Remarque 4.3 Si $f : J \rightarrow \mathcal{E}$ admet la représentation $f(t) = \tilde{f}(t).v$ où, $\tilde{f} : J \rightarrow \mathbb{R}$ est absolument intégrable et v est un élément fixe de $\mathcal{E}$ alors,

$$\int_J f(t) dt = \left(\int_J \tilde{f}(t) dt \right) . v.$$

L'intégrale figurant à droite de l'égalité est l'intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle.

Théorème 4.3 (fondamental d'intégration)

Supposons que pour $f : J \rightarrow \mathcal{E}$, il existe une fonction $F : J \rightarrow \mathcal{E}$, continue, presque partout dérivable avec $F'(t) = f(t)$. Alors, f est fortement mesurable. Si de plus, f est Bochner intégrable alors,

$$\int_0^1 f(t) dt = F(1) - F(0).$$

Le résultat suivant est la version Bochner du théorème de convergence dominée pour les fonctions de Lebesgues dans le cas scalaire.

Théorème 4.4 (de convergence dominée)

Soit $\{f_n : J \rightarrow \mathcal{E}\}_n$ une suite de fonctions fortement mesurables convergeant presque partout vers une fonction f . On suppose qu'il existe une fonction $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout n ,

$$\|f_n(t)\|_{\mathcal{E}} \leq |g(t)| \text{ presque partout dans } J = [0, 1].$$

Alors, f est Bochner intégrable et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \|f_n(t) - f(t)\|_{\mathcal{E}} dt = 0. \quad (4.10)$$

En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt. \quad (4.11)$$

Théorème 4.5 (de permutation avec un opérateur linéaire borné)

Soient $f : J \rightarrow \mathcal{E}$ une fonction Bochner intégrable et A un opérateur linéaire borné défini dans $\mathcal{E}$ et à valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{F}$.

Alors, la fonction $A(f) : J \rightarrow \mathcal{F}$ est aussi Bochner intégrable et

$$A\left(\int_0^1 f(t) dt\right) = \int_0^1 (Af)(t) dt.$$

2.2 Calcul fractionnaire pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach

Nous allons maintenant introduire les concepts d'intégrale et dérivée fractionnaires pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach. Pour plus de détails, consulter [13, 14].

Définition 4.5 Soient $\alpha > 0$, $f \in L^1(J = [0, 1], \mathcal{E})$. L'intégrale de Bochner

$$(I_{0+}^\alpha f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad (4.12)$$

est si elle existe, appelée Bochner intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α . Si $\alpha = 0$, on pose $I_{0+}^0 f(t) = f(t)$, c'est à dire que I_{0+}^0 est l'opérateur identité.

Théorème 4.6 [13] (Propriété de semi-groupe)

Soient $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $f \in L^1(J, \mathcal{E})$. Alors, l'égalité

$$I_{0+}^\alpha I_{0+}^\beta f(t) = I_{0+}^{\alpha+\beta} f(t) = I_{0+}^\beta I_{0+}^\alpha f(t)$$

est valide presque partout dans J . Si de plus f est continue où $\alpha + \beta \geq 1$ alors, elle est valide partout dans J .

Définition 4.6 Soient $\alpha \geq 0$ et $n-1$ sa partie entière. Si $f : J \rightarrow \mathcal{E}$ est telle que $f^{(n)} \in L^1(J, \mathcal{E})$ alors, l'intégrale de Bochner

$$(D_{0+}^\alpha f)(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \quad (4.13)$$

est si elle existe, appelée Caputo-Bochner dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α . Si, α est un entier naturel alors, on pose $D_{0+}^\alpha f = f^{(\alpha)}$. En particulier, $D_{0+}^0 f = f$.

D'après [13, théorème 2.3], $(D_{0+}^\alpha f)(t)$ existe pour tous les $t \in J$ et $D_{0+}^\alpha f \in L^1(J, \mathcal{E})$. Si de plus, $f^{(n)}$ est essentiellement bornée alors, d'après [13, théorème 2.5], $D_{0+}^\alpha f \in C(J, \mathcal{E})$.

Lemme 4.1 [13, théorème 2.16] Soient $0 \leq n-1 \leq \alpha < n$, $f \in C^{n-1}(J, \mathcal{E})$ et $f^{(n)} \in L^1(J, \mathcal{E})$. Alors, pour tout $t \in J$,

$$f(t) = (I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha f)(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0). \quad (4.14)$$

En particulier, la fonction $I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha f$ est continue de J dans $\mathcal{E}$.

Comme dans le cas scalaire, on a les identités suivantes

Lemme 4.2 [12, 35, 48]

(i) Si $g \in C(J, \mathcal{E})$, $\alpha > 0$ alors,

$${}_C D_{0+}^\alpha I_{0+}^\alpha (g) = g;$$

(ii) Si $\alpha > 0$, $\xi > -1$ alors,

$$I_{0+}^\alpha (t^\xi v) = \frac{\Gamma(\xi+1)}{\Gamma(\alpha+\xi+1)} t^{\alpha+\xi} v, \quad \forall v \in \mathcal{E};$$

(iii) Si $0 < \alpha \leq \beta$ alors,

$${}_C D_{0+}^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}.$$

2.3 Résultats auxiliaires

Les fonctions auxiliaires introduites au début du chapitre 2 deviennent à présent des opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{E}$, définis comme suit. Soient $\mathcal{B}_0$ un sous-ensemble de $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ constitué d'éléments deux à deux commutants et j, p, q des entiers naturels tels que $q \leq j \leq \alpha - q - 1$. Pour chaque $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, on pose

$$w(A, j, p, q) := \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-q+1)} A - \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+p+1)} I_{\mathcal{E}}, \quad (4.15)$$

$$z(\theta, A, p, q) = \frac{(1-\theta)^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)} A - \frac{(1-\theta)^{\alpha+p-1}}{\Gamma(\alpha+p)} I_{\mathcal{E}}, \quad \theta \in J \quad (4.16)$$

où, $I_{\mathcal{E}}$ est l'opérateur identité dans $\mathcal{E}$. On pose aussi

$$\mathcal{W} = \{w(A, j, p, q) : A \in \mathcal{B}_0, j, p, q \in \mathbb{Z}^+\}; \quad \mathcal{Z} = \{z(\theta, A, p, q) : \theta \in J, A \in \mathcal{B}_0, p, q \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Remarque 4.4 On a les propriétés suivantes

1. Chacun des sous-ensembles $\mathcal{W}$ et $\mathcal{Z}$ est constitué d'éléments deux à deux commutants de $\mathcal{B}(\mathcal{E})$. De plus, on a les estimations de normes suivantes :

$$\|w(A, j, p, q)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-q+1)} \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+p+1)}, \quad (4.17)$$

$$\|z(\theta, A, p, q)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq \frac{\|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}}{\Gamma(\alpha-q)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+p)}, \quad \forall \theta \in J. \quad (4.18)$$

2. Chaque élément de $\mathcal{W}$ commute avec chaque élément de $\mathcal{Z}$.

Supposons maintenant que les entiers naturels $j_1, j_2, p_1, p_2, q_1, q_2$ vérifient (4.4) et $\mathcal{B}_0 = \{A_1, A_2\}$ où, A_1, A_2 sont les opérateurs commutants apparaissant dans (4.3) et soit

$$U = w(A_1, j_1, p_1, q_1) w(A_2, j_2, p_2, q_2) - w(A_1, j_2, p_1, q_1) w(A_2, j_1, p_2, q_2), \quad (4.19)$$

$$\Phi_1(\theta) = w(A_2, j_2, p_2, q_2) z(\theta, A_1, p_1, q_1) - w(A_1, j_2, p_1, q_1) z(\theta, A_2, p_2, q_2), \quad \theta \in J, \quad (4.20)$$

$$\Phi_2(\theta) = w(A_1, j_1, p_1, q_1) z(\theta, A_2, p_2, q_2) - w(A_2, j_1, p_2, q_2) z(\theta, A_1, p_1, q_1), \quad \theta \in J. \quad (4.21)$$

En utilisant la commutativité de A_1 avec A_2 , on vérifie de manière directe que

$$w(A_1, j_1, p_1, q_1) \Phi_1(\theta) + w(A_1, j_2, p_1, q_1) \Phi_2(\theta) = U z(\theta, A_1, p_1, q_1), \quad (\theta \in J) \quad (4.22)$$

et

$$w(A_2, j_1, p_2, q_2) \Phi_1(\theta) + w(A_2, j_2, p_2, q_2) \Phi_2(\theta) = U z(\theta, A_2, p_2, q_2), \quad (\theta \in J). \quad (4.23)$$

Lemme 4.3 Soit $\phi \in L^1(J, \mathcal{E})$. Si l'opérateur U est inversible alors, l'unique solution du PDF

$$({}^C D^\alpha y)(\tau) + \phi(\tau) = 0, \quad 0 < \tau \leq 1, \quad \alpha \geq 3 \quad (4.24)$$

assujetti aux conditions (4.2, 4.3, 4.4) est donnée par la relation

$$y(\tau) = \int_0^1 G(\tau, \theta) (\phi(\theta)) d\theta, \quad (4.25)$$

où,

$$G(\tau, \theta) = \begin{cases} \frac{-(\tau-\theta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I_{\mathcal{E}} + \tau^{j_1} U^{-1} \Phi_1(\theta) + \tau^{j_2} U^{-1} \Phi_2(\theta), & 0 \leq \theta < \tau \leq 1 \\ \tau^{j_1} U^{-1} \Phi_1(\theta) + \tau^{j_2} U^{-1} \Phi_2(\theta), & 0 \leq \tau \leq \theta \leq 1 \end{cases}. \quad (4.26)$$

Preuve. Notons en premier lieu que

$$\Phi_1(\theta) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}), \Phi_2(\theta) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}), G(\tau, \theta) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}), \quad \forall (\theta, \tau) \in J^2.$$

D'après le lemme 1.2, la solution de l'équation (4.24) est de la forme

$$y(\tau) = \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\tau (\tau - \theta)^{\alpha-1} \phi(\theta) d\theta + c_0 + \tau c_1 + \dots + \tau^{n-1} c_{n-1},$$

où, $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ sont des vecteurs constants de $\mathcal{E}$. En utilisant les conditions initiales au point $\tau = 0$, on obtient que $c_k = 0$ pour $k \notin \{j_1, j_2\}$ et donc,

$$y(\tau) = \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\tau (\tau - \theta)^{\alpha-1} \phi(\theta) d\theta + \tau^{j_1} c_{j_1} + \tau^{j_2} c_{j_2}, \quad (\tau \in J).$$

Les conditions intégrales

$$A_k(y^{(q_k)}(1)) = \frac{1}{\Gamma(p_k)} \int_0^1 (1 - \theta)^{p_k-1} y(\theta) d\theta, \quad k = \overline{1, 2}$$

nous donnent

$$\begin{aligned} & A_k \left(\frac{-1}{\Gamma(\alpha - q_k)} \int_0^1 (1 - \theta)^{\alpha - q_k - 1} \phi(\theta) d\theta + \frac{\Gamma(j_1 + 1)}{\Gamma(j_1 - q_k + 1)} c_{j_1} + \frac{\Gamma(j_2 + 1)}{\Gamma(j_2 - q_k + 1)} c_{j_2} \right) \\ &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha + p_k)} \int_0^1 (1 - \theta)^{\alpha + p_k - 1} \phi(\theta) d\theta + \frac{\Gamma(j_1 + 1)}{\Gamma(j_1 + p_k + 1)} c_{j_1} + \frac{\Gamma(j_2 + 1)}{\Gamma(j_2 + p_k + 1)} c_{j_2} \end{aligned}$$

ou de manière équivalente,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Gamma(j_1 + 1)}{\Gamma(j_1 - q_k + 1)} A_k - \frac{\Gamma(j_1 + 1)}{\Gamma(j_1 + p_k + 1)} I_{\mathcal{E}} \right) (c_{j_1}) + \left(\frac{\Gamma(j_2 + 1)}{\Gamma(j_2 - q_k + 1)} A_k - \frac{\Gamma(j_2 + 1)}{\Gamma(j_2 + p_k + 1)} I_{\mathcal{E}} \right) (c_{j_2}) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(1 - \theta)^{\alpha - q_k - 1}}{\Gamma(\alpha - q_k)} A_k - \frac{(1 - \theta)^{\alpha + p_k - 1}}{\Gamma(\alpha + p_k)} I_{\mathcal{E}} \right) (\phi(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

En tenant compte des formules (4.15), (4.16), on obtient que les vecteurs c_{j_1} et c_{j_2} sont solution du système linéaire :

$$\begin{cases} w(A_1, j_1, p_1, q_1)(c_{j_1}) + w(A_1, j_2, p_1, q_1)(c_{j_2}) = \int_0^1 z(\theta, A_1, p_1, q_1) (\phi(\theta)) d\theta \\ w(A_2, j_1, p_2, q_2)(c_{j_1}) + w(A_2, j_2, p_2, q_2)(c_{j_2}) = \int_0^1 z(\theta, A_2, p_2, q_2) (\phi(\theta)) d\theta \end{cases}.$$

En appliquant $w(A_2, j_2, p_2, q_2)$ à la première équation et $w(A_1, j_2, p_1, q_1)$ à la seconde équation, on obtient après soustraction

$$U(c_{j_1}) = \int_0^1 \begin{pmatrix} w(A_2, j_2, p_2, q_2) z(\theta, A_1, p_1, q_1) \\ - w(A_1, j_2, p_1, q_1) z(\theta, A_2, p_2, q_2) \end{pmatrix} (\phi(\theta)) d\theta = \int_0^1 \Phi_1(\theta) (\phi(\theta)) d\theta.$$

De manière similaire, en appliquant $w(A_2, j_1, p_2, q_2)$ à la première équation et $w(A_1, j_1, p_1, q_1)$ à la seconde équation on obtient après soustraction

$$U(c_{j_2}) = \int_0^1 \begin{pmatrix} w(A_1, j_1, p_1, q_1) z(\theta, A_2, p_2, q_2) \\ - w(A_2, j_1, p_2, q_2) z(\theta, A_1, p_1, q_1) \end{pmatrix} (\phi(\theta)) d\theta = \int_0^1 \Phi_2(\theta) (\phi(\theta)) d\theta.$$

Puisque l'opérateur U est autonome par rapport à $\tau \in J$ et est inversible par hypothèse, on a

$$(c_{j_1}, c_{j_2}) = \left(\int_0^1 U^{-1} \Phi_1(\theta) (\phi(\theta)) d\theta, \int_0^1 U^{-1} \Phi_2(\theta) (\phi(\theta)) d\theta \right).$$

En remplaçant dans l'expression de $y(\tau)$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\tau (\tau - \theta)^{\alpha-1} \phi(\theta) d\theta + \tau^{j_1} c_{j_1} + \tau^{j_2} c_{j_2} \\ &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\tau (\tau - \theta)^{\alpha-1} \phi(\theta) d\theta + \tau^{j_1} \int_0^1 U^{-1} \Phi_1(\theta) (\phi(\theta)) d\theta \\ &\quad + \tau^{j_2} \int_0^1 U^{-1} \Phi_2(\theta) (\phi(\theta)) d\theta \\ &= \int_0^1 G(\tau, \theta) (\phi(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

Inversement, supposons que la fonction $y(\tau)$, $\tau \in J$ admet la représentation (4.25), (4.26). En observant que

$$y(\tau) = -I_{0+}^\alpha \phi(\tau) + \tau^{j_1} \int_0^1 U^{-1} \Phi_1(\theta) (\phi(\theta)) d\theta + \tau^{j_2} \int_0^1 U^{-1} \Phi_2(\theta) (\phi(\theta)) d\theta,$$

il n'est pas difficile de vérifier que $({}^C D^\alpha y)(\tau) + \phi(\tau) = 0$, $0 < \tau \leq 1$ et que les conditions initiales (4.2) sont toutes satisfaites. Montrons la condition (4.3) pour $k = 1$ (le cas $k = 2$ se traite de manière similaire). Un calcul direct nous donne,

$$\begin{aligned} A_1(y^{(q_1)}(1)) &= \int_0^1 \frac{-(1-\theta)^{\alpha-q_1-1}}{\Gamma(\alpha-q_1)} A_1(\phi(\theta)) d\theta + \int_0^1 \frac{\Gamma(j_1+1)}{\Gamma(j_1-q_1+1)} A_1 U^{-1} \Phi_1(\theta) (\phi(\theta)) d\theta \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\Gamma(j_2+1)}{\Gamma(j_2-q_1+1)} A_1 U^{-1} \Phi_2(\theta) (\phi(\theta)) d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{0+}^{p_1} y(1) &= \int_0^1 \frac{-(1-\theta)^{\alpha+p_1-1}}{\Gamma(\alpha+p_1)} \phi(\theta) d\theta + \int_0^1 \frac{\Gamma(j_1+1)}{\Gamma(p_1+j_1+1)} U^{-1} \Phi_1(\theta) (\phi(\theta)) d\theta \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\Gamma(j_2+1)}{\Gamma(p_1+j_2+1)} U^{-1} \Phi_2(\theta) (\phi(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} I_{0+}^{p_1} y(1) - A_1(y^{(q_1)}(1)) &= \int_0^1 z(\theta, A_1, p_1, q_1) (\phi(\theta)) d\theta \\ &\quad - \int_0^1 w(A_1, j_1, p_1, q_1) U^{-1} \Phi_1(\theta) (\phi(\theta)) d\theta \\ &\quad - \int_0^1 w(A_1, j_2, p_1, q_1) U^{-1} \Phi_2(\theta) (\phi(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

D'après (4.22), $I_{0+}^{p_1} y(1) - A_1(y^{(q_1)}(1)) = 0$. ■

Le noyau $G(\tau, \theta)$ du lemme précédent est obtenu pour la première fois. C'est un opérateur linéaire uniformément borné d'après l'estimation (4.30) ci-dessous. De plus,

$$G(0, \theta) = 0 = G(\tau, 1), \quad \forall \tau, \theta \in [0, 1].$$

La fonction $\tilde{G}(\tau, \theta) = -\frac{(\tau-\theta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I_{\mathcal{E}}$ vérifie l'équation ${}^C D^\alpha \left(\int_0^1 \tilde{G}(\tau, \theta) h(\theta) d\theta \right) = h(\tau)$. Elle peut être donc regardée comme l'opérateur de Green de l'équation différentielle fractionnaire ${}^C D^\alpha x(\tau) + h(\tau) = 0$.

En posant $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, $q_1 = q_2 := q$, $j_1 = j_2 := j$, $p_1 = p_2 := p$ et $A_1 = A_2 := a$, $a \geq 1$, le problème (4.1)-(4.3) devient

$${}^C D^\alpha y(\tau) + \psi(\tau, y(\tau)) = 0, \quad \tau \in [0, 1], \quad \alpha \geq 3 \quad (4.27)$$

$$y^{(j)}(0) = 0, \quad j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{j\}, \quad n = [\alpha] + 1 \quad (4.28)$$

$$ay^{(q)}(1) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1-\theta)^{p-1} y(\theta) d\theta, \quad p \in \mathbb{N}^*. \quad (4.29)$$

En posant dans ce nouveau problème $q = 0$, $j = 2$, on retrouve le problème investigué dans [63].

Remarque 4.5 a) Puisque tous les réels $\alpha-1$, $\alpha-q_1-1$, $\alpha-q_2-1$ sont positifs (voir condition (4.4)) alors, toutes les fonctions

$$\theta \mapsto (1-\theta)^{\alpha-q_1-1}, \quad \theta \mapsto (1-\theta)^{\alpha-q_2-1}, \quad (\tau, \theta) \mapsto (\tau-\theta)^{\alpha-1}$$

sont continues. Ceci implique la continuité des fonctions à valeurs opérateurs $\Phi_1(\theta)$, $\Phi_2(\theta)$ de J dans $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ ainsi que la continuité de la fonction à valeurs opérateurs $G(\tau, \theta)$ de $J \times J$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{E})$

b) On a trivialement,

$$\sup_{\theta \in J} \left(\|U^{-1} \Phi_k(\theta)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \right) \leq \|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \left(\sup_{\theta \in J} \|\Phi_k(\theta)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \right) < +\infty, \quad k = \overline{1, 2}.$$

et d'après (4.26),

$$\delta = \sup_{\theta, \tau \in J} \left(\|G(\tau, \theta)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \right) \leq \Delta := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \sum_{k=1}^2 \sup_{\theta \in J} \left(\|\Phi_k(\theta)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \right) < +\infty. \quad (4.30)$$

2.4 Existence de solutions

Dans le reste de ce chapitre, ψ est la fonction figurant dans la formulation (4.1). Nous supposons aussi qu'il existe trois constantes réelles $k > 0$, $m > 0$ et $0 < \sigma < 1$ telles que pour tout $\tau \in [0, 1]$,

$$\|\tau^\sigma \psi(\tau, y_1(\tau)) - \tau^\sigma \psi(\tau, y_2(\tau))\|_{\mathcal{E}} \leq k \|y_1 - y_2\|_{C(J, \mathcal{E})}, \quad \forall (y_1, y_2) \in (C(J, \mathcal{E}))^2, \quad (4.31)$$

et

$$\sup_{\tau \in J} \|\tau^\sigma \psi(\tau, 0)\|_{\mathcal{E}} \leq m. \quad (4.32)$$

Lemme 4.4 *La fonction ψ vérifie ce qui suit :*

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \|\psi(\theta, y(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta \leq (k \|y\|_{C(J, \mathcal{E})} + m) \frac{\tau^{1-\sigma} - \tau_0^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

pour tout couple $(\tau, y) \in [0, 1] \times C(J, \mathcal{E})$. En particulier,

$$\int_0^{\tau} \|\psi(\theta, y(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta = \lim_{\tau_0 \rightarrow 0^+} \int_{\tau_0}^{\tau} \|\psi(\theta, y(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta \leq (k \|y\|_{C(J, \mathcal{E})} + m) \frac{\tau^{1-\sigma}}{1-\sigma}.$$

Preuve. Si, $0 \leq \theta \leq 1$ et $y \in C(J, \mathcal{E})$, on obtient par utilisation des conditions (4.31) et (4.32),

$$\begin{aligned} \|\psi(\theta, y(\theta))\|_{\mathcal{E}} &\leq \|\psi(\theta, y(\theta)) - \psi(\theta, 0)\|_{\mathcal{E}} + \|\psi(\theta, 0)\|_{\mathcal{E}} \\ &= \theta^{-\sigma} \|\theta^\sigma \psi(\theta, y(\theta)) - \theta^\sigma \psi(\theta, 0)\|_{\mathcal{E}} + \theta^{-\sigma} \|\theta^\sigma \psi(\theta, 0)\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq (k \|y\|_{C(J, \mathcal{E})} + m) \theta^{-\sigma}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $0 < \tau_0 < \tau \leq 1$ et $y \in C(J, \mathcal{E})$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \|\psi(\theta, y(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta \leq (k \|y\|_{C(J, \mathcal{E})} + m) \int_{\tau_0}^{\tau} \theta^{-\sigma} d\theta = (k \|y\|_{C(J, \mathcal{E})} + m) \frac{\tau^{1-\sigma} - \tau_0^{1-\sigma}}{1-\sigma}.$$

■

Il découle de ce lemme que la fonction $[0, 1] \ni \theta \mapsto \psi(\theta, y(\theta))$ est un élément de l'espace $L^1([0, 1], \mathcal{E})$ pour y dans $C(J, \mathcal{E})$. Ainsi, l'intégrale fractionnaire $I_0^\alpha \psi(\theta, y(\theta))$, $0 \leq \tau \leq 1$ est bien définie.

Théorème 4.7 *Supposons que U est inversible, les constantes σ et k vérifient les formules (4.31) et (4.32). Si $0 < k < \frac{1-\sigma}{\delta}$ alors, le problème (4.1)-(4.3) admet une solution unique $y \in C(J, \mathcal{E})$. De plus,*

$$\|y\|_{C(J, \mathcal{E})} \leq \frac{m\delta}{1-\sigma-k\delta}.$$

Preuve. Rappelons tout d'abord que d'après (4.30),

$$\delta = \sup_{\theta, \tau \in J} (\|G(\tau, \theta)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}) < \infty.$$

Considérons dans l'espace $C(J, \mathcal{E})$ l'opérateur Ψ :

$$y \mapsto \Psi y(\tau) = \int_0^1 G(\tau, \theta) \psi(\theta, y(\theta)) d\theta. \quad (4.33)$$

Ψ est bien défini et d'après le lemme 4.3, les points fixes de Ψ sont les solutions du problème (4.1)-(4.3). Ainsi donc, tout revient à prouver que sous les conditions du théorème,

l'opérateur Ψ possède un point fixe unique. Soient donc y_1, y_2 deux éléments de $C(J, \mathcal{E})$ et $0 \leq \tau \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|\Psi y_1(\tau) - \Psi y_2(\tau)\|_{\mathcal{E}} &= \left\| \int_0^1 G(\tau, \theta) \Psi(\theta, y_1(\theta)) d\theta - \int_0^1 G(\tau, \theta) \Psi(\theta, y_2(\theta)) d\theta \right\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq \int_0^1 \|G(\tau, \theta)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \|\Psi(\theta, y_1(\theta)) - \Psi(\theta, y_2(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta \\ &\leq \delta \int_0^1 \theta^{-\sigma} \|\theta^{\sigma} \Psi(\theta, y_1(\theta)) - \theta^{\sigma} \Psi(\theta, y_2(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta \\ &\leq k\delta \|y_1 - y_2\|_{C(J, \mathcal{E})} \int_0^1 \theta^{-\sigma} d\theta = \frac{k\delta}{1-\sigma} \|y_1 - y_2\|_{C(J, \mathcal{E})}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|\Psi y_1 - \Psi y_2\|_{C(J, \mathcal{E})} \leq \frac{k\delta}{1-\sigma} \|y_1 - y_2\|_{C(J, \mathcal{E})}.$$

Puisque $0 < \frac{k\delta}{1-\sigma} < 1$ alors, d'après le principe de contraction de Banach (théorème 1.2), l'opérateur Ψ possède un unique point fixe y dans $C(J, \mathcal{E})$, qui est l'unique solution du problème (4.1)-(4.3). D'autre part et en tenant compte du lemme 4.4,

$$\|y\|_{C(J, \mathcal{E})} = \|\Psi y\|_{C(J, \mathcal{E})} \leq \frac{k\|y\|_{C(J, \mathcal{E})} + m}{1-\sigma} \delta = \frac{k\delta}{1-\sigma} \|y\|_{C(J, \mathcal{E})} + \frac{m\delta}{1-\sigma}.$$

Ainsi,

$$\left(1 - \frac{k\delta}{1-\sigma}\right) \|y\|_{C(J, \mathcal{E})} \leq \frac{m\delta}{1-\sigma},$$

ou de manière équivalente,

$$\|y\|_{C(J, \mathcal{E})} \leq \frac{m\delta}{1-\sigma - k\delta}.$$

■

Le résultat suivant est un résultat d'existence.

Théorème 4.8 *Supposons que l'opérateur U est inversible et que la condition (4.31) est vérifiée avec les constantes k, σ telles que*

$$0 < k < \frac{1-\sigma}{\|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \sum_{i=1}^2 \sup_{\xi \in J} (\|\Phi_i(\xi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})})}.$$

Supposons aussi qu'il existe une fonction $\mu \in C(J, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\tau^{\sigma} \|\Psi(\tau, u)\|_{\mathcal{E}} \leq \mu(\tau), \quad \forall \tau \in J, \quad \forall u \in \mathcal{E}. \quad (4.34)$$

Alors, le problème (4.1)-(4.3) admet au moins une solution.

Preuve. Pour la preuve, nous allons utiliser le théorème 1.4 de Krasnosel'skii. A cet effet, considérons dans l'espace $C(J, \mathcal{E})$ les opérateurs M, N :

$$My(\tau) = \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau} (\tau - \theta)^{\alpha-1} \Psi(\theta, y(\theta)) d\theta, \quad Ny(\tau) = \sum_{i=1}^2 \tau^{j_i} \int_0^1 U^{-1} \Phi_i(\theta) \Psi(\theta, y(\theta)) d\theta.$$

Notons que $\Psi = M + N$ et soit

$$R \geq \|\mu\|_{C(J, \mathbb{R}^+)} \frac{1 + \Gamma(\alpha) \|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \sum_{i=1}^2 \sup_{\xi \in J} (\|\Phi_i(\xi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})})}{\Gamma(\alpha)(1-\sigma)},$$

$$\mathcal{Q}_R = \{y \in C(J, \mathcal{E}) : \|y\|_{C(J, \mathcal{E})} \leq R\}.$$

$\mathcal{Q}_R$ est un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe de $C(J, \mathcal{E})$.

Étape 1 : $My_1 + Ny_2 \in \mathcal{Q}_R$, pour $y_1, y_2 \in \mathcal{Q}_R$.

Pour tout $\tau \in J$ et tous $y_1, y_2 \in \mathcal{Q}_R$, on a

$$\begin{aligned} \|My_1(\tau) + Ny_2(\tau)\|_{\mathcal{E}} &\leq \|My_1(\tau)\|_{\mathcal{E}} + \|Ny_2(\tau)\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\tau (\tau - \theta)^{\alpha-1} \|\psi(\theta, y_1(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta + \sum_{i=1}^2 \tau^{j_i} \int_0^1 \|U^{-1} \Phi_i(\theta) \psi(\theta, y_2(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\tau \|\psi(\theta, y_1(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \int_0^1 \|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \sup_{\xi \in J} (\|\Phi_i(\xi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}) \|\psi(\theta, y_2(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\tau \mu(\theta) \theta^{-\sigma} d\theta + \sum_{i=1}^2 \|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \sup_{\xi \in J} (\|\Phi_i(\xi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}) \int_0^1 \mu(\theta) \theta^{-\sigma} d\theta \\ &\leq \|\mu\|_{C(J, \mathbb{R}^+)} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^2 \|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \sup_{\xi \in J} (\|\Phi_i(\xi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}) \right) \int_0^1 \theta^{-\sigma} d\theta \\ &= \|\mu\|_{C(J, \mathbb{R}^+)} \frac{1 + \Gamma(\alpha) \|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \sum_{i=1}^2 \sup_{\xi \in J} (\|\Phi_i(\xi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})})}{\Gamma(\alpha)(1-\sigma)} \\ &\leq R. \end{aligned}$$

Ainsi donc, $y_1, y_2 \in \mathcal{Q}_R \Rightarrow My_1 + Ny_2 \in \mathcal{Q}_R$.

Étape 2 : N est une contraction.

Pour tous $y_1, y_2 \in C(J, \mathcal{E})$ et tous $\tau \in J = [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \|Ny_1(\tau) - Ny_2(\tau)\|_{\mathcal{E}} &\leq \sum_{i=1}^2 \tau^{j_i} \int_0^1 \|U^{-1} \Phi_i(\theta) (\psi(\theta, y_1(\theta)) - \psi(\theta, y_2(\theta)))\|_{\mathcal{E}} d\theta \\ &\leq \|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \left(\sum_{i=1}^2 \sup_{\xi \in J} (\|\Phi_i(\xi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}) \right) \int_0^1 \theta^{-\sigma} \theta^\sigma \|\psi(\theta, y_1(\theta)) - \psi(\theta, y_2(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta \\ &\leq k \|y_1 - y_2\|_{C(J, \mathcal{E})} \|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \left(\sum_{i=1}^2 \sup_{\xi \in J} (\|\Phi_i(\xi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}) \right) \int_0^1 \theta^{-\sigma} d\theta \\ &= k \frac{\|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \sum_{i=1}^2 \|\Phi_i\|_{C(J, \mathcal{E})}}{1-\sigma} \|y_1 - y_2\|_{C(J, \mathcal{E})}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $0 < k \frac{\|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \sum_{i=1}^2 \|\Phi_i\|_{C(J, \mathcal{E})}}{1-\sigma} < 1$. L'opérateur N est donc une contraction.

Étape 3 : M est compact et continu.

La preuve sera donnée en trois phases

Phase 1 : M est continu. Soient y_1 et y_2 deux éléments arbitraires de $C(J, \mathcal{E})$ et $\tau \in J$. Alors,

$$\begin{aligned} \|My_1(\tau) - My_2(\tau)\|_{\mathcal{E}} &\leq \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\tau (\tau - \theta)^{\alpha-1} (\psi(\theta, y_1(\theta)) - \psi(\theta, y_2(\theta))) d\theta \right\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \theta^{-\sigma} \theta^\sigma \|\psi(\theta, y_1(\theta)) - \psi(\theta, y_2(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta \\ &\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \|y_1 - y_2\|_{C(J, \mathcal{E})} \int_0^1 \theta^{-\sigma} d\theta \\ &\leq \frac{k}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)} \|y_1 - y_2\|_{C(J, \mathcal{E})}. \end{aligned}$$

D'où,

$$y_1, y_2 \in C(J, \mathcal{E}) \Rightarrow \|My_1 - My_2\|_{C(J, \mathcal{E})} \leq \frac{k}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)} \|y_1 - y_2\|_{C(J, \mathcal{E})}.$$

Cette dernière relation signifie que M est $\frac{k}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)}$ -Lipschitzien et donc, est continu.

Phase 2 : M transforme tout sous-ensemble borné de $\mathcal{Q}_R$ en un sous-ensemble borné.

Il suffit de montrer qu'il existe une constante $r > 0$ telle que pour tout $y \in \mathcal{Q}_R$, on a $\|M(y)\|_{C(J, \mathcal{E})} \leq r$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \|(My)(\tau)\|_{\mathcal{E}} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\tau - \theta)^{\alpha-1} \|\psi(\theta, y(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \theta^{-\sigma} \theta^{\sigma} \|\psi(\theta, y(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \theta^{-\sigma} \mu(\theta) d\theta \\ &\leq \frac{\|\mu\|_{C(J, \mathbb{R}^+)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \theta^{-\sigma} d\theta. \end{aligned}$$

On en déduit que M est même uniformément borné dans $\mathcal{Q}_R$ puisque

$$\|My\|_{C(J, \mathcal{E})} = \sup_{\tau \in J} (\|My(\tau)\|_{\mathcal{E}}) \leq r := \frac{\|\mu\|_{C(J, \mathbb{R}^+)}}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)}, \quad \forall y \in \mathcal{Q}_R.$$

Phase 3 : M transforme chaque $\mathcal{Q}_R$ en un sous-ensemble équicontinu de $C(J, \mathcal{E})$.

Soient $\tau_1, \tau_2 \in J$ tels que $\tau_1 < \tau_2$ et soit $y \in \mathcal{Q}_R$. Alors,

$$\begin{aligned} \|My(\tau_1) - My(\tau_2)\|_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{\tau_2} (\tau_2 - \theta)^{\alpha-1} \psi(\theta, y(\theta)) d\theta - \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - \theta)^{\alpha-1} \psi(\theta, y(\theta)) d\theta \right\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{\tau_1} ((\tau_2 - \theta)^{\alpha-1} - (\tau_1 - \theta)^{\alpha-1}) \psi(\theta, y(\theta)) d\theta \right\|_{\mathcal{E}} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - \theta)^{\alpha-1} \psi(\theta, y(\theta)) d\theta \right\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq \frac{\|\mu\|_{C(J, \mathbb{R}^+)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} ((\tau_2 - \theta)^{\alpha-1} - (\tau_1 - \theta)^{\alpha-1}) \theta^{-\sigma} d\theta \\ &\quad + \frac{\|\mu\|_{C(J, \mathbb{R}^+)}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - \theta)^{\alpha-1} \theta^{-\sigma} d\theta \\ &\leq \frac{\|\mu\|_{C(J, \mathbb{R}^+)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} ((\tau_2 - \theta)^{\alpha-1} - (\tau_1 - \theta)^{\alpha-1}) \theta^{-\sigma} d\theta + \frac{\|\mu\|_{C(J, \mathbb{R}^+)}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta^{-\sigma} d\theta \\ &= \frac{\|\mu\|_{C(J, \mathbb{R}^+)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_1} ((\tau_2 - \theta)^{\alpha-1} - (\tau_1 - \theta)^{\alpha-1}) \theta^{-\sigma} d\theta + \|\mu\|_{C(J, \mathbb{R}^+)} \frac{\tau_2^{1-\sigma} - \tau_1^{1-\sigma}}{(1-\sigma)\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\|\mu\|_{C(J, \mathbb{R}^+)}}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{\tau_1} ((\tau_2 - \theta)^{\alpha-1} - (\tau_1 - \theta)^{\alpha-1}) \theta^{-\sigma} d\theta + \frac{\tau_2^{1-\sigma} - \tau_1^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} \right). \end{aligned}$$

Clairement, $\lim_{\tau_1 \rightarrow \tau_2} \|My(\tau_1) - My(\tau_2)\|_{\mathcal{E}}$ tend vers zéro indépendamment du choix de $y \in C(J, \mathcal{E})$. Alors, M est équicontinue et donc, il est un opérateur relativement compact dans $\mathcal{Q}_R$. On déduit des trois phases ci-dessus et du théorème d'Arzelà -Ascoli que M est compact. D'après le théorème de Krasnosel'skii, l'opérateur $\Psi = M + N$ possède un point fixe $x \in \mathcal{Q}_R$ qui est aussi solution du problème (4.1)-(4.3). ■

2.5 Stabilités d'Ulam

Dans cette section, nous étudions les différents types de la Ulam stabilité du problème fractionnaire (4.1). Pour cela, nous adoptons les définitions suivantes.

Définition 4.7 [29] *Le problème fractionnaire (4.1) est dit Ulam-Hyers stable s'il existe un nombre réel $C_\psi > 0$ dépendant uniquement de ψ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute solution $y \in C(J, \mathcal{E})$ de l'inégalité*

$$\| {}^C D_0^\alpha y(\tau) + \psi(\tau, y(\tau)) \|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon, \quad \tau \in [0, 1], \quad (4.35)$$

avec les conditions

$$\begin{cases} y^{(j)}(0) = 0, & j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{j_1, j_2\}, \quad n = [\alpha] + 1 \\ A_k(y^{(q_k)}(1)) = \frac{1}{\Gamma(p_k)} \int_0^1 (1-\theta)^{p_k-1} y(\theta) d\theta, & p_k \in \mathbb{N}^*, \quad k = \overline{1, 2} \end{cases}, \quad (4.36)$$

il existe une solution $y_0 \in C(J, \mathcal{E})$ du problème (4.1), vérifiant

$$\|y(\tau) - y_0(\tau)\|_{\mathcal{E}} \leq C_\psi \varepsilon, \quad \tau \in [0, 1].$$

Définition 4.8 [29] *Le problème fractionnaire (4.1) est dit Ulam-Hyers stable au sens généralisé s'il existe une fonction $\omega \in C(J, \mathbb{R}^+)$, $\omega(0) = 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute solution $y \in C(J, \mathcal{E})$ de l'inégalité (4.35) avec les conditions (4.36), il existe une solution $y_0 \in C(J, \mathcal{E})$ du problème (4.1), vérifiant*

$$\|y(\tau) - y_0(\tau)\|_{\mathcal{E}} \leq \omega(\varepsilon), \quad \tau \in [0, 1].$$

Définition 4.9 [29] *Le problème fractionnaire (4.1) est dit Ulam-Hyers-Rassias stable par rapport à la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ s'il existe un nombre réel $C_{\psi, \varphi} > 0$ dépendant uniquement de ψ, φ et tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute solution $y \in C(J, \mathcal{E})$ de l'inégalité*

$$\| {}^C D_0^\alpha y(\tau) + \psi(\tau, y(\tau)) \|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon \varphi(\tau), \quad \tau \in [0, 1], \quad (4.37)$$

avec les conditions (4.36), il existe une solution $y_0 \in C(J, \mathcal{E})$ du problème (4.1), vérifiant

$$\|y(\tau) - y_0(\tau)\|_{\mathcal{E}} \leq C_{\psi, \varphi} \varepsilon \varphi(\tau), \quad \tau \in [0, 1].$$

Remarque 4.6 1) *Une fonction $y \in C(J, \mathcal{E})$ est solution de l'inégalité (4.35) si et seulement si, il existe une fonction $h_y : [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}$ telle que*

$${}^C D_0^\alpha y(\tau) + \psi(\tau, y(\tau)) = h_y(\tau) \quad \text{et} \quad \|h_y(\tau)\|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon, \quad (0 \leq \tau \leq 1). \quad (4.38)$$

2) *Ulam-Hyers stabilité $\Rightarrow$ Ulam-Hyers stabilité au sens généralisé.*

Théorème 4.9 *Soit $\psi : [0, 1] \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une fonction vérifiant (4.5), (4.31) et (4.32) et supposons que l'opérateur U est inversible. Si $0 < k < \frac{1-\sigma}{\delta}$ alors, le problème (4.1) est Ulam-Hyers stable.*

Preuve. Rappelons encore une fois que d'après (4.30),

$$\delta = \sup_{\theta, \tau \in J} (\|G(\tau, \theta)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}) < \infty.$$

On déduit du théorème 4.7 que sous les hypothèses énoncées, le problème (4.1) a une solution unique y_0 . Soient maintenant $\varepsilon > 0$ et $y \in C(J, \mathcal{E})$ une solution quelconque de l'inégalité (4.35) avec les conditions (4.36). La fonction

$$[0, 1]^2 \ni (\tau, \theta) \longmapsto \widetilde{\psi}_y(\tau, \theta) = \psi(\tau, \theta) - h_y(\tau)$$

vérifie toutes les conditions (4.5), (4.31) et (4.32) avec la constante de majoration $m + \varepsilon$ au lieu de m . De plus, y est solution du problème

$${}^C D^\alpha z(\tau) + \widetilde{\psi}_y(\tau, z(\tau)) = 0, \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

avec les conditions (4.36). D'après le lemme 4.3

$$y(\tau) = \int_0^1 G(\tau, \theta) (\psi(\theta, y(\theta)) - h_y(\theta)) d\theta = \int_0^1 G(\tau, \theta) \psi(\theta, y(\theta)) d\theta - \int_0^1 G(\tau, \theta) h_y(\theta) d\theta, \quad (0 \leq \tau \leq 1).$$

Par conséquent, pour tout $\tau \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \|y(\tau) - y_0(\tau)\|_{\mathcal{E}} &\leq \left\| \int_0^1 G(\tau, \theta) \psi(\theta, y(\theta)) d\theta - \int_0^1 G(\tau, \theta) \psi(\theta, y_0(\theta)) d\theta \right\|_{\mathcal{E}} + \left\| \int_0^1 G(\tau, \theta) h_y(\theta) d\theta \right\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq \int_0^1 \|G(\tau, \theta)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \|\psi(\theta, y(\theta)) - \psi(\theta, y_0(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta + \int_0^1 \|G(\tau, \theta)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \|h_y(\theta)\|_{\mathcal{E}} d\theta \\ &\leq \delta \int_0^1 \theta^{-\sigma} \|\theta^\sigma \psi(\theta, y(\theta)) - \theta^\sigma \psi(\theta, y_0(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta + \delta \varepsilon \\ &\leq \frac{\delta}{1 - \sigma} k \|y - y_0\|_{C(J, \mathcal{E})} + \delta \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\tau \in J \Rightarrow \|y(\tau) - y_0(\tau)\|_{\mathcal{E}} \leq \|y - y_0\|_{C(J, \mathcal{E})} \leq C_\psi \varepsilon, \quad \text{avec } C_\psi \geq \frac{(1 - \sigma)\delta}{1 - \sigma - k\delta}.$$

■

Remarque 4.7 En posant $\omega(\varepsilon) = C_\psi \varepsilon$, on obtient $\omega(0) = 0$ et que le problème (4.1) est Ulam-Hyers stable au sens généralisé.

Nous allons maintenant donner un résultat d'Ulam-Hyers-Rassias stabilité.

Théorème 4.10 Soit $\psi : [0, 1] \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une fonction vérifiant (4.5), (4.31), (4.32). Supposons que l'opérateur U est inversible et que $0 < k < \frac{1-\sigma}{\delta}$. Alors, le problème (4.1) est Ulam-Hyers-Rassias stable par rapport à toute fonction Riemann intégrable $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ pour laquelle, il existe une constante $\delta_\varphi > 0$ telle que

$$\forall \tau \in [0, 1] : \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta \leq \delta_\varphi \varphi(\tau). \quad (4.39)$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction Riemann intégrable vérifiant (4.39). Soit aussi $y \in C(J, \mathcal{E})$ et vérifiant l'inégalité (4.37) avec les conditions (4.36). Comme dans la remarque 4.6, ceci implique l'existence d'une fonction $h_y(\tau)$ telle que $h_y(\tau) \leq \varepsilon \varphi(\tau)$ pour tout $\tau \in [0, 1]$ et y est solution du problème

$${}^C D_0^\alpha z(\tau) + \widetilde{\psi}_y(\tau, z(\tau)) = 0, \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

avec les conditions (4.36). La fonction $\widetilde{\psi}_y(\tau, z(\tau))$ satisfait de manière triviale aux conditions (4.5) et (4.31). De plus, pour tout $0 \leq \tau \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|\tau^\sigma \widetilde{\psi}_y(\tau, 0)\|_{\mathcal{E}} &= \|\tau^\sigma (\psi(\tau, 0) - h_y(\tau))\|_{\mathcal{E}} \leq \|\tau^\sigma \psi(\tau, 0)\|_{\mathcal{E}} + \|\tau^\sigma h_y(\tau)\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq m + \tau^\sigma \varepsilon \varphi(\tau) \leq m + \varepsilon \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \varphi(\tau). \end{aligned}$$

Ainsi, la condition (4.32) est aussi vérifiée par $\widetilde{\psi}_y$. D'après le lemme 4.3, on a la représentation

$$y(\tau) = \int_0^1 G(\tau, \theta) (\psi(\theta, y(\theta)) - h_y(\theta)) d\theta.$$

Donc, si y_0 est l'unique solution du problème (4.1)-(4.3) alors, pour tout $\tau \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \|y(\tau) - y_0(\tau)\|_{\mathcal{E}} &\leq \int_0^1 \|G(\tau, \theta)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \|\psi(\theta, y(\theta)) - \psi(\theta, y_0(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta + \int_0^1 \|G(\tau, \theta)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \|h_y(\theta)\|_{\mathcal{E}} d\theta \\ &\leq \delta \int_0^1 \theta^{-\sigma} \|\theta^\sigma \psi(\theta, y(\theta)) - \theta^\sigma \psi(\theta, y_0(\theta))\|_{\mathcal{E}} d\theta + \delta \varepsilon \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta \\ &\leq \frac{\delta}{1-\sigma} k \|y - y_0\|_{C(\mathcal{J}, \mathcal{E})} + \delta \varepsilon \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta \\ &\leq \frac{\delta}{1-\sigma} k \|y - y_0\|_{C(\mathcal{J}, \mathcal{E})} + \delta \varepsilon \delta_\varphi \varphi(\tau). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall \tau \in [0, 1] : \|y(\tau) - y_0(\tau)\|_{\mathcal{E}} \leq C_{\psi, \varphi} \varepsilon \varphi(\tau), \quad \text{avec } C_{\psi, \varphi} \geq \frac{(1-\sigma)\delta_\varphi \delta}{1-\sigma-k\delta}.$$

■

3 Exemples

Dans cette section, nous présentons deux exemples illustratifs qui diffèrent uniquement par la nature des opérateurs utilisés. Dans le premier exemple, nous supposons que A_1 et A_2 sont des opérateurs scalaires. Dans le second exemple, A_1 et A_2 sont des opérateurs de multiplication par θ et θ^2 respectivement. Notons avant tout que pour les opérateurs Φ_1 et Φ_2 définis par (4.20) et (4.21), on a les estimations

$$\begin{aligned} \|\Phi_1\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} &\leq \|w(A_2, j_2, p_2, q_2)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \|z(\theta, A_1, p_1, q_1)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + \|w(A_1, j_2, p_1, q_1)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \|z(\theta, A_2, p_2, q_2)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \\ &\leq \left(\frac{\Gamma(j_2+1)}{\Gamma(j_2-q_2+1)} \|A_2\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + \frac{\Gamma(j_2+1)}{\Gamma(j_2+p_2+1)} \right) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-q_1)} \|A_1\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+p_1)} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\Gamma(j_2+1)}{\Gamma(j_2-q_1+1)} \|A_1\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + \frac{\Gamma(j_2+1)}{\Gamma(j_2+p_1+1)} \right) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-q_2)} \|A_2\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+p_2)} \right) \end{aligned}$$

et de manière similaire,

$$\begin{aligned} \|\Phi_2\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} &\leq \|w(A_1, j_1, p_1, q_1)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \|z(\theta, A_2, p_2, q_2)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + \|w(A_2, j_1, p_2, q_2)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \|z(\theta, A_1, p_1, q_1)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \\ &\leq \left(\frac{\Gamma(j_1+1)}{\Gamma(j_1-q_1+1)} \|A_1\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + \frac{\Gamma(j_1+1)}{\Gamma(j_1+p_1+1)} \right) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-q_2)} \|A_2\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+p_2)} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\Gamma(j_1+1)}{\Gamma(j_1-q_2+1)} \|A_2\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + \frac{\Gamma(j_1+1)}{\Gamma(j_1+p_2+1)} \right) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-q_1)} \|A_1\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+p_1)} \right). \end{aligned}$$

Soit la fonction $\psi : J \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie comme suit :

$$\psi(\tau, u) = \begin{cases} \beta \ln(e + \tau) \frac{7 + \cos(\pi\tau)}{\sqrt{\tau}(1 + \|u\|_{\mathcal{E}})} u_0, & \tau \in]0, 1], u \in \mathcal{E} \\ 0, & \tau = 0, u \in \mathcal{E} \end{cases},$$

où, $\beta > 0$ et u_0 est un élément fixe de $\mathcal{E}$.

La fonction ψ satisfait aux conditions

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \|\psi(\tau, u)\|_{\mathcal{E}} = +\infty, \quad \forall u \in \mathcal{E},$$

$$\|\sqrt{\tau}\psi(\tau, u) - \sqrt{\tau}\psi(\tau, v)\|_{\mathcal{E}} \leq 8\beta e \|u_0\|_{\mathcal{E}} \|u - v\|_{\mathcal{E}}, \quad \forall \tau \in J, \forall (u, v) \in \mathcal{E}^2,$$

et

$$\|\sqrt{\tau}\psi(\tau, u)\|_{\mathcal{E}} \leq \mu(\tau) := 8\beta e \|u_0\|_{\mathcal{E}}, \quad \forall \tau \in J, \forall u \in \mathcal{E}.$$

Exemple 4.1 Considérons maintenant dans l'espace de Banach $C(J, \mathcal{E})$ le problème Caputo-fractionnaire suivant

$$(S1) : \begin{cases} {}^C_1 \partial_0^\alpha y(\tau) + \psi(\tau, y(\tau)) = 0, & 0 < \tau < 1, \\ y^{(j)}(0) = 0, & j \notin \{3, 4\} \\ a_1 y(1) = \int_0^1 (1-s)y(s)ds, & a_1 \in \mathbb{R}_+^* \\ a_2 y'(1) = \int_0^1 y(s)ds, & a_2 \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases},$$

Dans cet exemple, A_1 et A_2 sont les opérateurs scalaires $a_1 I_{\mathcal{E}}$, $a_2 I_{\mathcal{E}}$ respectivement et

$$\sigma = \frac{1}{2}, \quad m = 8\beta e \|u_0\|_{\mathcal{E}}, \quad (j_1, j_2) = (3, 4), \quad (q_1, q_2) = (0, 1), \quad (p_1, p_2) = (2, 1).$$

L'opérateur U (formule (4.19)) est défini dans $\mathcal{E}$ par la relation

$$Ux = \left(\frac{600a_1 a_2 + 30a_1 - 60a_2 + 1}{600} \right) x, \quad x \in \mathcal{E}.$$

U est borné et

$$\|U\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} = \frac{|600a_1 a_2 + 30a_1 - 60a_2 + 1|}{600}.$$

U est inversible si $600a_1 a_2 + 30a_1 - 60a_2 + 1 \neq 0$, son inverse est alors l'opérateur

$$U^{-1}x = \left(\frac{600}{600a_1 a_2 + 30a_1 - 60a_2 + 1} \right) x, \quad x \in \mathcal{E}.$$

De plus, $\|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} = \frac{1}{\|U\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}}$.

En utilisant les normes-estimations données au début de la section et la relation

$\alpha \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)$, $\alpha > 0$, on obtient

$$\|\Phi_1\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq A_1 := \frac{1}{30\Gamma(\alpha + 2)} \left(\frac{(30\alpha^3 + 120\alpha^2 + 90\alpha)|a_1 a_2| + (6\alpha^2 + 36\alpha + 30)|a_1|}{+(\alpha^3 - \alpha + 120)|a_2| + (\alpha + 7)} \right)$$

et

$$\|\Phi_2\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq \Lambda_2 := \frac{1}{20\Gamma(\alpha+2)} \left((20\alpha^3 + 60\alpha^2 + 40\alpha)|a_1 a_2| + (5\alpha^2 + 25\alpha + 20)|a_1| + (\alpha^3 - \alpha + 60)|a_2| + (\alpha + 6) \right)$$

D'après (4.30), on peut écrire

$$\delta \leq \Delta \leq \tilde{\Delta} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\|U\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}}(\Lambda_1 + \Lambda_2). \quad (4.40)$$

Donc, le problème (S1) possède au moins une solution si

$$k := 8\beta e \|u_0\|_{\mathcal{E}} < \frac{1 - \sigma}{\tilde{\Delta} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}} = \frac{\Gamma(\alpha)}{2(\Gamma(\alpha)\tilde{\Delta} - 1)}.$$

Si,

$$k := 8\beta e \|u_0\|_{\mathcal{E}} < \frac{1 - \sigma}{\tilde{\Delta}} = \frac{1}{2\tilde{\Delta}} < \frac{1}{2\delta}, \quad (4.41)$$

le problème (S1) a une solution unique y_0 qui est Ulam-Hyers stable.

Puisque la fonction $\varphi(\tau) = 1 + \tau^2$, $\forall \tau \in [0, 1]$ est Riemann intégrable et

$$\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = \frac{4}{3} = \delta_\varphi \leq \frac{4}{3} \varphi(\tau), \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

alors, pour k vérifiant (4.41), le problème (S1) est Ulam-Hyers-Rassias stable par rapport à la fonction φ .

Exemple 4.2 Soit maintenant $\mathcal{E} = C(J, \mathbb{R})$ et considérons dans l'espace de Banach $C(J, \mathcal{E})$ muni de la norme

$$\|y\|_{C(J, \mathcal{E})} = \max_{\tau \in J} \|y(\tau, \cdot)\|_{\mathcal{E}} = \max_{(\theta, \tau) \in J^2} |y(\tau, \theta)|$$

le problème Caputo-fractionnaire

$$(S2) : \begin{cases} {}^C_1 \partial_0^\alpha y(\tau, \theta) + \psi(\tau, y(\tau, \theta)) = 0, & 0 < \tau < 1, 0 \leq \theta \leq 1 \\ y_\tau^{(j)}(r, \theta) = 0, & j \notin \{3, 4\}, 0 \leq \theta \leq 1 \\ \theta y(1, \theta) = \int_0^1 (1-s) y(s, \theta) ds, & 0 \leq \theta \leq 1 \\ \theta^2 y_\tau^{(1)}(1, \theta) = \int_0^1 y(s, \theta) ds, & 0 \leq \theta \leq 1 \end{cases},$$

où, ${}^C_1 \partial_0^\alpha$ est la dérivée de Caputo d'ordre α par rapport au premier argument τ ,

$y_\tau^{(j)}(r, \theta) = \frac{d^j}{d\tau^j} y(\tau, \theta) |_{\tau=r}$ et la fonction ψ est la même que celle utilisée dans le premier exemple.

Nous allons en premier lieu montrer que (S2) peut être exprimé sous la forme (4.1), (4.2), (4.3). En effet, soient A_1 et A_2 les opérateurs définis dans $\mathcal{E} = C(J, \mathbb{R})$ par

$$(A_1 z)(\theta) = \theta z(\theta), \quad (A_2 z)(\theta) = \theta^2 z(\theta), \quad \forall \theta \in J.$$

A_1 et A_2 commutent entre eux, sont bornés avec $\|A_1\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} = \|A_2\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} = 1$. En utilisant ces opérateurs, on peut réécrire (S2) sous la forme désirée :

$$(S2) : \begin{cases} {}^C_1\partial_0^\alpha y(\tau, \theta) + \psi(\tau, y(\tau, \theta)) = 0, & 0 < \tau < 1, 0 \leq \theta \leq 1 \\ y_\tau^{(j)}(\tau, \theta) = 0, & j \notin \{3, 4\}, 0 \leq \theta \leq 1 \\ A_1 y(1, \cdot)(\theta) = \int_0^1 (1-s) y(s, \theta) ds, & 0 \leq \theta \leq 1 \\ A_2 y_\tau^{(1)}(1, \cdot)(\theta) = \int_0^1 y(s, \theta) ds, & 0 \leq \theta \leq 1 \end{cases},$$

Dans le cas présent, l'opérateur U (formule (4.19)) est donné dans $\mathcal{E}$ par la relation,

$$Ux(\theta) = \left(\frac{600\theta^3 - 600\theta^2 + 300\theta + 1}{600} \right) x(\theta), \quad x \in \mathcal{E}, \theta \in [0, 1].$$

La fonction $h(\theta) = \frac{600\theta^3 - 600\theta^2 + 300\theta + 1}{600}$, $\theta \in J$ est continue, croissante et

$$h(0) = \frac{1}{600} < h(\theta) < h(1) = \frac{571}{600}, \quad 0 < \theta < 1.$$

L'opérateur U est donc borné avec $\|U\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} = h(1) = \frac{571}{600}$. U est aussi inversible et

$$U^{-1}x(\theta) = \frac{1}{h(\theta)} x(\theta) = \frac{600}{600\theta^3 - 600\theta^2 + 300\theta + 1} x(\theta), \quad x \in \mathcal{E}, \theta \in [0, 1],$$

$$\|U^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} = \frac{1}{h(0)} = 600.$$

Puisque $\|A_1\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} = \|A_2\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} = 1$ alors, pour estimer les normes $\|\Phi_1\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}$ et $\|\Phi_2\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}$, il suffit de poser $|a_1| = |a_2| = 1$ dans les quantités Λ_1 , Λ_2 (voir premier exemple). Ceci nous donne,

$$\|\Phi_1\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq \frac{31\alpha^3 + 126\alpha^2 + 126\alpha + 157}{30\Gamma(\alpha + 2)}, \quad \|\Phi_2\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq \frac{21\alpha^3 + 65\alpha^2 + 65\alpha + 86}{20\Gamma(\alpha + 2)}.$$

D'après (4.30),

$$\delta \leq \Delta \leq \tilde{\Delta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1250\alpha^3 + 4470\alpha^2 + 4470\alpha + 5720}{\Gamma(\alpha + 2)}. \quad (4.42)$$

Ainsi, le problème (S2) a au moins une solution si

$$k := 8\beta e \|u_0\|_{\mathcal{E}} < \frac{1 - \sigma}{\tilde{\Delta} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}} = \frac{\Gamma(\alpha)}{2(\Gamma(\alpha)\tilde{\Delta} - 1)}.$$

Si,

$$k := 8\beta e \|u_0\|_{\mathcal{E}} < \frac{1 - \sigma}{\tilde{\Delta}} = \frac{1}{2\tilde{\Delta}} < \frac{1}{2\delta}. \quad (4.43)$$

Le problème (S2) a une solution unique y_0 qui est Ulam-Hyers stable.

Puisque la fonction $\varphi(\tau) = 1 + \tau^2$, $\forall \tau \in [0, 1]$ est Riemann intégrable est

$$\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = \frac{4}{3} = \delta_\varphi \leq \frac{4}{3} \varphi(\tau), \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

alors, pour k vérifiant (4.43), le problème (S2) est Ulam-Hyers-Rassias stable par rapport à la fonction φ .

Conclusion

Dans la présente thèse nous avons étudié une classe de problèmes différentiels fractionnaires de Caputo avec des conditions limites intégrales. Dans un premier lieu, nous avons considéré le cas des fonctions réelles. Après écriture du problème sous forme d'équation intégrale, nous avons grâce au principe de contraction de Banach obtenu un résultat d'existence et d'unicité ainsi qu'une estimation de la norme de la solution. En faisant varier les conditions sur le second membre, nous avons grâce au théorème du point fixe de Schauder obtenu plusieurs critères suffisants d'existence de solution. Des résultats d'Ulam-Hyers et Ulam-Hyers-Rassias stabilités ont aussi été obtenus. Dans un but d'extension première, nous avons aussi considéré un problème d'inclusion différentielle fractionnaire toujours pour les fonctions réelles. Deux situations ont été alors étudiées : le cas où le second membre est à valeurs convexes, en plus du cas où il est à valeurs non convexes mais compactes. Dans chacun de ces cas, un résultat d'existence a été établi grâce successivement au théorème de Bohnnenblust-Karlin et au lemme de Covitz-Nadler. Comme seconde extension, nous avons considéré le cas des fonctions à valeurs dans un espace de Banach. Dans ce cas précis, nous avons fait apparaître des opérateurs linéaires bornés dans les conditions intégrales. Comme dans des fonctions à valeurs réelles, un résultat d'existence et d'unicité a été établi grâce au principe de contraction de Banach et un résultat d'existence a été obtenu par application du théorème du point fixe de Krasnosel'skii. Des résultats d'Ulam-Hyers et Ulam-Hyers-Rassias stabilités ont aussi été démontrés. Les résultats de cette thèse ouvrent les perspectives de recherche suivantes :

- 1) Reprendre les mêmes problèmes sur des intervalles infinis de temps. Dans ce cas, il faudra remplacer l'espace $L^1(J)$ par l'espace $L^1_c(J)$.
- 2) Reprendre les mêmes problèmes en remplaçant la dérivée de Caputo par une dérivée tempérée par rapport à une fonction donnée.
- 3) Reprendre les mêmes problèmes et faire augmenter le nombre des conditions limites.
- 4) Etendre les résultats aux cas des systèmes Caputo-fractionnaires couplés.

Bibliographie

- [1] **Abbas. S., Benchohra. M., Petrusel. A.** (2014), *Ulam stability for partial fractional differential inclusions via Picard operators theory*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **51**, 1–13. [2](#)
- [2] **Abbas. S., Benchohra. M., Graef. J.R., Henderson. J.** (2018), *Implicit fractional differential and integral equations (existence and stability)*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, **26**. doi :10.1515/9783110553819
- [3] **Abbas. S., Benchohra. M., Laledj. N., Zhou. Y.** (2019), *Existence and Ulam stability for implicit fractional q -difference equation*, Advances in Difference Equations, **2019**, **480**, 1–12. doi :10.1186/s13662-019-2411-y [2](#)
- [4] **Abbasbandy. S., Nieto. J.J., Alavi. M.** (2005), *Tuning of reachable set in one dimensional fuzzy differential inclusions*, Chaos, Solitons and Fractals, **26**, 1337–1341. doi :10.1016/j.chaos.2005.03.018 [2](#)
- [5] **Abdellouahab. N., Brahim. T., Khaled. Z.** (2022), *Existence and stability results of a nonlinear fractional integro-differential equation with integral boundary conditions*, Kragujevac Journal of Mathematics, **46**, **5**, 685–699. doi :10.46793/KgJMat2205.685A
- [6] **Agarwal. O.P.** (2010), *Generalized variational problems and Euler-Lagrange equations*, Computers and Mathematics with Applications, **59**, **5**, 1852–1864. doi :10.1016/j.camwa.2009.08.029 [2](#)
- [7] **Ahmad. B., Matar. M.M., Ntouyas . S.K.** (2016), *On general fractional differential inclusions with nonlocal integral boundary conditions*, Differential Equations and Dynamical Systems, **28**, **1**, 241–254. doi :10.1007/s12591-016-0319-5
- [8] **Ahmad. B., Ntouyas. S.K., Alsaedi. A.** (2017), *Fractional differential equations and inclusions with nonlocal generalized Riemann-Liouville integral boundary conditions*, International Journal of Analysis and Applications, **13**, **2**, 231–247. [2](#)
- [9] **Ahmad. B., Matar. M.M., El-Salmy. O.M.** (2017), *Existence of solutions and Ulam stability for Caputo type sequential fractional differential equations of ordre $\alpha \in (2, 3)$* , International Journal of Analysis and Applications, **15**, **1**, 86–101. [2](#), [28](#)
- [10] **Ahmed. E., El-Sayed. A.M.A., El-Saka. H.A.A.** (2007), *Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies models*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **325**, 542–553. doi :10.1016/j.jmaa.2006.01.087 [2](#)
- [11] **Ali. A., Shah. K., Li. Y.** (2019), *Topological degree theory and Ulam's stability analysis of a boundary-value problem of fractional differential equation*, Frontiers in Functional Equations and Analytic Inequalities, Springer, Anastassiou G, Rassias J. (eds). 73–92. doi :10.1007/978-3-030-28950-8 [2](#)
- [12] **Almeida. R., Malinowska. A.B., Monteiro. M.T.T.** (2018), *Fractional differential equations with a Caputo derivative with respect to a kernel function and their*

- applications*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **41**, **8**, 336–352. doi:10.1002/mma.4617 [36](#)
- [13] **Anastassiou. G.A.** (2017), *Strong fractional calculus theory for Banach space valued functions*, Nonlinear Functional Analysis and Applications, **22**, **3**, 495–524. [36](#)
- [14] **Anastassiou. G.A.** (2017), *Principles of general fractional analysis for Banach spaces valued functions*, RGMIA Res. Rep. Coll, **20**, **2017**, 1–58. [36](#)
- [15] **Aubin. J.P., Cellina. A.** (1984), *Differential inclusions*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York. doi:10.1002/zamm.19870670206 [25](#)
- [16] **Aubin. J.P., Frankowska. H.** (1990), *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Boston. [25](#)
- [17] **Balachandran. K., Matar. M., Trujillo. J.J.** (2016), *Note on contrability of linear fractional dynamical systems*, Journal of Control and Decision, **3**, **4**, 267–279. doi:10.1080/23307706.2016.1217754 [2](#)
- [18] **Banach. S.** (1922), *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales*, Fundamenta Mathematicae, **3**, 133–181. [6](#)
- [19] **Belhannache. F., Hamani. S., Henderson. J.** (2018), *Impulsive fractional differential inclusions involving the Liouville-Caputo-Hadamard fractional derivative*, Communications on Applied Nonlinear Analysis, **25**, **4**, 52–67. [2](#)
- [20] **Benchohra. M., Henderson. J., Ntouyas. S.K.** (2006), *On nonresonance second order impulsive functional differential inclusions with nonlinear boundary conditions*, Canadian Applied Mathematics Quarterly, **14**, **1**, 21–32. [2](#)
- [21] **Benchohra. M., Djebali. S., Hamani. S.** (2011), *Boundary value problems for differential inclusions with Riemann-Liouville fractional derivative*, Nonlinear Oscillations, **14**, **1**, 6–20. [2](#)
- [22] **Benchohra. M., Hamani. S.** (2008), *Nonlinear boundary value problems for differential inclusions with Caputo fractional derivative*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder Center, **32**, **1**, 115–130. [2](#)
- [23] **Benchohra. M., Hamani. S.** (2008), *Boundary value problems for differential inclusions with fractional order*, Discussiones Mathematicae Differential Inclusions, Control and Optimization, **28**, 147–164. [2](#)
- [24] **Bochner. S.** (1933), *Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind*, Fund. Math, **20**, 262–276. [33](#)
- [25] **Bohnenblust. H.F., Karlin. S.** (1950), *On a theorem of ville*, In contributions to the theory of games, Princeton University Press, **1**, 155–160. doi:10.1515/9781400881727-014 [25](#), [26](#)
- [26] **Bouziane. A.E-S., Bendoukha. B., Hamani. S.** (2026), *Boundary value problem for fractional differential inclusions with integral boundary conditions*, Arab Journal of Mathematical Sciences, **32**, **2**, 161–177. doi:10.1108/AJMS-11-2024-0171 [4](#)
- [27] **Bouziane. A.E-S., Bendoukha. B.** (2026), *Existence and Ulam-Hyers stability for a singular Caputo-fractional problem with integral boundary conditions*, Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization. doi:10.22067/ijnao.2026.93179.1636 [4](#)
- [28] **Castaing. C., Valadier. M.** (1977), *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg New York, **580**, 950–956. [25](#), [30](#)
- [29] **Castro. L.P., Silva. A.S.** (2022), *Ulam-Hyers stability of four-point boundary value problem for Caputo fractional differential equations with a parameter*, Vladikavkaz Mathematical Journal, **24**, **4**, 77–90. doi:10.46698/v3243-1645-4815-b [45](#)

- [30] **Chang. Y.K., Nieto. J.J.** (2009), *Some new existence results for fractional differential inclusions with boundary conditions*, Mathematical and Computer Modelling, **49**, 605–609. doi :10.1016/j.mcm.2008.03.014 2, 28
- [31] **Chang. Y.K., Li. W.T.** (2005), *Existence results for second order impulsive functional differential inclusions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **301**, 2, 477–490. doi :10.1016/j.jmaa.2004.07.041 2
- [32] **Chang. Y.K., Li. W.T., Nieto. J.J.** (2007), *Controlability of evolution differential inclusions in Banach spaces*, Nonlinear Analysis TMA, **67**, 623–632. doi :10.1016/j.na.2006.06.018 2
- [33] **Covitz. H., Nadler. S.B.** (1970), *Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces*, Israel Journal of Mathematics, **8**, 5–11. 25, 26, 29
- [34] **Deimling. K.** (1992), *Multivalued differential equations*. De Gruyter, Berlin. doi :10.1515/9783110874228 25
- [35] **Derbazi. C., Baitiche. Z., Benchohra. M.** (2020), *Cauchy problem with ψ -Caputo fractional derivative in Banach spaces*, Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications, **4**, 4, 349–360. doi :10.31197/atnaa.706292 36
- [36] **El-Hady. E-S., Öğreki. S.** (2021), *On Hyers-Ulam-Rassias stability of fractional differential equations with Caputo derivative*, Journal of Mathematics and Computer Science, **22**, 4, 325–332. doi :10.22436/jmcs.022.04.02 2
- [37] **Faieghi. M., Kuntanapreeda. S., Delavary. H., Baleanu. D.** (2013), *LMI-based stabilization of a class of fractional-order chaotic systems*, Nonlinear Dynamics, **72**, 301–309. doi :10.1007/s11071-012-0714-6 2
- [38] **Frigon. M.** (2007), *Systems of first order differential inclusions with maximal monotone terms*, Nonlinear Analysis TMA, **66**, 2064–2077. doi :10.1016/j.na.2006.03.002 2
- [39] **Gorenflo. R., Mainardi. F.** (2009), *Some recent advances in theory and simulation of fractional diffusion processes*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **229**, 2, 400–415. doi :10.1016/j.cam.2008.04.005 2
- [40] **Guerraiche. N., Hamani. S., Henderson. J.** (2016), *Boundary value problems for differential inclusions with integral anti-periodic conditions*, Communications on Applied Nonlinear Analysis, **23**, 3, 33–46. 2
- [41] **Hale. J.K., Lunel. S.M.V.** (1993), *Introduction to functional differential equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York. 6
- [42] **Hamani. S., Benchohra. M., Graef. J.R.** (2010), *Existence results for boundary-value problems with nonlinear fractional differential inclusions and integral conditions*, Electronic Journal of Differential Equations, **2010**, 20, 1–16. 2
- [43] **Hilfer. R.** (2000), *Applications of fractional calculus in physics*, World Scientific, Singapore. doi :10.1142/3779 2
- [44] **Hu. S., Papageorgiou. N.** (1997), *Handbook of multivalued analysis : volume I. theory in mathematics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, **419**. 25
- [45] **Hyers. D.H.** (1941), *On the stability of the linear functional equation*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **27**, 4, 222–224, doi :10.1073/pnas.27.4.222 2
- [46] **Jiang. X., Xu. M., Qi. H.** (2010), *The fractional diffusion model with an absorption term and modified Fick's law for nonlocal transport process*, Nonlinear Analysis Real World Applications, **11**, 262–269. doi :10.1016/j.nonrwa.2008.10.057 2

- [47] **Kheiryan. A., Rezapour. S.** (2020), *On Hyers-Ulam stability of two singular fractional integro-differential equation*, Journal of Advanced Mathematical Studies, **13**, 3, 339–349. [2](#), [3](#), [22](#)
- [48] **Kilbas. A.A., Srivastava. H.M., Trujillo. J.J.** (2006), *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematical studies, Amsterdam : Elsevier Sciences B.V. [2](#), [7](#), [36](#)
- [49] **Krasnosel'skii. M.A.** (1955), *Two remarks on the method of successive approximations*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, **10**, 1, 123–127. [6](#)
- [50] **Krasnosel'skii. M.A.** (1964), *Positive solutions of operator equations*, Groningen : Noordhoff.
- [51] **Lasota. A., Opial. Z.** (1965), *An application of the Kakutani-Ky-Fan theorem in the theory of ordinary differential equations*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques, **13**, 781–786. [26](#)
- [52] **Lee. C-H., Chang. F-K.** (2010), *Fractional-order PID controller optimization via improved electromagnetism-like algorithm*, Expert Systems with Applications, **37**, 8871–8878. doi :10.1016/j.eswa.2010.06.009 [2](#)
- [53] **Liu. F., Burrage. K.** (2011), *Novel techniques in parameter estimation for fractional dynamical models arising from biological systems*, Computers and Mathematics with Applications, **62**, 3, 822–833. doi :10.1016/j.camwa.2011.03.002 [2](#)
- [54] **Meral. F.C., Royston. T.J., Magin. R.** (2010), *Fractional calculus in viscoelasticity : an experimental study*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **15**, 939–945. doi :10.1016/j.cnsns.2009.05.004 [2](#)
- [55] **Mikusinski. J.** (1978), *The Bochner integral*, Academic Press New York, San Fransisco. [33](#)
- [56] **Mophou. G.M.** (2011), *Optimal control of fractional diffusion equation*, Computers and Mathematics with Applications, **61**, 1, 66–78. doi :10.1016/j.camwa.2010.10.030 [2](#)
- [57] **Nigmatullin. R.R., Omay. T., Baleanu. D.** (2010), *On fractional filtering versus conventional filtering in economics*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **15**, 4, 979–986. doi :10.1016/j.cnsns.2009.05.027 [2](#)
- [58] **Oldham. K.B.** (2010), *Fractional differential equations in electrochemistry*, Advances in Engineering Software, **41**, 9–12. doi :10.1016/j.advengsoft.2008.12.012 [2](#)
- [59] **Palaniappan. M.** (2020), *Ulam-Hyers-Rassias stability of nonlinear fractional differential equation with three point integral boundary conditions*, International Journal of Engineering Research and Technology, **13**, 12, 4679–4685. [2](#)
- [60] **Peng. S., Wang. J.R.** (2015), *Existence and Ulam–Hyers stability of ODEs involving two Caputo fractional derivatives*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **52**, 1–16. doi :10.14232/ejqtde.2015.1.52
- [61] **Podlubny. I.** (1999), *Fractional differential equations*, Academic Press, San Diego. [2](#), [7](#)
- [62] **Rassias. T.M.** (1978), *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society, **72**, 2, 297–300. doi :10.1090/S0002-9939-1978-0507327-1 [2](#)

- [63] **Rezapour. S., Shabibi. M.** (2015), *A singular fractional differential equation with Riemann-Liouville integral boundary condition*, Journal of Advanced Mathematical Studies, **8**, 4, 80–88. [2](#), [3](#), [40](#)
- [64] **Rus. I.A.** (2009), *Ulam stability of ordinary differential equations*, Studia Univ. "Babes-Bolyai", Mathematica, **2009**, **4**, 125–133. [2](#)
- [65] **Rus. I.A.** (2009), *Remarks on Ulam stability of the operatorial equations*, Fixed Point Theory, **10**, **2**, 305–320. [2](#)
- [66] **Samko. S.G., Kilbas. A.A., Marichev. O.I.** (1993), *Fractional integrals and derivatives : Theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland. [7](#)
- [67] **Shabibi. M., Rezapour. S., Vaezpour. S.M.** (2017), *A singular fractional integro-differential equation*, UPB Scientific Bulletin, Series A : Applied Mathematics and Physics, **79**, **1**, 109–118. [2](#)
- [68] **Smart. D.R.** (1974), *Fixed point theory*, Combridge Univ. Press, Combridge. [6](#)
- [69] **Smirnov. G.V.** (2002), *Introduction to the theory of differential inclusions*, Graduate Studies in Mathematics, Mathematical Society, Providence, Rhode Island, **41**. [2](#)
- [70] **Sokolov. I.M., Chechkin. A.V., Klafter. J.** (2004), *Fractional diffusion equation for a power-law truncated Levy process*, Physica A : Statistical Mechanics and its Applications, **336**, **3-4**, 245–251. doi :10.1016/j.physa.2003.12.044 [2](#)
- [71] **Taieb. A., Dahmani. Z.** (2019), *Ulam-Hyers-Rassias stability of fractional Lane-Emden equations*, ROMAI J, **15**, **1**, 133–153. [2](#)
- [72] **Ulam. S.M.** (1960), *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience Publishers, Inc, New York. [2](#)
- [73] **Ulam. S.M.** (1960), *Problems in Modern Mathematics (Chapter 6)*, Wiley, New York. [2](#)
- [74] **Wang. J.R., Zhou. Y., Wei. W.** (2012), *Optimal feedback control for semilinear fractional evolution equations in Banach spaces*, Systems and Control Letters, **61**, 472–476. doi :10.1016/j.sysconle.2011.12.009 [2](#)
- [75] **Wang. J.R., Lv. L., Zhou. Y.** (2011), *Ulam stability and data dependance for fractional differential equations with Caputo derivative*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **2011**, **63**, 1–10. doi :10.14232/ejqtde.2011.1.63 [2](#)
- [76] **Yosida. K.** (1980), *Functional Analysis*, 6th edition, Springer-Verlag, Berlin.
- [77] **Zeidler. E.** (1986), *Nonlinear functional analysis and its application*, Springer-Verlag.
- [78] **Zhang. F., Chen. G., Li. C., Kurths. J.** (2013), *Chaos synchronization in fractional differential systems*, Philosophical Transactions of the Royal Society A Mathematical, Physical and Engineering Sciences, **371**, 1–27. doi :10.1098/rsta.2012.0155 [2](#)
- [79] **Zhou. Y.** (2014), *Basic theory of fractional differential equations*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensak. doi :10.1142/9789814579902 [2](#)

