

Mémoire de Licence en Mathématiques

Présenté à

L'Université de Mostaganem

Par

M. X Y et Melle T Z

Etude dans les espaces

Soutenue le ? ? ? ? ? 20 ? ?

Devant le jury :

Président : , Professeur, Université de Mostaganem.

Examineur : , Professeur, Université de Mostaganem.

Encadreur , Maître de Conférences, Université de Mostaganem.

Table des matières

1	Introduction aux ondelettes de Legendre	4
1.1	Les Polynômes de Legendre	4
1.2	Les ondelettes	8
2	La matrice opérationnelle d'Intégration d'ondelettes de Legendre en une dimension (1D)	9
2.1	Les ondelettes de Legendre en (1D)	9
2.2	Approximation d'une fonction de $L^2([0, 1])$	11
2.3	La Matrice Opérationnelle d'intégration	12
2.4	Les matrices opérationnelles d'intégration d'ondelettes de Legendre en deux dimensions (2D)	15
2.4.1	La matrice opérationnelle de la variable x	15
2.4.2	La matrice opérationnelle de la variable y	16
3	Les matrices opérationnelles d'intégration d'ondelettes de Legendre en trois dimensions (3D)	18
3.1	Les ondelettes de Legendre en (3D)	18
3.2	Approximation d'une fonction $L^2(I)$	21
3.3	Les formules théoriques d'intégration	22
3.3.1	Formule d'intégration par rapport à la variable x	22
3.3.2	Formule d'intégration par rapport à la variable y	25
3.3.3	Formule d'intégration par rapport à la variable z	26
3.4	Les matrices opérationnelles d'intégration	27
3.4.1	Détermination de La matrice d'intégration P_x	27
3.4.2	Détermination de La matrice d'intégration P_y	29
3.4.3	Détermination de La matrice d'intégration P_z	30
	Bibliographie	34

Introduction Générale

L'analyse par ondelettes est apparue sous ses formes modernes, au début des années 80, dans un remarquable article d'Alex Grossmann et Jean Morlet.

Grâce aux travaux de M. Razzaghi et Yousefi, on peut résoudre les équations différentielles en utilisant les ondelettes de Legendre en une dimension ($1D$) et la matrice d'intégration P .

Les travaux de Persian[5] permettent de généraliser cette résolution en deux dimension ($2D$) grâce à l'intervention des matrices P_x et P_y . (Voir Fukang Yin, Junqiang Song et Imran Aziz, Siraj-ul-Islam, Božidan Šarler)[1].

Beaucoup de phénomènes chimiques sont décrits par des systèmes de réaction-diffusion [6] modélisés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial t} - \operatorname{div}(d_a \nabla a) = -k_1 ab, \\ \frac{\partial b}{\partial t} - \operatorname{div}(d_b \nabla b) = -k_1 ab - k_2 bc, \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div}(d_c \nabla c) = k_1 ab - k_2 bc, \\ \frac{\partial d}{\partial t} - \operatorname{div}(d_d \nabla d) = k_2 bc. \end{array} \right.$$

ces réactions chimiques ont lieu généralement dans un domaine de $\mathbb{R}^3$.

Afin de généraliser les différentes méthodes sus citées pour résoudre les problèmes posés dans $\mathbb{R}^3$, on propose de déterminer les ondelettes de Legendre en ($3D$) et leur matrices d'intégration.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre on donne une description générale des polynômes de Legendre. Le deuxième chapitre aborde la méthode de décomposition en ondelettes de Legendre en une dimension ($1D$) et un résumé en deux dimensions ($2D$) des travaux de Persian. Le dernier chapitre est consacré aux calculs explicites des matrices d'intégration en ($3D$).

A la fin de ce document on donne des perspectives .

Chapitre 1

Introduction aux ondelettes de Legendre

1.1 Les Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont les solutions de l'équation différentielle de Legendre,

$$(1-x^2) \ddot{y} - 2x\dot{y} + m(m+1)y = \frac{d}{dx} [(1-x^2) \dot{y}] + m(m+1)y = 0,$$

Définition 1.1 Ils sont définis sur $[-1, 1]$ par la relation de récurrence

$$\begin{cases} P_{k+2}(x) = \left(\frac{2k+3}{k+2}\right) x P_{k+1}(x) - \left(\frac{k+1}{k+2}\right) P_k(x), k \in \mathbb{N} \\ P_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(x) = x \end{cases}$$

et par l'expression qui est connue sous le nom "Formule de Rodriguez",

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.2 L'expression

$$\varphi(x, h) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xh + h^2}}, \quad |h| < 1$$

est appelée fonction génératrice des polynômes de Legendre, et on a :

$$\varphi(x, h) = P_0(x) + h P_1(x) + h^2 P_2(x) + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} h^m P_m(x).$$

Proposition 1.1 *Il est utile de disposer de quelques valeurs particulières qui suivent, prises par les polynômes de Legendre*

$$P_m(1) = (1)^m = 1, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$P_m(-1) = (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{Si } m \text{ est paire} \\ -1 & \text{Si } m \text{ est impaire} \end{cases}$$

Remarque 1.1 *les six premiers polynômes de Legendre sont :*

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\ P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \\ P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8} \\ P_5(x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{70}{8}x^3 + \frac{15}{8}x \end{array} \right.$$

Proposition 1.2 *Les polynômes de Legendre vérifient la relation de récurrence suivante*

$$P'_{m+1}(x) - P'_{m-1}(x) = (2m+1)P_m(x)$$

Preuve. *Pour démontrer cette relation on utilise l'égalité vérifiée par la fonction génératrice*

$$\frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - h \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2h \frac{\partial \varphi}{\partial h} - \varphi = 0$$

En remplaçant dans cette dernière par $\varphi(x, h) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, h) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P'_n(x)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial h}(x, h) = \sum_{n=0}^{\infty} n h^{n-1} P_n(x)$, on obtient :

$$\sum_{m=0}^{\infty} (P'_{m+1}(x) - P'_{m-1}(x) - (2m+1)P_m(x))h^m = 0$$

Donc

$$P'_{m+1}(x) - P'_{m-1}(x) = (2m+1)P_m(x)$$

■

Proposition 1.3 *Les polynômes de Legendre constituent une suite de polynômes orthogonaux c'est-à-dire :*

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ Si } m \neq n; \\ \frac{2}{2m+1}, \text{ Si } m = n. \end{cases}$$

Preuve. On démontre que les polynôme de Legendre sont orthogonaux par rapport au produit scalaire $\langle P_m(x), P_n(x) \rangle = \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx$

c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0, \text{ Si } m \neq n \quad (1.1)$$

Pour montrer (1.1) on écrit l'équation de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0 \quad \text{pour } y = P_m(x),$$

sous la forme

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) P'_m(x) \right] + m(m+1)P_m(x) = 0 \quad (1.2)$$

En écrivant (1.2) pour $P_n(x)$:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) P'_n(x) \right] + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (1.3)$$

En multipliant (1.2) par $P_n(x)$ et (1.3) par $P_m(x)$ puis en soustrayant on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) P'_m(x) \right] P_n(x) + m(m+1)P_m(x)P_n(x) \\ & - \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) P'_n(x) \right] P_m(x) - n(n+1)P_m(x)P_n(x) \\ & = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) P'_m(x) \right] P_n(x) - \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) P'_n(x) \right] P_m(x) + [m(m+1) - n(n+1)] P_m(x)P_n(x) = 0$$

Comme

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} ((1-x^2) [P_n(x)P'_m(x) - P_m(x)P'_n(x)]) \\ & = \frac{d}{dx} (P_n(x)(1-x^2)P'_m(x) - P_m(x)(1-x^2)P'_n(x)) \\ & = P'_n(x)(1-x^2)P'_m(x) + P_n(x)\frac{d}{dx}((1-x^2)P'_m(x)) \\ & \quad - P'_m(x)(1-x^2)P'_n(x) - P_m(x)\frac{d}{dx}((1-x^2)P'_n(x)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)(P_n(x)P'_m(x) - P_m(x)P'_n(x)) \right] = [m(m+1) - n(n+1)] P_n(x)P_m(x)$$

En intégrant on a

$$\begin{aligned} \left[(1-x^2)(P_n(x)P'_m(x) - P_m(x)P'_n(x)) \right]_{-1}^1 &= [m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx \\ 0 &= [m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0, \text{ si } m \neq n$$

Et pour démontrer

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2m+1}, \text{ Si } m = n$$

cela revient à

$$\|P_m(x)\|^2 = \frac{2}{2m+1}$$

En effet : pour $m > 1$, on peut utiliser la relation de la proposition (1.2), dont on déduit (en utilisant le fait que, pour tout k , P'_{k-1} est de degré $k-2 < k$ donc est orthogonal à P_k , et en affectuant une intégration par partie) :

$$\begin{aligned} \langle P_m, (2m+1)P_m \rangle &= \langle P_m, P'_{m+1} - P'_{m-1} \rangle = \langle P_m, P'_{m+1} \rangle \text{ car } \langle P_m, P'_{m-1} \rangle = 0 \\ &= [P_m P_{m+1}]_{-1}^1 - \langle P'_m, P_{m+1} \rangle \\ &= [P_m P_{m+1}]_{-1}^1 = P_m(1)P_{m+1}(1) - P_m(-1)P_{m+1}(-1) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

on obtient

$$(2m+1) \|P_m(x)\|^2 = 2$$

et par suite

$$\|P_m(x)\|^2 = \frac{2}{2m+1}$$

■

1.2 Les ondelettes

Définition 1.3 Les ondelettes forment une famille de fonctions construites à partir de la dilatation et translation d'une fonction unique Ψ dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ appelée ondelette mère.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{a,b}(x) = \left| a^{-\frac{1}{2}} \right| \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \\ a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \end{array} \right.$$

Remarque 1.2 Lorsque le paramètre de dilatation a et de translation b varie de façon continue, on a une famille d'ondelettes continue. On parle d'une famille d'ondelettes discrètes, si les paramètres a et b prennent des valeurs discrètes

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a_0, a_0 > 1 \\ b = nb_0 a_0^{-m}, b_0 > 1, \end{array} \right.$$

pour n et m des entiers positifs.

La famille d'ondelettes discrètes la plus utilisée est

$$\Psi_{n,m}(x) = |a_0|^{\frac{m}{2}} \Psi(a_0^m x - nb_0).$$

Chapitre 2

La matrice opérationnelle d'Intégration d'ondelettes de Legendre en une dimension (1D)

2.1 Les ondelettes de Legendre en (1D)

Définition 2.1 Les ondelettes de Legendre en une dimension, notées $\Psi_{n,m}(x) = \Psi(n, m, k, x)$, sont définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\Psi_{n,m}(x) = \begin{cases} \sqrt{(m+\frac{1}{2})2^{\frac{k}{2}}} P_m(x); P_m(x) = \bar{P}_m(2^k x - 2n + 1) & \text{Si } \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}}, \\ 0 & \text{Si non} \end{cases} \quad (2.1)$$

où pour tout entier fixé, $k > 0$, $n = 1, \dots, 2^{k-1}$ représente le nombre de niveaux de la décomposition de l'intervalle $[0, 1]$ et $m = 0, \dots, M - 1$ est le degré du polynôme de Legendre.

Proposition 2.1 La famille $\{\Psi_{n,m}\}_{1 \leq n < 2^{k-1}, m \geq 0}$ forme une base de l'espace $L^2([0, 1])$.

Preuve. On doit démontrer que tout élément $U \in L^2([0, 1])$ peut être décomposé en :

$$U(x) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m \geq 0}^{\infty} C_{n,m} \Psi_{n,m}(x)$$

où

$$C_{n,m} = \langle U(x), \Psi_{n,m} \rangle = \int_0^1 U(x) \Psi_{n,m}(x) dx$$

$$\text{soit } U \in L^2([0, 1]) \Rightarrow U(x) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} U_n(x) \text{ où } U_n(x) = \begin{cases} U(x) & \text{Si } (\frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}}) = I_n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

on a d'une part $U_n(x) \in L^2([0, 1])$ car

$$\int_0^1 U_n^2(x) dx = \int_{I_n} U^2(x) dx < \int_0^1 U^2(x) dx < \infty$$

D'autre part, en posant

$$\tau = 2^k x - 2n + 1 \text{ et } \bar{U}_n(\tau) = U_{n/I_n}(x),$$

on a : $\bar{U}_n \in L^2([-1, 1])$ par rapport à la variable τ
en effet :

$$\int_{-1}^1 \bar{U}_n^2(\tau) d\tau = \int_{I_n} U_{n/I_n}^2(x) 2^k dx = 2^k \int_0^1 U^2(x) dx < \infty$$

Ainsi et comme les polynômes de Legendre $\{P_m(x)\}_{m \geq 0}$ forment une base de $L^2([-1, 1]) \Rightarrow$

$$\bar{U}_n(\tau) = \sum_{m \geq 0}^{\infty} C_{n,m} P_m(\tau)$$

où

$$\begin{aligned} C_{n,m} &= \frac{\langle P_m, \bar{U}_n \rangle}{\|P_m\|^2} = \frac{1}{2}(2m+1) \int_{-1}^1 P_m(\tau) \bar{U}_n(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2}(2m+1) \int_{I_n} P_m(2^k x - 2n + 1) U_{n/I_n}(x) 2^k dx \\ &= (m + \frac{1}{2}) 2^k \int_0^1 U_n(x) P_m(2^k x - 2n + 1) dx \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} U_{n/I_n}(x) &= \sum_{m \geq 0}^{\infty} (m + \frac{1}{2}) \left(\int_0^1 U_n(x) P_m(2^k x - 2n + 1) dx \right) \cdot P_m(2^k x - 2n + 1) \\ &= \sum_{m \geq 0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}} P_m(2^k x - 2n + 1) \cdot \int_0^1 U_n(x) 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}} P_m(2^k x - 2n + 1) dx \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$U(x) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m \geq 0}^{\infty} C_{n,m} \Psi_{n,m}(x)$$

■

2.2 Approximation d'une fonction de $L^2([0, 1])$

D'après la proposition(2.1), toute fonction U de cet espace peut s'écrire de la façon suivante :

$$U(x) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{n,m} \Psi_{n,m}(x), \quad (2.2)$$

avec $C_{n,m} = \langle U, \Psi_{n,m} \rangle = \int_0^1 U(x) \Psi_{n,m}(x) dx$, tel que $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2([0, 1])$.

Pour des raisons techniques on tronque la série (2.2), on obtient

$$U(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{n,m} \Psi_{n,m}(x)$$

où C et $\Psi(x)$ sont des vecteurs de dimension $2^{k-1}M$ donnés par :

$$C = [C_{1,0}, \dots, C_{1,M-1}, C_{2,0}, \dots, C_{2,M-1}, \dots, C_{2^{k-1},0}, \dots, C_{2^{k-1},M-1}]^T,$$

$$\Psi(x) = [\Psi_{1,0}(x), \dots, \Psi_{1,M-1}(x), \Psi_{2,0}(x), \dots, \Psi_{2,M-1}(x), \dots, \Psi_{2^{k-1},0}(x), \dots, \Psi_{2^{k-1},M-1}(x)]^T, \quad (2.3)$$

A titre d'exemple, on peut écrire la fonction $U(x) = 1$ dans la base d'ondelette de Legendre (2.1).

En effet,

$$1 \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{n,m} \Psi_{n,m}(x) = C^T \Psi(x),$$

alors,

$$C_{n,m} = \langle 1, \Psi_{n,m} \rangle = \int_0^1 \Psi_{n,m}(x) dx$$

Pour illustration, on prend $k = 2; M = 3$; on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{1,0}(x) = \sqrt{2} \\ \Psi_{1,1}(x) = \sqrt{6}(4x - 1) \\ \Psi_{1,2}(x) = \sqrt{10}(\frac{3}{2}(4x - 1)^2 - \frac{1}{2}) \end{array} \right. \quad \text{sur } \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{2,0}(x) = \sqrt{2} \\ \Psi_{2,1}(x) = \sqrt{6}(4x - 3) \\ \Psi_{2,2}(x) = \sqrt{10}\left(\frac{3}{2}(4x - 3)^2 - \frac{1}{2}\right) \end{array} \right. \quad sur \quad \left[\frac{1}{2}, 1 \right], \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{1,0}(x) = \int_0^1 \Psi_{1,0}(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ C_{1,1}(x) = \int_0^1 \Psi_{1,1}(x) dx = 0 \\ C_{1,2}(x) = \int_0^1 \Psi_{1,2}(x) dx = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{2,0}(x) = \int_0^1 \Psi_{2,0}(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ C_{2,1}(x) = \int_0^1 \Psi_{2,1}(x) dx = 0 \\ C_{2,2}(x) = \int_0^1 \Psi_{2,2}(x) dx = 0 \end{array} \right.$$

et

$$1 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right]^T \Psi(x).$$

2.3 La Matrice Opérationnelle d'intégration

On intègre sur l'intervalle $[0, x]$ la fonction vectorielle $\Psi(x)$ définie en (2.3), on trouve

$$\int_0^x \Psi(\tau) d\tau = P_x \Psi(x)$$

où P_x est la matrice opérationnelle d'intégration de dimension $(2^{k-1}M) \times (2^{k-1}M)$.

Pour le calcul de cette matrice, on prend $M = 3$ et $k = 2$ c'est à dire $n = 1, 2$ et $m = 0, 1, 2$ on intègre (2.4)-(2.5) sur $[0, x]$ on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^x \Psi_{1,0}(\tau) d\tau &= \begin{cases} \sqrt{2}x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \\
&= \frac{1}{4}\Psi_{1,0} + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}\Psi_{1,1} + \frac{1}{2}\Psi_{2,0} \\
&= \left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0 \right]^T \Psi(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \Psi_{1,1}(\tau) d\tau &= \begin{cases} 2\sqrt{6}x^2 - \sqrt{6}x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{12}\Psi_{1,0} + \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}}\Psi_{1,2} \\
&= \left[-\frac{\sqrt{3}}{12}, 0, \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}}, 0, 0, 0 \right]^T \Psi(x).
\end{aligned}$$

$$\int_0^x \Psi_{1,2}(\tau) d\tau = -\frac{\sqrt{5}}{20\sqrt{3}}\Psi_{1,1} = \left[0, -\frac{\sqrt{5}}{20\sqrt{3}}, 0, 0, 0, 0 \right]^T \Psi(x).$$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \Psi_{2,0}(\tau) d\tau &= \int_0^x \sqrt{2}P_0(4\tau - 1) d\tau \\
&= \frac{1}{4}\Psi_{2,0} + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}\Psi_{2,1} = \left[0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}, 0 \right]^T \Psi(x).
\end{aligned}$$

$$\int_0^x \Psi_{2,1}(\tau) d\tau = -\frac{\sqrt{3}}{12}\Psi_{2,0} + \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}}\Psi_{2,2} = \left[0, 0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{12}, 0, \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}} \right]^T \Psi(x).$$

$$\int_0^x \Psi_{2,2}(\tau) d\tau \simeq -\frac{\sqrt{5}}{20\sqrt{3}}\Psi_{2,1} = \left[0, 0, 0, 0, -\frac{\sqrt{5}}{20\sqrt{3}}, 0 \right]^T \Psi(x).$$

Alors,

$$\int_0^x \Psi(\tau) d\tau = P_{6 \times 6} \Psi(x),$$

avec

$$P_{6 \times 6} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} L_{3 \times 3} & F_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & L_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

où

$$L_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$F_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En généralisant, on obtient

$$P_x = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} L & F & F & F & \dots & F \\ 0 & L & F & F & \dots & F \\ 0 & 0 & L & F & \dots & F \\ 0 & 0 & 0 & L & F & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix}$$

avec,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & -\frac{1}{\sqrt{2M-5}\sqrt{2M-3}} & \ddots & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$F = \begin{bmatrix} 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Avec L et F sont deux matrices carrées de dimension $(M \times M)$.

Razzaghi M. et Yousefi S[4]. sont les premiers qui ont établi la matrice opérationnelle d'intégration en une dimension (1D), puis Persian[5] généralise ce travail en deux dimensions (2D), ces résultats sont résumés dans la section qui suit .

2.4 Les matrices opérationnelles d'intégration d'ondelettes de Legendre en deux dimensions (2D)

Définition 2.2 Les ondelettes de Legendre en deux dimensions, notées

$\Psi_{n,m,\hat{n},\hat{m}}(x,y) = \Psi(n,m,\hat{n},\hat{m},k,\hat{k},x,y)$, sont définies sur le carré $[0,1] \times [0,1]$ par :

$$\Psi_{n,m,\hat{n},\hat{m}}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{(m+\frac{1}{2})(\hat{m}+\frac{1}{2})} 2^{\frac{k+\hat{k}}{2}} P_m(x) P_{\hat{m}}(y), & \text{Si } \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}-1}{2^{\hat{k}-1}} \leq y < \frac{\hat{n}}{2^{\hat{k}-1}} \\ 0 & \text{Si non} \end{cases}$$

$$\text{où } P_m(x) = \bar{P}_m(2^k x - 2n + 1), P_{\hat{m}}(y) = \bar{P}_{\hat{m}}(2^{\hat{k}} y - 2\hat{n} + 1)$$

2.4.1 La matrice opérationnelle de la variable x

Comme dans le cas monodimensionnel, cette matrice notée P_x est obtenue par intégration par rapport à la première variable de la fonction vectorielle $\Psi(x,y)$ sur $[0,x]$.

On obtient la matrice de dimension $(2^{k-1}2^{\hat{k}-1}M\hat{M}) \times (2^{k-1}2^{\hat{k}-1}M\hat{M})$ donnée par :

$$P_x = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} L & F & F & \cdots & F \\ O & L & F & \cdots & F \\ O & O & L & \cdots & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & F \\ O & O & O & \cdots & L \end{bmatrix}$$

telle que O et $\hat{O}$ sont les matrices zéro de dimension $(2^{k-1}M\hat{M}) \times (2^{k-1}M\hat{M})$

et $(2^{k-1}M) \times (2^{k-1}M)$ respectivement. F, L sont des matrices carrées de dimension $(2^{k-1}M\dot{M}) \times (2^{k-1}M\dot{M})$ définies comme suit :

$$F = \begin{bmatrix} 2I_G & \dot{O} & \dot{O} & \dots & \dot{O} \\ \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & \dots & \dot{O} \\ \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & \dots & \dot{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & \dots & \dot{O} \end{bmatrix}; G = 2^{k-1}M$$

$$L = \begin{bmatrix} I_G & \frac{1}{\sqrt{3}}I_G & \dot{O} & \dot{O} & \dots & \dot{O} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}I_G & \dot{O} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_G & \dot{O} & \dots & \dot{O} \\ \dot{O} & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_G & \dot{O} & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}}I_G & \dots & \dot{O} \\ \dot{O} & \dot{O} & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}}I_G & \dot{O} & \dots & \dot{O} \\ \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2M-5}\sqrt{2M-3}}I_G & \ddots & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}}I_G \\ \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & -\frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}}I_G & \dot{O} \end{bmatrix}$$

2.4.2 La matrice opérationnelle de la variable y

cette matrice notée P_y est obtenue par intégration par rapport à la deuxième variable de la fonction vectorielle $\Psi(x, y)$ sur $[0, y[$.

On obtient la matrice de dimension $(2^{k-1}2^{\dot{k}-1}M\dot{M}) \times (2^{k-1}2^{\dot{k}-1}M\dot{M})$ donnée par :

$$P_y = \frac{1}{2^{\dot{k}}} \begin{bmatrix} D & O & O & \dots & O \\ O & D & O & \dots & O \\ O & O & D & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & D \end{bmatrix}$$

telle que O est la matrice zéro de dimension $(2^{k-1}M\dot{M}) \times (2^{\dot{k}-1}M\dot{M})$, et D est la matrice carrée de dimension $(2^{\dot{k}-1}M\dot{M}) \times (2^{\dot{k}-1}M\dot{M})$ définie comme suit :

$$D = \begin{bmatrix} L & F & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L & F & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & L \end{bmatrix}; \dim L = \dot{M} \times \dot{M}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \dim F = \dot{M} \times \dot{M}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \dot{O} & \dot{O} & \dots & \dot{O} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \dot{O} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & \dot{O} & \dots & \dot{O} \\ \dot{O} & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & \dot{O} & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \dots & \dot{O} \\ \dot{O} & \dot{O} & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \dot{O} & \dots & \dot{O} \\ \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2M-5}\sqrt{2M-3}} & \ddots & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} \\ \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & -\frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} & \dot{O} \end{bmatrix}$$

Chapitre 3

Les matrices opérationnelles d'intégration d'ondelettes de Legendre en trois dimensions (3D)

Dans ce chapitre nous allons généraliser les résultats obtenus en (1D) et ceux obtenus en (2D) à la troisième dimension(3D) .

3.1 Les ondelettes de Legendre en (3D)

Définition 3.1 Les ondelettes de Legendre en trois dimensions, notées

$\Psi_{n,m,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) = \Psi(n, m, \hat{n}, \hat{m}, \bar{n}, \bar{m}, k, \bar{k}, \bar{k}, x, y, z)$ sont définies sur le domaine $I = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ par :

$$\Psi_{n,m,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{(m+\frac{1}{2})(\hat{m}+\frac{1}{2})(\bar{m}+\frac{1}{2})} 2^{\frac{k+\bar{k}+\bar{k}}{2}} P_m(x) P_{\hat{m}}(y) P_{\bar{m}}(z) & \text{Si} \\ \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}-1}{2^{\bar{k}-1}} \leq y < \frac{\hat{n}}{2^{\bar{k}-1}}, \frac{\bar{n}-1}{2^{\bar{k}-1}} \leq z < \frac{\bar{n}}{2^{\bar{k}-1}}, & \\ 0 & \text{Si non} \end{cases} \quad (3.1)$$

où $k, \bar{k}, \bar{k}$ sont 3 entiers strictement positifs fixés, $n = 1, \dots, 2^{k-1}$, $\hat{n} = 1, \dots, 2^{\bar{k}-1}$ et $\bar{n} = 1, \dots, 2^{\bar{k}-1}$ représentent les niveaux de décomposition de I suivant x, y et z , $m = 0, \dots, M-1$, $\hat{m} = 0, \dots, \hat{M}-1$ et $\bar{m} = 0, \dots, \bar{M}-1$, sont les degrés de polynôme de Legendre (où $M, \hat{M}, \bar{M} \in \mathbb{N}^*$ sont le nombre de points de collocation de la discrétisation).

où

$$P_m(x) = \bar{P}_m(2^k x - 2n + 1),$$

$$P_{\dot{m}}(y) = \bar{P}_{\dot{m}}(2^{\dot{k}} y - 2\dot{n} + 1),$$

$$P_{\bar{m}}(z) = \bar{P}_{\bar{m}}(2^{\bar{k}} z - 2\bar{n} + 1).$$

$$\bar{P}_m(x), \bar{P}_{\dot{m}}(y) \text{ et } \bar{P}_{\bar{m}}(z)$$

sont les polynôme de Legendre d'ordre $m, \dot{m}, \bar{m}$ respectivement sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Proposition 3.1 (*l'orthonormalité d'ondelettes de Legendre en 3D*)

Les ondelettes de Legendre en 3D forment un ensemble orthonormé sur $I = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ c'est à dire :

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) \Psi_{n_1,m_1,\dot{n}_1,\dot{m}_1,\bar{n}_1,\bar{m}_1}(x, y, z) dx dy dz = \delta_{n,n_1} \delta_{m,m_1} \delta_{\dot{n},\dot{n}_1} \delta_{\dot{m},\dot{m}_1} \delta_{\bar{n},\bar{n}_1} \delta_{\bar{m},\bar{m}_1} \quad \blacksquare$$

On commence par remarquer que si

$$n \neq n_1 \text{ ou } \dot{n} \neq \dot{n}_1 \text{ ou } \bar{n} \neq \bar{n}_1, \forall m, \dot{m}, \bar{m}, m_1, \dot{m}_1, \bar{m}_1$$

alors

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) \Psi_{n_1,m_1,\dot{n}_1,\dot{m}_1,\bar{n}_1,\bar{m}_1}(x, y, z) dx dy dz = 0,$$

Car

$$Sup \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}} \cap Sup \Psi_{n_1,m_1,\dot{n}_1,\dot{m}_1,\bar{n}_1,\bar{m}_1} = E$$

$$\text{avec } mes(E) = 0$$

Soient donc

$$n = n_1 \text{ et } \dot{n} = \dot{n}_1 \text{ et } \bar{n} = \bar{n}_1$$

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}}(x,y,z) \Psi_{n,m_1,\dot{n},\dot{m}_1,\bar{n},\bar{m}_1}(x,y,z) dx dy dz \\
 &= \int_{\frac{n-1}{2^k-1}}^{\frac{n}{2^k-1}} \int_{\frac{\dot{n}-1}{2^{\dot{k}}-1}}^{\frac{\dot{n}}{2^{\dot{k}}-1}} \int_{\frac{\bar{n}-1}{2^{\bar{k}}-1}}^{\frac{\bar{n}}{2^{\bar{k}}-1}} A_{m,\dot{m},\bar{m}} A_{m_1,\dot{m}_1,\bar{m}_1} \\
 &\times \bar{P}_m(2^k x - 2n + 1) \bar{P}_{\dot{m}}(2^{\dot{k}} y - 2\dot{n} + 1) \bar{P}_{\bar{m}}(2^{\bar{k}} z - 2\bar{n} + 1) \\
 &\times \bar{P}_{m_1}(2^k x - 2n + 1) \bar{P}_{\dot{m}_1}(2^{\dot{k}} y - 2\dot{n} + 1) \bar{P}_{\bar{m}_1}(2^{\bar{k}} z - 2\bar{n} + 1) dx dy dz
 \end{aligned}$$

Tel que

$$\begin{aligned}
 A_{m,\dot{m},\bar{m}} &= \sqrt{(m+\frac{1}{2})(\dot{m}+\frac{1}{2})(\bar{m}+\frac{1}{2})} 2^{\frac{k+\dot{k}+\bar{k}}{2}} \\
 A_{m_1,\dot{m}_1,\bar{m}_1} &= \sqrt{(m_1+\frac{1}{2})(\dot{m}_1+\frac{1}{2})(\bar{m}_1+\frac{1}{2})} 2^{\frac{k+\dot{k}+\bar{k}}{2}}
 \end{aligned}$$

En considérant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}
 X &= 2^k x - 2n + 1 & Y &= 2^{\dot{k}} y - 2\dot{n} + 1 & Z &= 2^{\bar{k}} z - 2\bar{n} + 1 \\
 dx &= \frac{1}{2^k} dX & dy &= \frac{1}{2^{\dot{k}}} dY & dz &= \frac{1}{2^{\bar{k}}} dZ
 \end{aligned}$$

l'expression de E_1 devient

$$\begin{aligned}
 E_1 &= A_{m,\dot{m},\bar{m}} A_{m_1,\dot{m}_1,\bar{m}_1} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{\dot{k}}} \frac{1}{2^{\bar{k}}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{P}_m(X) \bar{P}_{\dot{m}}(Y) \bar{P}_{\bar{m}}(Z) \bar{P}_{m_1}(X) \bar{P}_{\dot{m}_1}(Y) \bar{P}_{\bar{m}_1}(Z) dX dY dZ \\
 &= A_{m,\dot{m},\bar{m}} A_{m_1,\dot{m}_1,\bar{m}_1} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{\dot{k}}} \frac{1}{2^{\bar{k}}} \int_{-1}^1 \bar{P}_m(X) \bar{P}_{m_1}(X) dX \int_{-1}^1 \bar{P}_{\dot{m}}(Y) \bar{P}_{\dot{m}_1}(Y) dY \int_{-1}^1 \bar{P}_{\bar{m}}(Z) \bar{P}_{\bar{m}_1}(Z) dZ
 \end{aligned}$$

En tenant compte de l'orthogonalité des polynomes de Legendre

$$E_1 = 0, \quad \text{Si } m \neq m_1 \text{ ou } \dot{m} \neq \dot{m}_1 \text{ ou } \bar{m} \neq \bar{m}_1$$

$$\begin{aligned}
 E_1 &= A_{m,\dot{m},\bar{m}} A_{m_1,\dot{m}_1,\bar{m}_1} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{\dot{k}}} \frac{1}{2^{\bar{k}}} \int_{-1}^1 \bar{P}_m(X) \bar{P}_{m_1}(X) dX \int_{-1}^1 \bar{P}_{\dot{m}}(Y) \bar{P}_{\dot{m}_1}(Y) dY \int_{-1}^1 \bar{P}_{\bar{m}}(Z) \bar{P}_{\bar{m}_1}(Z) dZ \\
 &= (A_{m,\dot{m},\bar{m}})^2 \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{\dot{k}}} \frac{1}{2^{\bar{k}}} \frac{2}{2m+1} \frac{2}{2\dot{m}+1} \frac{2}{2\bar{m}+1} \\
 &= 1, \quad \text{Si } m = m_1 \text{ et } \dot{m} = \dot{m}_1 \text{ et } \bar{m} = \bar{m}_1
 \end{aligned}$$

3.2 Approximation d'une fonction $L^2(I)$

On peut généraliser le résultat de la proposition(2.1) à la dimension trois (3D) c'est à dire la famille d'ondelettes(3.1) forme une base de $L^2(I)$, alors toute fonction U de cet espace peut s'écrire de la façon suivante :

$$U(x, y, z) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dot{n}=1}^{2^{\dot{k}-1}} \sum_{\dot{m}=0}^{+\infty} \sum_{\bar{n}=1}^{2^{\bar{k}-1}} \sum_{\bar{m}=0}^{+\infty} C_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}} \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) \quad (3.2)$$

Avec $C_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}} = \langle U, \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}} \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 U(x, y, z) \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) dx dy dz$, tel que $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(I)$.

Pour l'approximation de la fonction U on tronque la série (3.2) , on obtient

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &\approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{\dot{n}=1}^{2^{\dot{k}-1}} \sum_{\dot{m}=0}^{\dot{M}-1} \sum_{\bar{n}=1}^{2^{\bar{k}-1}} \sum_{\bar{m}=0}^{\bar{M}-1} C_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}} \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) \\ &\approx C^T \bullet \Psi(x, y, z) \end{aligned}$$

où C et $\Psi(x, y, z)$ sont des vecteurs de dimension $2^{k-1}M * 2^{\dot{k}-1}\dot{M} * 2^{\bar{k}-1}\bar{M}$ donnés par :

$$\begin{aligned} C &= C_{1,0,1,0,1,0}, \dots, C_{1,0,1,0,1,\bar{M}-1}, C_{1,0,1,0,2,0}, \dots, C_{1,0,1,0,2,\bar{M}-1}, C_{1,0,1,0,2^{\bar{k}-1},0}, \dots, C_{1,0,1,0,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \\ &\dots C_{1,0,1,\dot{M}-1,1,0}, \dots, C_{1,0,1,\dot{M}-1,1,\bar{M}-1}, C_{1,0,1,\dot{M}-1,2,0}, \dots, C_{1,0,1,\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \\ &\dots C_{1,0,2,0,1,0}, \dots, C_{1,0,2,\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \dots, C_{1,0,2^{\dot{k}-1},0,1,0}, \dots, C_{1,0,2^{\dot{k}-1},\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \\ &\dots C_{1,1,1,0,1,0}, \dots, C_{1,1,2^{\dot{k}-1},\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \dots, C_{1,M-1,2^{\dot{k}-1},\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \\ &\dots C_{2,0,1,0,1,0}, \dots, C_{2,0,2^{\dot{k}-1},\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \dots, C_{2^{k-1},0,1,0,1,0}, \dots, C_{2^{k-1},M-1,2^{\dot{k}-1},\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}. \\ \Psi &= \Psi_{1,0,1,0,1,0}, \dots, \Psi_{1,0,1,0,1,\bar{M}-1}, \Psi_{1,0,1,0,2,0}, \dots, \Psi_{1,0,1,0,2,\bar{M}-1}, \Psi_{1,0,1,0,2^{\bar{k}-1},0}, \dots, \Psi_{1,0,1,0,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \\ &\dots \Psi_{1,0,1,\dot{M}-1,1,0}, \dots, \Psi_{1,0,1,\dot{M}-1,1,\bar{M}-1}, \Psi_{1,0,1,\dot{M}-1,2,0}, \dots, \Psi_{1,0,1,\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \\ &\dots \Psi_{1,0,2,0,1,0}, \dots, \Psi_{1,0,2,\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \dots, \Psi_{1,0,2^{\dot{k}-1},0,1,0}, \dots, \Psi_{1,0,2^{\dot{k}-1},\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \\ &\dots \Psi_{1,1,1,0,1,0}, \dots, \Psi_{1,1,2^{\dot{k}-1},\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \dots, \Psi_{1,M-1,2^{\dot{k}-1},\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \\ &\dots \Psi_{2,0,1,0,1,0}, \dots, \Psi_{2,0,2^{\dot{k}-1},\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}, \dots, \Psi_{2^{k-1},0,1,0,1,0}, \dots, \Psi_{2^{k-1},M-1,2^{\dot{k}-1},\dot{M}-1,2^{\bar{k}-1},\bar{M}-1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.3 Les formules théoriques d'intégration

Dans cette section on va développer les calculs formels nécessaires à la détermination des 3 matrices

3.3.1 Formule d'intégration par rapport à la variable x

Proposition 3.2 *L'intégrale sur l'intervalle $[0, x]$ de la fonction vectorielle $\Psi(x, y, z)$, est donnée par :*

Si $m = 0$,

$$\begin{aligned} & \int_0^x \Psi_{n,0,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(\tau, y, z) d\tau \\ &= \frac{1}{2^k} \begin{cases} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{n,1,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) + \Psi_{n,0,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) \right], & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right[; \\ 0, & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right[\text{ pour } \hat{n} = 1, \dots, n-1, \\ 2\Psi_{\hat{n},0,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z), & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right[\text{ pour } \hat{n} = n+1, \dots, 2^{k-1}. \end{cases} \quad (\alpha_x) \end{aligned}$$

Si $1 \leq m \leq M-2$

$$\begin{aligned} & \int_0^x \Psi_{n,m,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(\tau, y, z) d\tau \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2^k \sqrt{2m+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{2m+3}} \Psi_{n,m+1,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \Psi_{n,m-1,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) \right], & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right[; \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\beta_x) \end{aligned}$$

Si $m = M-1$

$$\begin{aligned} & \int_0^x \Psi_{n,M-1,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(\tau, y, z) d\tau \\ &\simeq \begin{cases} -\frac{1}{2^k \sqrt{2M-1}} \frac{1}{\sqrt{2M-3}} \Psi_{n,M-2,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z), & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right[; \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\gamma_x) \end{aligned}$$

où $y \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right]$ et $z \in \left[\frac{\bar{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\bar{n}}{2^{k-1}} \right]$.

Preuve. On intègre $\Psi(x, y, z)$ sur l'intervalle $[0, x]$. ■

Pour $m = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \Psi_{n,0,\hat{n},\bar{m},\bar{n},\bar{m}}(\tau, y, z) d\tau \\
&= A_{0,\hat{m},\bar{m}} P_{\hat{m}}(y) P_{\bar{m}}(z) \begin{cases} \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^x P_0(\tau) d\tau, & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]; \\ 0, & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right] \text{ pour } \hat{n} = 1, \dots, n-1; \\ \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} P_0(\tau) d\tau, & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right] \text{ pour } \hat{n} = n+1, \dots, 2^{k-1}. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}(\hat{m}+\frac{1}{2})(\bar{m}+\frac{1}{2})} 2^{\frac{k+\hat{k}+\bar{k}}{2}} P_{\hat{m}}(y) P_{\bar{m}}(z) [\tau]_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^x, & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]; \\ 0, & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right] \text{ pour } \hat{n} = 1, \dots, n-1; \\ \sqrt{\frac{1}{2}(\hat{m}+\frac{1}{2})(\bar{m}+\frac{1}{2})} 2^{\frac{k+\hat{k}+\bar{k}}{2}} P_{\hat{m}}(y) P_{\bar{m}}(z) [\tau]_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}}, & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right] \text{ pour } \hat{n} = n+1, \dots, 2^{k-1}. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2^k} \sqrt{\frac{1}{2}(\hat{m}+\frac{1}{2})(\bar{m}+\frac{1}{2})} 2^{\frac{k+\hat{k}+\bar{k}}{2}} P_{\hat{m}}(y) P_{\bar{m}}(z) \times (2^k x - 2n + 1 + 1), & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]; \\ 0, & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right] \text{ pour } \hat{n} = 1, \dots, n-1; \\ \frac{1}{2^{k-1}} \sqrt{\frac{1}{2}(\hat{m}+\frac{1}{2})(\bar{m}+\frac{1}{2})} 2^{\frac{k+\hat{k}+\bar{k}}{2}} P_{\hat{m}}(y) P_{\bar{m}}(z) \times 1, & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right] \text{ pour } \hat{n} = n+1, \dots, 2^{k-1}. \end{cases} \\
&= \frac{1}{2^k} \begin{cases} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{n,1,\hat{n},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) + \Psi_{n,0,\hat{n},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) \right], & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]; \\ 0, & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right] \text{ pour } \hat{n} = 1, \dots, n-1; \\ 2\Psi_{\hat{n},0,\hat{n},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z), & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right] \text{ pour } \hat{n} = n+1, \dots, 2^{k-1}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour $1 \leq m \leq M-2$ on obtient

$$\int_0^x \Psi_{n,m,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(\tau, y, z) d\tau$$

$$= A_{m,\hat{m},\bar{m}} P_{\hat{m}}(y) P_{\bar{m}}(z) \left\{ \begin{array}{ll} \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^x P_m(\tau) d\tau, & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right[; \\ 0, & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right[\text{ pour } \hat{n} = 1, \dots, n-1; \\ \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} P_m(\tau) d\tau, & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right[\text{ pour } \hat{n} = n+1, \dots, 2^{k-1}. \end{array} \right.$$

$$\int_0^x \Psi_{n,m,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(\tau, y, z) d\tau$$

$$= A_{m,\hat{m},\bar{m}} P_{\hat{m}}(y) P_{\bar{m}}(z) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2^k(2m+1)} [P_{m+1}(\tau) - P_{m-1}(\tau)]_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^x, & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right[; \\ 0, & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right[\text{ pour } \hat{n} = 1, \dots, n-1; \\ \frac{1}{2^k(2m+1)} [P_{m+1}(\tau) - P_{m-1}(\tau)]_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}}, & x \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right[\text{ pour } \hat{n} = n+1, \dots, 2^{k-1}. \end{array} \right.$$

On a d'après la proposition(1.1)

$$[P_{m+1}(\tau) - P_{m-1}(\tau)]_{\frac{n-1}{2^{k-1}}} = \bar{P}_{m+1}(-1) - \bar{P}_{m-1}(-1) = 0,$$

$$[P_{m+1}(\tau) - P_{m-1}(\tau)]_{\frac{n}{2^{k-1}}} = \bar{P}_{m+1}(1) - \bar{P}_{m-1}(1) = 0.$$

Alors on aura

$$\int_0^x \Psi_{n,m,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(\tau, y, z) d\tau$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2^k \sqrt{2m+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{2m+3}} \Psi_{n,m+1,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \Psi_{n,m-1,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) \right], & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right[; \\ 0, & \text{ailleurs} \end{array} \right.$$

Pour Si $m = M - 1$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^x \Psi_{n,M-1,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(\tau, y, z) d\tau \\ \simeq & \begin{cases} \frac{1}{2^k \sqrt{2M-1}} \left[\frac{1}{\sqrt{2M+1}} \Psi_{n,M,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{2M-3}} \Psi_{n,M-2,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) \right], & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right[; \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\Psi_{n,M,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z)$ ne figure pas dans le vecteur $\{\Psi(x, y, z)\}$, on approche alors cette intégrale par :

$$\begin{aligned} & \int_0^x \Psi_{n,M-1,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(\tau, y, z) d\tau \\ \simeq & \begin{cases} -\frac{1}{2^k \sqrt{2M-1}} \frac{1}{\sqrt{2M-3}} \Psi_{n,M-2,\hat{n},\hat{m},\bar{n},\bar{m}}(x, y, z), & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right[; \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \end{aligned}$$

3.3.2 Formule d'intégration par rapport à la variable y

Proposition 3.3 *On intègre sur l'intervalle $[0, y]$ la fonction vectorielle $\Psi(x, y, z)$, on trouve*

Si $\hat{m} = 0$,

$$\begin{aligned} & \int_0^y \Psi_{n,m,\hat{n},0,\bar{n},\bar{m}}(x, \tau, z) d\tau \\ = & \frac{1}{2^{\hat{k}}} \begin{cases} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{n,m,\hat{n},1,\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) + \Psi_{n,m,\hat{n},0,\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) \right], & y \in \left[\frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \right[; \\ 0, & , y \in \left[\frac{\hat{n}'-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}'}{2^{k-1}} \right[\text{ pour } \hat{n}' = 1, \dots, \hat{n} - 1 ; \\ 2\Psi_{n,m,\hat{n}',0,\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) , & y \in \left[\frac{\hat{n}'-1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}'}{2^{k-1}} \right[\text{ pour } \hat{n}' = n + 1, \dots, 2^{\hat{k}-1}. \end{cases} \quad (\alpha_y) \end{aligned}$$

Si $2 \leq \hat{m} \leq \hat{M} - 2$, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^y \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}}(x, \tau, z) d\tau \\
 = & \begin{cases} \frac{1}{2^k \sqrt{2\dot{m}+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\dot{m}+3}} \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m}+1,\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{2\dot{m}-1}} \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m}-1,\bar{n},\bar{m}}(x, y, z) \right], & y \in \left[\frac{\dot{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\dot{n}}{2^{k-1}} \right]; \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\beta y)
 \end{aligned}$$

Si $\dot{m} = \dot{M} - 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^y \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{M}-1,\bar{n},\bar{m}}(x, \tau, z) d\tau \\
 \simeq & \begin{cases} -\frac{1}{2^k \sqrt{2\dot{M}-1}} \frac{1}{\sqrt{2\dot{M}-3}} \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{M}-2,\bar{n},\bar{m}}(x, y, z), & y \in \left[\frac{\dot{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\dot{n}}{2^{k-1}} \right]; \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\gamma y)
 \end{aligned}$$

où $x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]$ et $z \in \left[\frac{\bar{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\bar{n}}{2^{k-1}} \right]$;

Preuve. on suit les mêmes étapes de la preuve de la proposition(3.2). ■

3.3.3 Formule d'intégration par rapport à la variable z

Proposition 3.4 *On intègre sur l'intervalle $[0, z]$ la fonction vectorielle $\Psi(x, y, z)$, on trouve*

Si $\bar{m} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^z \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},0}(x, y, \tau) d\tau \\
 = & \begin{cases} \frac{1}{2^k} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},1}(x, y, z) + \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},0}(x, y, z) \right], & z \in \left[\frac{\bar{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\bar{n}}{2^{k-1}} \right]; \\ 0, & \hat{n}^- = 1, \dots, \dot{n} - 1, z \in \left[\frac{\hat{n}^- - 1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}^-}{2^{k-1}} \right]; \\ \frac{1}{2^k} 2 \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\hat{n}^-,0}(x, y, z), & \hat{n}^- = n + 1, \dots, 2^{\bar{k}-1}, z \in \left[\frac{\hat{n}^- - 1}{2^{k-1}}, \frac{\hat{n}^-}{2^{k-1}} \right]. \end{cases} \quad (\alpha z)
 \end{aligned}$$

Si $2 \leq \bar{m} \leq \bar{M} - 2$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^z \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}}(x,y,\tau) d\tau \\
= & \begin{cases} \frac{1}{2^k \sqrt{2\bar{m}+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\bar{m}+3}} \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}+1}(x,y,z) - \frac{1}{\sqrt{2\bar{m}-1}} \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{m}-1}(x,y,z) \right], & z \in \left[\frac{\bar{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\bar{n}}{2^{k-1}} \right]; \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\beta z)
\end{aligned}$$

Si $\bar{m} = \bar{M} - 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^z \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{M}-1}(x,y,\tau) d\tau \\
\simeq & \begin{cases} -\frac{1}{2^k \sqrt{2\bar{M}-1}} \frac{1}{\sqrt{2\bar{M}-3}} \Psi_{n,m,\dot{n},\dot{m},\bar{n},\bar{M}-2}(x,y,z), & z \in \left[\frac{\bar{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\bar{n}}{2^{k-1}} \right]; \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\gamma z)
\end{aligned}$$

où $x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]$ et $y \in \left[\frac{\dot{n}-1}{2^{k-1}}, \frac{\dot{n}}{2^{k-1}} \right];$

Preuve. on suit les mêmes étapes de la preuve de la proposition(3.2). ■

3.4 Les matrices opérationnelles d'intégration

3.4.1 Détermination de La matrice d'intégration P_x

Les formules d'intégration (αx) , (βx) et (γx) s'expriment comme :

$$\int_0^x \Psi(\tau, y, z) d\tau = P_x \Psi(x, y, z)$$

où P_x est la matrice opérationnelle d'intégration de dimension

$$\left(2^{k-1} 2^{\dot{k}-1} 2^{\bar{k}-1} M \dot{M} \bar{M} \right) \times \left(2^{k-1} 2^{\dot{k}-1} 2^{\bar{k}-1} M \dot{M} \bar{M} \right).$$

Pour le calcul de cette matrice, on prend $M = \dot{M} = \bar{M} = 3$ et $k = \dot{k} = \bar{k} = 2$ c'est à dire $n = 1, 2$ et $m, \dot{m}, \bar{m} = 0, 1, 2$. P_x est de dimension $(216) \times (216)$ définie comme suit :

$$P_x = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} I_{36} & \frac{1}{\sqrt{3}}I_{36} & \dot{O}_{36} & 2I_{36} & \dot{O}_{36} & \dot{O}_{36} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}I_{36} & \dot{O}_{36} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_{36} & \dot{O}_{36} & \dot{O}_{36} & \dot{O}_{36} \\ \dot{O}_{36} & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_{36} & \dot{O}_{36} & \dot{O}_{36} & \dot{O}_{36} & \dot{O}_{36} \\ \dot{O}_{36} & \dot{O}_{36} & \dot{O}_{36} & I_{36} & \frac{1}{\sqrt{3}}I_{36} & \dot{O}_{36} \\ \dot{O}_{36} & \dot{O}_{36} & \dot{O}_{36} & -\frac{1}{\sqrt{3}}I_{36} & \dot{O}_{36} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_{36} \\ \dot{O}_{36} & \dot{O}_{36} & \dot{O}_{36} & \dot{O}_{36} & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_{36} & \dot{O}_{36} \end{bmatrix}$$

En généralisant, on obtient

$$P_x = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} L & F & F & \cdots & F \\ O & L & F & \cdots & F \\ O & O & L & \cdots & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & F \\ O & O & O & \cdots & L \end{bmatrix}$$

telles que O et $\dot{O}$ sont les matrices zéro de dimensions $\left(2^{\bar{k}-1}2^{\bar{k}-1}M\dot{M}\bar{M}\right) \times \left(2^{\bar{k}-1}2^{\bar{k}-1}M\dot{M}\bar{M}\right)$ et $\left(2^{\bar{k}-1}2^{\bar{k}-1}\dot{M}\bar{M}\right) \times \left(2^{\bar{k}-1}2^{\bar{k}-1}\dot{M}\bar{M}\right)$ respectivement. F, L sont des matrices carrées de dimension $\left(2^{\bar{k}-1}2^{\bar{k}-1}M\dot{M}\bar{M}\right) \times \left(2^{\bar{k}-1}2^{\bar{k}-1}M\dot{M}\bar{M}\right)$ définies comme suit :

$$F = \begin{bmatrix} 2I_H & \dot{O} & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \\ \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \\ \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dot{O} \\ \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \end{bmatrix}; H = 2^{\bar{k}-1}2^{\bar{k}-1}\dot{M}\bar{M}$$

$$L = \begin{bmatrix} I_H & \frac{1}{\sqrt{3}}I_H & \dot{O} & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}I_H & \dot{O} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_H & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \\ \dot{O} & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_H & \dot{O} & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}}I_H & \cdots & \dot{O} \\ \dot{O} & \dot{O} & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}}I_H & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{2M-5}\sqrt{2M-3}}I_H & \ddots & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}}I_H \\ \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & -\frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}}I_H & \dot{O} \end{bmatrix}.$$

3.4.2 Détermination de La matrice d'intégration P_y

Les formules d'intégration (αy) , (βy) et (γy) s'expriment comme :

$$\int_0^y \Psi(x, \tau, z) d\tau = P_y \Psi(x, y, z)$$

où P_y est la matrice opérationnelle d'intégration de dimension $\left(2^{k-1}2^{\dot{k}-1}2^{\bar{k}-1}M\dot{M}\bar{M}\right) \times \left(2^{k-1}2^{\dot{k}-1}2^{\bar{k}-1}M\dot{M}\bar{M}\right)$.

Pour le calcul de cette matrice, on prend $M = \dot{M} = 3$, $\bar{M} = 4$ et $k = \dot{k} = \bar{k} = 2$ c'est à dire $n = 1, 2$ et $m, \dot{m} = 0, 1, 2$, $\bar{m} = 0, 1, 2, 3$. P_y est de dimension $(288) \times (288)$ définie comme suit :

$$P_y = \frac{1}{2^{\bar{k}}} \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} I_6 & \frac{1}{\sqrt{3}}I_6 & 0_6 & 0_6 & 2I_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}I_6 & 0_6 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{3}}I_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 \\ 0_6 & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{3}}I_6 & 0_6 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & 0_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 \\ 0_6 & 0_6 & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}}I_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 \\ 0_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 & I_6 & \frac{1}{\sqrt{3}}I_6 & 0_6 & 0_6 \\ 0_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 & -\frac{1}{\sqrt{3}}I_6 & 0_6 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{3}}I_6 & 0_6 \\ 0_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{3}}I_6 & 0_6 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}}I_6 \\ 0_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 & 0_6 & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}}I_6 & 0_6 \end{bmatrix};$$

$$\dim D = \dim 0 = 48 \times 48$$

En généralisant, on obtient

$$P_y = \frac{1}{2^{\bar{k}}} \begin{bmatrix} D & O & O & \dots & O \\ O & D & O & \dots & O \\ O & O & D & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & D \end{bmatrix}$$

telle que O la matrice zéro et D est la matrice carrée de dimension $\left(2^{\bar{k}-1}2^{\bar{k}-1}\dot{M}\bar{M}\right) \times \left(2^{\bar{k}-1}2^{\bar{k}-1}\dot{M}\bar{M}\right)$, définies comme suit :

$$D = \begin{bmatrix} L & F & F & \cdots & F \\ 0 & L & F & \cdots & F \\ 0 & 0 & L & \cdots & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & F \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & L \end{bmatrix}; \dim D = \left(2^{\bar{k}-1}2^{\bar{k}-1}\dot{M}\bar{M}\right) \times \left(2^{\bar{k}-1}2^{\bar{k}-1}\dot{M}\bar{M}\right)$$

$$F = \begin{bmatrix} 2I_N & \dot{O} & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \\ \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \\ \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dot{O} \\ \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \end{bmatrix}; \dim N, \dot{O} = \left(2^{\bar{k}-1}\bar{M}\right) \times \left(2^{\bar{k}-1}\bar{M}\right)$$

$$L = \begin{bmatrix} I_N & \frac{1}{\sqrt{3}}I_N & \dot{O} & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}I_N & \dot{O} & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_N & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \\ \dot{O} & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}I_N & \dot{O} & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}}I_N & \cdots & \dot{O} \\ \dot{O} & \dot{O} & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}}I_H & \dot{O} & \cdots & \dot{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{2\dot{M}-5}\sqrt{2\dot{M}-3}}I_N & \ddots & \frac{1}{\sqrt{2\dot{M}-3}\sqrt{2\dot{M}-1}}I_N \\ \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & \dot{O} & -\frac{1}{\sqrt{2\dot{M}-3}\sqrt{2\dot{M}-1}}I_N & \dot{O} \end{bmatrix}.$$

3.4.3 Détermination de La matrice d'intégration P_z

Les formules d'intégration (αz) , (βz) et (γz) s'expriment comme :

$$\int_0^z \Psi(x, y, \tau) d\tau = Pz\Psi(x, y, z)$$

où P_z est la matrice opérationnelle d'intégration de dimension $\left(2^{k-1}2^{\bar{k}-1}2^{\bar{k}-1}M\dot{M}\bar{M}\right) \times \left(2^{k-1}2^{\bar{k}-1}2^{\bar{k}-1}M\dot{M}\bar{M}\right)$.

Pour le calcul de cette matrice, on prend $M = \dot{M} = 3$, $\bar{M} = 4$ et $k = \bar{k} = \bar{k} = 2$ c'est à dire $n = 1, 2$ et $m, \dot{m} = 0, 1, 2$, $\bar{m} = 0, 1, 2, 3$. P_z est de dimension $(288) \times (288)$ définie comme suit :

telle que 0 est la matrice zéro de dimension $\left(2^{\bar{k}-1}\bar{M}\right) \times \left(2^{\bar{k}-1}\bar{M}\right)$, et L est la matrice

carrée de dimension $\left(2^{\bar{k}-1}\bar{M}\right) \times \left(2^{\bar{k}-1}\bar{M}\right)$ définie comme suit

$$P_z = \frac{1}{2^{\bar{k}}} \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix};$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & 0 \end{bmatrix}; \dim L = 8 \times 8$$

En généralisant, on obtient

$$L = \begin{bmatrix} D & F & F & \cdots & F \\ 0 & D & F & \cdots & F \\ 0 & 0 & D & \cdots & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & F \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D \end{bmatrix}; \text{ et } \dim F = \dim D = \bar{M} \times \bar{M}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2\bar{M}-5}\sqrt{2\bar{M}-3}} & \ddots & \frac{1}{\sqrt{2\bar{M}-3}\sqrt{2\bar{M}-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2\bar{M}-3}\sqrt{2\bar{M}-1}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Perspectives

1- Pour les problèmes stationnaires en $(3D)$, on pense pouvoir généraliser la méthode de Imran Aziz, Siraj-ul-Islam, Bozidan Sarler [2] et de Fukang Yin and Junqiang Song [1] .

2- Pour les problèmes d'évolution, on peut combiner entre la méthode des différences finies (pour approcher la dérivée temporelle) et la méthode sus citée pour l'espace.

Bibliographie

- [1] Fukang Yin and Junqiang Song : Solving Linear PDEs with the Aid of TwoDimensional Legendre Wavelets, School of computer, National University of defense technology Changsha China ,junqiang@nudt.edu.cn. The authors - Published by Atlantis Press(2012).
- [2] Imran Aziz, Siraj-ul-Islam, Bozidan Sarler : Wavelets collocation methods for the numerical solution of elliptic BV problems. Appiplied Mathematical Modeling 37(2013).676-694.
- [3] Melle.Bouزيد Leila : La Modélisation Mathématique et Simulation numérique de transmission de l'épidémie de Dengue.Mémoire de Master en Mathématiques.15,16 (2013).
- [4] M. Razzaghi & S. Yousefi : The Legendre wavelets operational matrix of integration,International Journal of Systems Science,(2001) 32 :4, 495-502.
- [5] PERSIAN : National Conference on Information Technology and Computer Science (CITCS 2012).
- [6] REBIAI Belgacem : Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse.Thèse de doctorat en sciences.(2010)