REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS – MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

THESE DE DOCTORAT

=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−*o* ◯ *o*−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=−=

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulée

EQUATIONS DIFFERENTIELLES COMPLEXES DANS LE PLAN ET DANS LE DISQUE UNITE

Présentée par : **LATREUCH Zinelâabidine**

Soutenue le : devant le jury composé de :

Président : Dr BENDOUKHA Berrabah (Professeur à l'université de Mostaganem).
Examinateur : Dr TERBECHE Mekki (Professeur à l'université d'Oran Es-sénia).
Examinateur : Dr BENCHOHRA Mouffak (Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès).
Examinateur : Dr MEDEGHRI Ahmed (Professeur à l'université de Mostaganem).
Examinateur : Dr HAMOUDA Saada (Maître de Conférences A à l'université de Mostaganem).
Encadreur : Dr BELAÏDI Benharrat (Professeur à l'université de Mostaganem).

Remerciements

Au nom du Dieu clément et miséricordieux !
Je rends grâce au très haut d'avoir guidé mes pas vers mon très cher professeur Belaïdi Benharrat qui m'a fait l'honneur de m'encadrer dans la préparation de cette thèse.
Je le remercie pour ses précieux conseils et pour m'avoir consacré son temps sans compter.
En premier lieu c'est à lui qui je dédie ce travail avec toute ma gratitude.
Mes remerciements les plus sincères vont à mon professeur Bendoukha Berrabah qui m'a honoré en acceptant d'être président du jury. Je lui suis aussi très reconnaissant pour tous ses conseils pertinents pendant ma formation.
J'exprime ma très profonde reconnaissance aux examinateurs Benchohra Mouffak, Terbeche Mekki, Medeghri Ahmed, et Hamouda Saada qui me font l'honneur de juger ce travail.
Je dédie ce travail à :
*A mes deux grandes mères ravies à mon affection.
*Mon grand père,
*Mes très chers parents,
*A mes oncles, à mes tantes, à mon frère, à mes sœurs et à toute ma famille,
*A Mon ami Abdallah El Farissi.

Table des matières

Introduction **3**

1 La théorie de R. Nevanlinna **6**
1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna . . . 6
1.2 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction entière ou méromorphe 7
1.2.1 L'ordre et le type de croissance d'une fonction . . . 7
1.2.2 L'exposant de convergence des zéros . . . 9
1.2.3 La notion d'ordre p-itératif d'une fonction . . . 10
1.3 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction analytique ou méromorphe dans le disque unité . . . 12

2 Quelques estimations sur l'ordre et le type de croissance des fonctions méromorphes dans le plan complexe **17**
2.1 Introduction et résultats . . . 17
2.2 Lemmes préliminaires . . . 20
2.3 Preuve du Théorème 2.1. . . . 20
2.4 Preuve du Théorème 2.2. . . . 21
2.5 Preuve du Théorème 2.3. . . . 22
2.6 Preuve du Théorème 2.4. . . . 23
2.7 Preuve du Théorème 2.5. . . . 23

3 La croissance des dérivées logarithmiques des fonctions méromorphes **24**
3.1 Introduction et résultats . . . 24
3.2 Applications aux équations différentielles . . . 27
3.3 Lemmes préliminaires . . . 28
3.4 Preuve du Théorème 3.1. . . . 29
3.5 Preuve du Corollaire 3.2. . . . 31
3.6 Preuve du Théorème 3.2. . . . 32
3.7 Preuve du Corollaire 3.4. . . . 33
3.8 Preuve du Théorème 3.3. . . . 33
3.9 Preuve du Théorème 3.4. . . . 34

4 Croissance et oscillation des polynômes différentiels d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes **35**
4.1 Introduction et résultats . . . 35
4.2 Lemmes préliminaires . . . 39
4.3 Preuve du Théorème 4.1. . . . 40

4.4 Preuve du Théorème 4.2. 42
4.5 Preuve du Corollaire 4.3. 43
4.6 Preuve du Corollaire 4.4. 43
4.7 Discussions et applications 44
4.8 Preuve du Théorème 4.3. 46
4.9 Preuve du Théorème 4.4. 47

5 Croissance et oscillation de combinaison des solutions de certaines équations différentielles 49
5.1 Introduction et résultats 49
5.2 Lemmes préliminaires 51
5.3 Preuve du Théorème 5.1. 52
5.4 Preuve du Théorème 5.2. 54
5.5 Preuve du Théorème 5.3. 54
5.6 Preuve du Théorème 5.4. 55

6 Croissance et oscillation des polynômes différentiels à coefficients fonctions analytiques dans le disque unité 56
6.1 Introduction et résultats 56
6.2 Sur le cas d'ordre infini 57
6.3 Sur le cas d'ordre fini 59
6.4 Lemmes préliminaires 61
6.5 Preuve du Théorème 6.1. 64
6.6 Preuve du Théorème 6.2. 65
6.7 Preuve du Corollaire 6.1. 65
6.8 Preuve du Théorème 6.3. 66
6.9 Preuve du Théorème 6.4. 66

7 Equations différentielles complexes à coefficients fonctions analytiques d'ordre $[p, q]$ dans le disque unité 68
7.1 Introduction et résultats 68
7.2 Lemmes préliminaires 71
7.3 Preuve du Théorème 7.1. 73
7.4 Preuve du Théorème 7.2. 74
7.5 Preuve du Théorème 7.3. 75
7.6 Preuve du Théorème 7.4. 76

8 Comparaison entre les solutions de deux équations différentielles 78
8.1 Introduction et résultats 78
8.2 Lemmes préliminaires 81
8.3 Preuve du Théorème 8.1. 82
8.4 Preuve du Théorème 8.2. 83
8.5 Preuve du Théorème 8.3. 84
8.6 Preuve du Théorème 8.4. 85
8.7 Preuve du Théorème 8.5. 85
8.8 Preuve du Théorème 8.6. 85

9 Sur les zéros des solutions et leurs dérivées des équations différentielles non-homogènes 87
9.1 Introduction et résultats 87
9.2 Lemmes préliminaires 90
9.3 Preuve du Théorème 9.1. 91
9.4 Preuve du Théorème 9.2. 93
9.5 Preuve du Théorème 9.3. 93
9.6 Preuve du Théorème 9.4. 94
9.7 Preuve du Théorème 9.5. 94
9.8 Preuve du Corollaire 9.1. 95

10 Oscillation des solutions et leurs dérivées des équations différentielles non-homogènes dans le disque unité 96
10.1 Introduction et résultats 96
10.2 Lemmes préliminaires 98
10.3 Preuve du Théorème 10.1. 99
10.4 Preuve du Théorème 10.2. 100
10.5 Preuve du Théorème 10.3. 100
10.6 Preuve du Théorème 10.4. 102

Bibliographie 105

Introduction

La théorie de Nevanlinna est un outil incontournable dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes notamment la croissance et l'oscillation des solutions. En effet depuis 1925, l'année où R. Navanlinna a publié les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, les chercheurs ne cessent de publier dans la même thématique et plusieurs problèmes ont été étudiés et résolus. Des liens étroits avec d'autres domaines sont mis en évidence, en particulier avec la théorie analytique des équations différentielles. Pour une introduction à la théorie des équations différentielles dans le plan complexe avec la théorie de Nevanlinna voir [47, 68] .

Une recherche active dans ce domaine a été lancée par H. Wittich et ses étudiants dans les années 1950 et 1960. Un des résultats importants dû à Wittich concernant la croissance des solutions des équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_1f' + A_0f = 0$$

est le suivant : *Les coefficients* $A_0, ..., A_{k-1}$ *sont des polynômes, si et seulement, si toutes les solutions de l'équation précédente sont des fonctions entières d'ordre fini de la croissance.* M. Frei a généralisé le résultat ci-dessus, en supposant que A_j est le dernier coefficient transcendant tandis que tous les coefficients $A_{j+1}, ..., A_{k-1}$ sont des polynômes, et il a démontré que l'équation possède au plus j solutions linéairement indépendantes d'ordre fini.

Cette thèse se compose d'une introduction et de dix chapitres.

Dans le premier chapitre, on va citer quelques notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans les autres chapitres, on peut considérer ce chapitre comme une introduction à la théorie de Nevanlinna, on va aussi citer quelques théorèmes et définitions concernant la distribution des valeurs des fonctions analytiques dans le disque unité.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude des propriétés de l'ordre et du type de croissance des fonctions méromorphes dans le plan complexe et on donne de nouveaux critères pour faciliter la détermination de l'ordre et le type de ces fonctions. On va aussi faire la comparaison entre les résultats obtenus pour les fonctions méromorphes et les fonctions entières dans le plan complexe. Les résultats obtenus dans ce chapitre, seront appliqués dans la plupart des chapitres qui suivent de cette thèse.

Dans le troisième chapitre, on va prouver quelques estimations sur la croissance des dérivées logarithmiques des fonctions méromorphes et entières et leurs applications dans la théorie des équations différentielles, on va donner également quelques exemples pour expliquer l'éxactitude de nos résultats.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de la contrôlabilité des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + A(z) f = 0 \ \ (k \geqslant 2).$$

On va étudier la croissance et l'oscillation du polynôme différentiel d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes. Les théorèmes obtenus dans ce chapitre améliorent certains résultats de Laine et Rieppo ([49]) , Liu Ming-Sheng et Zhang Xiao-Mei ([63]) et Wang et Yi ([77]) .

Le but du cinquième chapitre est d'étudier les propriétés des solutions des équations différentielles linéaires de type

$$f'' + A(z) f = 0.$$

En fait, on va étudier la croissance et l'oscillation de $g_f = d_1 f_1 + d_2 f_2$ où f_1, f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation ci-dessus, et d_1, d_2 sont des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles.

Dans le sixième chapitre, on considère l'équation différentielle

$$f'' + A_1(z) f' + A_0(z) f = F,$$

où $A_0 \not\equiv 0$, A_1 et F sont des fonctions analytiques dans le disque unité $\Delta = \{z : |z| < 1\}$. Nous obtenons des résultats sur l'ordre et l'exposant de convergence des zéros dans Δ des polynômes différentiels $g_f = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ à coefficients fonctions analytiques d_2, d_1, d_0 non toutes identiquement nulles. On va aussi répondre à la question posée par J. Tu et C. F. Yi en 2008 ([71]) dans le cas des équations différentielles linéaires du second ordre dans le disque unité.

Dans le septième chapitre, on s'intéresse à l'étude des équations différentielles linéaires complexes d'ordre supérieur dans lesquelles les coefficients sont des fonctions analytiques dans le disque unité d'ordre $[p, q]$. Le but de ce chapitre est d'utiliser les concepts des fonctions analytiques dans le disque unité d'ordre $[p, q]$ et de type $[p, q]$ pour obtenir plusieurs théorèmes sur la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles.

Le but principal du chapitre huit est d'étudier la contrôlabilité des solutions d'une paire d'équations différentielles linéaires

$$f'' + A(z) f = 0$$

et

$$g'' + B(z) g = 0.$$

On va étudier la croissance et l'oscillation de $w = d_1 f + d_2 g$, où f, g sont les solutions des équations ci-dessus et d_1, d_2 sont des fonctions entières d'ordre fini. Les théorèmes obtenus dans ce chapitre généralisent les résultats obtenus dans le cinquième chapitre.

Le neuvième chapitre est consacré à l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions et de leurs dérivées des équations de type

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = F(z),$$

où $A(z), B(z) (\not\equiv 0)$ et $F(z) (\not\equiv 0)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini.

Dans le dernier chapitre, on va étudier l'oscillation des solutions et leurs dérivées des équations différentielles

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = F(z),$$

où $A(z), B(z) (\not\equiv 0)$ et $F(z) (\not\equiv 0)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre $p-$itératif fini dans le disque unité $\Delta = \{z : |z| < 1\}$.

Chapitre 1

La théorie de R. Nevanlinna

On commence par donner quelques définitions, notations et résultats dont on aura besoin par la suite. Pour plus de détails voir ([35] , [47] , [81]).

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Théorème 1.1 *(Formule de Jensen) Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \not\equiv 0, \infty$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ (respectivement $b_1, b_2, ..., b_m$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \ln\frac{r}{|a_j|}.$$

Définition 1.1 *Pour tout réel $x \geq 0$, on définit*

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, & x > 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Il est clair que

$$\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x},\ \ x \geq 0.$$

Définition 1.2 ***(Fonction caractéristique de R.Nevanlinna)*** ([35] , [47]) *Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$. Chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$. On définit*

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f)\log r, \qquad a \neq \infty$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f)\log r,$$

$N(r, f)$ est appelée la fonction de comptage de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$. On définit

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta,\ \ a \neq \infty$$

et
$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta.$$
$m(r,f)$ *est appelée fonction de proximité de la fonction* f *au point* a.

Définition 1.3 *([35]) On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction* f *par*
$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Exemple 1.1 *Pour la fonction* $f(z) = e^z$, *on a*
$$n(t,f) = 0 \text{ et } N(r,f) = 0.$$
De plus
$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|e^{r\cos\theta + ir\sin\theta}\right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta d\theta = \frac{r}{2\pi} 2\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$
D'où
$$T(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

Théorème 1.2 ***(Premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna dans le plan complexe)*** ([35], [47]) *Soit* f *une fonction méromorphe non constante. Alors pour tout nombre complexe* $a \neq \infty$, *on a*
$$m(r,a,f) + N(r,a,f) = T(r,f) + \varepsilon(r,a),$$
où $\varepsilon(r,a) = O(1)$ *quand* $r \to \infty$.

1.2 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction entière ou méromorphe

1.2.1 L'ordre et le type de croissance d'une fonction

Définition 1.4 ([35], [47], [48], [62]) *Soit* f *une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de* f *sont définis respectivement par*
$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$
$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r},$$
où $M(r,f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$.

Si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis par

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.2 *La fonction $f(z) = \exp\{\exp z^n\}$ est d'ordre $\rho(f) = \infty$ et d'hyper ordre $\rho_2(f) = n$. La fonction $f(z) = \exp\left\{\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right\}$ est d'ordre $\rho(f) = \infty$ et de hyper ordre $\rho_2(f) = \frac{1}{2}$.*

Remarque 1.1 *Si f est d'ordre fini, alors l'hyper ordre de cette fonction est nulle.*

Définition 1.5 ([48]) *Soit f une fonction méromorphe d'ordre ρ $(0 < \rho < \infty)$, on définit le type de f par*

$$\tau(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{T(r,f)}{r^\rho}.$$

Définition 1.6 ([48]) *Soit f une fonction entière d'ordre ρ $(0 < \rho < \infty)$, on définit le type de f par*

$$\tau_M(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log^+ M(r,f)}{r^\rho}.$$

Exemple 1.3 *Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a*

$$\tau(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{T(r,f)}{r^\rho} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{r}{\pi r} = \frac{1}{\pi}$$

et

$$\tau_M(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log^+ M(r,f)}{r^{\rho_M}} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log^+ e^r}{r} = 1.$$

1.2.2 L'exposant de convergence des zéros

Définition 1.7 ([35], [47], [48]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction f respectivement par*

$$\lambda(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

$$\lambda_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right)\log r,$$

tel que $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq r$.

Définition 1.8 ([19], [47]) *On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f respectivement par*

$$\overline{\lambda}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

$$\overline{\lambda}_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(r, \frac{1}{f}\right)\log r,$$

tel que $\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros distincts de la fonction f situés dans le disque $|z| \leqslant r$.

Définition 1.9 ([20], [47]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes de la fonction f respectivement par*

$$\lambda(f - z) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

$$\lambda_2(f - z) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

Définition 1.10 ([20], [47]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes distincts de la fonction f respectivement par*

$$\overline{\lambda}(f - z) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

$$\overline{\lambda}_2\,(f-z)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log\log\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

Exemple 1.4 *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction* $f(z)=e^{e^z}+2$ *sont égaux respectivement à* ∞ *et* 1.

Exemple 1.5 *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction* $f(z)=e^{e^z}+e^z$ *sont égaux respectivement à* ∞ *et* 1.

Exemple 1.6 *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes de la fonction* $f\,(z)=\cos\,(e^z)$ *sont égaux respectivement à* ∞ *et* 1.

1.2.3 La notion d'ordre p-itératif d'une fonction

Si l'ordre d'une fonction entière ou méromorphe est infini, on définit l'hyper ordre de cette fonction.

Pour la définition de l'ordre p-itératif d'une fonction méromorphe, on a besoin de définir les expressions suivantes : pour tout $r\in\mathbb{R}$, on pose $\exp_1 r:=e^r$ et $\exp_{p+1} r:=\exp\left(\exp_p r\right)$, $p\in\mathbb{N}$. De la même façon on définit $\log_1 r:=\log r$ et $\log_{p+1} r:=\log\left(\log_p r\right)$, $p\in\mathbb{N}$ et ceci pour r suffisamment grand.

Définition 1.11 ([45], [48]) *Soit* f *une fonction méromorphe. On définit l'ordre p-itératif de croissance de la fonction* f *par*

$$\rho_p\,(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log_p T(r,f)}{\log r}\quad (p\geqslant 1,\ p\ \textit{entier}),$$

où $T(r,f)$ *est la fonction caractéristique de Nevanlinna. Si* f *est entière, alors l'ordre p-itératif de la fonction* f *est défini par*

$$\rho_p\,(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log r}\quad (p\geqslant 1,\ p\ \textit{entier}),$$

où $M(r,f)=\max\limits_{|z|=r}|f\,(z)|$.

Exemple 1.7 *Pour la fonction* $f\,(z)=\exp_q(z)$, $q\in\mathbb{N}^*$ *on a*

$$\rho_p\,(f)=\begin{cases}+\infty & si\ p<q,\\ 1 & si\ p=q,\\ 0 & si\ p>q.\end{cases}$$

Définition 1.12 ([45], [48]) *L'indice de croissance d'ordre p-itératif d'une fonction méromorphe* f *est définit par*

$$i\,(f)=\begin{cases}0, & si\ f\ est\ rationnelle\\ \min\limits_{j\in\mathbb{N}}\left\{\rho_j\,(f)<+\infty\right\}, & si\ f\ est\ transcendante\\ +\infty, & si\ \rho_j\,(f)=+\infty\ pour\ tout\ j\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Exemple 1.8 *L'indice de croissance d'ordre p-itératif de la fonction*

$$f(z) = \exp_{p-1}(\sin(z))$$

est égal à p.

Définition 1.13 ([48]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant p-itératif de convergence des zéros de la fonction f par*

$$\lambda_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

On définit l'exposant p-itératif de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Définition 1.14 [48] *On définit l'exposant p-itératif de convergence des points fixes d'une fonction méromorphe f par*

$$\lambda_p(f-z) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r},$$

et l'exposant p-itératif de convergence des points fixes distincts de f par

$$\overline{\lambda}_p(f-z) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\log r}.$$

Exemple 1.9 *Pour la fonction $f(z) = \exp_5(z) - \exp_4(z)$ on a $\lambda_5(f) = 1$, $\overline{\lambda}_5(f) = 1$, $\lambda_5(f-z) = 1$, $\overline{\lambda}_5(f-z) = 1$.*

Pour les ensembles, on définit les mesures linéaire et logarithmique, les densités logarithmique inférieure et supérieure :

Définition 1.15 ([36]). *On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, \infty)$ par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble E. La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, \infty)$ est

$$lm(F) = \int_0^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

La densité logarithmique inférieure de l'ensemble F est

$$\underline{\log dens}\,(F) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{lm\,(F\cap[1,r])}{\log r}.$$

La densité logarithmique supérieure de l'ensemble F est

$$\overline{\log dens}\,(F) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{lm\,(F\cap[1,r])}{\log r}.$$

Exemple 1.10 *La mesure linéaire de l'ensemble $E=[2,6]\cup[7,8]\subset[0,\infty)$ est*

$$m\,(E) = \int_0^\infty \chi_{_E}(t)\,dt = \int_2^6 dt + \int_7^8 dt = 5.$$

La mesure linéaire de l'ensemble $E=\mathbb{N}$ est nulle, de plus la mesure linéaire de chaque ensemble dénombrable est nulle.

La mesure logarithmique de l'ensemble $F=[1,5]\subset[1,\infty)$ est

$$lm\,(F) = \int_1^\infty \chi_{_F}(t)\,\frac{dt}{t} = \int_1^5 \frac{dt}{t} = \ln 5.$$

La densité logarithmique inférieure de l'ensemble $F=[5,\infty)$ est

$$\begin{aligned}\underline{\log dens}\,(F) &= \liminf_{r\to+\infty} \frac{lm\,([5,\infty)\cap[1,r])}{\log r}\\ &= \liminf_{r\to+\infty} \frac{lm\,([5,r))}{\log r} = 1.\end{aligned}$$

Définition 1.16 ([75]) *Soit $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière. On définit le terme maximal de $f(z)$ par $\mu(r)=\max\{|a_n|\,r^n; n=0,1,2,...\}$ et on définit l'indice central de la fonction $f(z)$ par $\nu_f(r)=\max\{m;\mu(r)=|a_m|\,r^m\}$.*

Exemple 1.11 *Pour la fonction $f(z)=e^z$, on a $\mu(r)=\frac{1}{[r]!}r^{[r]}$ et $\nu_f(r)=[r]$.*

1.3 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction analytique ou méromorphe dans le disque unité

Dans la suite, on donne les définitions de l'ordre et du type d'une fonction analytique et méromorphe dans le disque unité.

Théorème 1.3 ***(Premier Théorème fondamental de R. Nevanlinna dans le disque unité)*** ([37]) *Soit f une fonction méromorphe non constante sur $\Delta = \{z : |z| < 1\}$. Alors pour tout nombre complexe $a \neq \infty$, on a*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1)$$

quand $r \to 1^-$ où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique de Nevanlinna.

Définition 1.17 ([37]) *Soit f une fonction analytique dans le disque $\Delta = \{z : |z| < 1\}$. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par*

$$\rho_M(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log^+ \log^+ M(r,f)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

$$\rho_{M,2}(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log^+ \log^+ \log^+ M(r,f)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

où $M(r,f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$. Si f est une fonction méromorphe sur Δ, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis par

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log^+ \log^+ T(r,f)}{\log\left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Il existe des fonctions analytiques dans Δ, vérifiant $\rho(f) \neq \rho_M(f)$. Tsuji ([69]) a démontré le théorème suivant :

Théorème 1.4 *Soit f une fonction analytique dans Δ. Alors*

$$\rho(f) \leqslant \rho_M(f) \leqslant \rho(f) + 1.$$

Exemple 1.12 *Pour la fonction $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{(1-z)^2}\right\}$, on a*

$$\rho(f) = 1,\ \rho_M(f) = 2.$$

Par contre, pour la fonction $f(z) = \exp\left\{\frac{z+1}{z-1}\right\}$, on a

$$\rho(f) = \rho_M(f) = 0.$$

Pour l'hyper-ordre des fonctions méromorphes et analytiques T. B. Cao et H. X. Yi ([14], [16]) ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 1.5 *Soit f une fonction analytique dans Δ. Alors*

$$\rho_2(f) = \rho_{2,M}(f).$$

Exemple 1.13 *Soit la fonction* $f(z) = \exp\exp\left\{\frac{1}{(1-z)^p}\right\}$, $p > 1$. *Alors*

$$\rho_2(f) = \rho_{2,M}(f) = p.$$

Définition 1.18 ([37], [48]) *Soit* f *une fonction méromorphe dans le disque* Δ *d'ordre* ρ $(0 < \rho < \infty)$, *on définit le type de* f *par*

$$\tau(f) = \overline{\lim_{r\to1^-}} \frac{T(r,f)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^\rho}.$$

Définition 1.19 ([48]) *Soit* f *une fonction analytique dans le disque* Δ *d'ordre* ρ_M $(0 < \rho_M < \infty)$, *on définit le type de* f *par*

$$\tau_M(f) = \overline{\lim_{r\to1^-}} \frac{\log^+ M(r,f)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho_M}}.$$

Définition 1.20 ([38]) *Soit* f *une fonction méromorphe sur* Δ. *On définit l'ordre p-itératif de croissance de la fonction* f *par*

$$\rho_p(f) = \overline{\lim_{r\to1^-}} \frac{\log_p T(r,f)}{\log \frac{1}{1-r}} \quad (p \geq 1 \text{ est un entier}),$$

où $T(r,f)$ *est la fonction caractéristique de Nevanlinna. S*i f *est analytique sur* Δ, *alors l'ordre p-itératif de la fonction* f *est défini par*

$$\rho_{M,p}(f) = \overline{\lim_{r\to1^-}} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log \frac{1}{1-r}} \quad (p \geq 1 \text{ est un entier}),$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Remarque 1.2 *Pour la relation entre l'ordre des fonctions méromorphes et les fonctions analytiques, Tsuji* ([66], *p.* 205) *a montré que si* f *est une fonction analytique sur* Δ, *alors on a l'inégalité*

$$\rho_1(f) \leq \rho_{M,1}(f) \leq \rho_1(f) + 1,$$

et $\rho_p(f) = \rho_{M,p}(f)$ *pour* $p \geq 2$ *d'après la Proposition 2.2.2 dans* [47].

Définition 1.21 ([37]) *Soit f une fonction méromorphe sur Δ, et soit*

$$D(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{T(r,f)}{\log \frac{1}{1-r}},$$

où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique de Nevanlinna. Si $D(f) < \infty$, on dit que f est de degré fini $D(f)$ (ou non-admissible) ; si $D(f) = \infty$, on dit que f est de degré infini (ou admissible). Si f est analytique sur Δ, et

$$D_M(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log M(r,f)}{\log \frac{1}{1-r}},$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, alors on dit que f est une fonction de degré fini $D_M(f)$ si $D_M(f) < \infty$, sinon, f est de degré infini.

Définition 1.22 ([37]) *L'indice de croissance d'ordre p-itératif d'une fonction méromorphe f sur Δ est défini par*

$$i(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } f \text{ est non-admissible}, \\ \min\left\{j \in \mathbb{N} : \rho_j(f) < +\infty\right\}, & \text{si } f \text{ est admissible}, \\ +\infty, & \text{si } \rho_j(f) = +\infty \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour toute fonction f analytique sur Δ, on définit aussi

$$i_M(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } f \text{ est non-admissible}, \\ \min\left\{j \in \mathbb{N} : \rho_{M,j}(f) < +\infty\right\}, & \text{si } f \text{ est admissible}, \\ +\infty, & \text{si } \rho_{M,j}(f) = +\infty \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Définition 1.23 [48] *Soit f une fonction méromorphe sur Δ, d'ordre p-itératif $\rho_p(f)$ $(0 < \rho_p(f) < +\infty)$. Alors le type p-itératif de croissance de f est défini par*

$$\tau_p(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log_{p-1} T(r,f)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho_p(f)}} \quad (p \geq 1 \text{ est un entier}).$$

Si f est une fonction analytique sur Δ, d'ordre itératif $\rho_{M,p}(f)$ $\left(0 < \rho_{M,p}(f) < +\infty\right)$, alors le type p-itératif de la fonction f est défini par

$$\tau_{M,p}(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log_p M(r,f)}{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho_{M,p}(f)}} \quad (p \geq 1 \text{ est un entier}).$$

Définition 1.24 ([38]) *Soit f une fonction méromorphe sur Δ. On définit l'exposant p-itératif de convergence des zéros de la fonction f par*

$$\lambda_p(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r}},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

et $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre de zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq r$.

On définit l'exposant p-itératif de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}_p(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log_p \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r}}.$$

Exemple 1.14 *L'exposant p-itératif de convergence des zéros distincts de la fonction* $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{1-z}\right\}$ *est égal à* 0.

Chapitre 2

Quelques estimations sur l'ordre et le type de croissance des fonctions méromorphes dans le plan complexe

2.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, on va montrer de nouveaux estimations sur l'ordre et le type de croissance des fonctions méromorphes dans le plan complexe, on va aussi donner quelques exemples pour bien expliquer l'exactitude de ces estimations. Tout d'abord, on va citer quelques résultats classiques dont on aura besoin pour la suite.

Dans l'Exemple 1.3 (Voir Chapitre 1), on a vu qu'on a pas forcément $\tau(f) = \tau_M(f)$. D'après $T(r, f) \leq \log M(r, f)$, on obtient que $\tau(f) \leq \tau_M(f)$.

Dans $[31]$, Goldberg et Ostrovskii ont obtenus les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \tau_M(f) \leq \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \tau(f), \text{ si } 0 < \rho \leq \frac{1}{2}, \\ \tau_M(f) \leq \pi\rho\tau(f), \text{ si } \frac{1}{2} \leq \rho < \infty. \end{cases}$$

La détermination de l'ordre de croissance est très importante car il y a des interprétations géométriques et physiques, mais parfois l'estimation de ce dernier n'est pas facile. Dans ce contexte plusieurs mathématiciens (voir $[31], [62]$) continuent à chercher des critères pour faciliter et élargir son application. Parmi les théorèmes obtenus les trois suivants :

Théorème A [62] *Soient f et g deux fonctions entières. Alors*

$$\rho(f+g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}, \tag{2.1.1}$$

$$\rho(fg) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\} \tag{2.1.2}$$

et

$$\tau_M(f+g) \leq \max\{\tau_M(f), \tau_M(g)\}, \tag{2.1.3}$$

$$\tau_M(fg) \leq \tau_M(f) + \tau_M(g). \tag{2.1.4}$$

Théorème B [62] *Soient* f *et* g *deux fonctions méromorphes. Si* $\rho(f) > \rho(g)$, *alors*

$$\rho(f+g) = \rho(fg) = \rho(f). \tag{2.1.5}$$

Le théorème suivant dû à Valiron [75] et Mohon'ko [67], est d'une importance essentielle dans la théorie des équations différentielles complexes.

Théorème C [67, 75] *Soit* f *une fonction méromorphe. Alors, pour toutes les fonctions irréductibles rationnelles en* f,

$$R(z,f) = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i(z) f^i}{\sum_{j=0}^{q} b_j(z) f^j},$$

où $a_i(z)$, $b_j(z)$ *sont des fonctions méromorphes telles que*

$$\begin{cases} T(r,a_i) = S(r,f), & i = 0,...,p, \\ T(r,b_j) = S(r,f), & j = 0,...,q, \end{cases}$$

la fonction caractéristique de $R(z,f(z))$ *satisfait*

$$T(r,R(z,f)) = dT(r,f) + S(r,f),$$

où $d = \max\{p,q\}$.

Il est naturel de se poser la question : Que peut-on-dire sur $\rho(f+g)$ et $\rho(fg)$ si $\rho(f) = \rho(g)$? Dans ce chapitre nous tenterons de trouver des réponses à cette question, et on va donner également des conditions suffisantes pour obtenir des résultats similaires à ceux du Théorème A et Théorème B pour le type des fonctions méromorphes.

Théorème 2.1 [50] *Soient* f *et* g *deux fonctions méromorphes.*

(i) Si $\rho(f) > \rho(g)$ $(0 < \rho(f), \rho(g) < \infty)$, *alors on a*

$$\tau(f+g) = \tau(fg) = \tau(f). \tag{2.1.6}$$

(ii) Si $0 < \rho(f) = \rho(g) = \rho(f+g) = \rho(fg) < \infty$, *alors on a*

$$|\tau(f) - \tau(g)| \le \tau(f+g) \le \tau(f) + \tau(g) \tag{2.1.7}$$

et

$$|\tau(f) - \tau(g)| \le \tau(fg) \le \tau(f) + \tau(g). \tag{2.1.8}$$

Remarque 2.1 *Pour expliquer l'exactitude des inégalités* (2.1.7) *et* (2.1.8), *on prend*

$f(z) = \frac{1}{1+e^z}$ *et* $g(z) = \frac{1}{1-e^z}$, *et on trouve que*

$$\rho(f) = \rho(g) = \rho(f+g) = \rho(fg) = 1,\ \tau(f) = \tau(g) = \frac{1}{\pi}$$

et

$$\tau(f+g) = \tau\left(\frac{2}{1-e^{2z}}\right) = \frac{2}{\pi} = \tau(f) + \tau(g),$$
$$\tau(fg) = \tau\left(\frac{1}{1-e^{2z}}\right) = \frac{2}{\pi} = \tau(f) + \tau(g).$$

Théorème 2.2 [50] *Soient f et g deux fonctions méromorphes telles que* $\rho(f) = \rho(g) = \rho$ $(0 < \rho < \infty)$ *et* $\tau(f) \neq \tau(g)$. *Alors*

$$\rho(f+g) = \rho(fg) = \rho(f) = \rho(g) = \rho. \tag{2.1.9}$$

Remarque 2.2 *Si* $\rho(f) = \rho(g)$ *et* $\tau(f) = \tau(g)$, *alors on peut rien dire sur* $\rho(f+g)$ *et* $\rho(fg)$. *Si on prend par exemple* $f(z) = e^z$, $g(z) = -e^z$ *et* $h(z) = e^{-z}$, *alors* $\rho(f+g) = 0 \neq \rho(f) = \rho(g) = 1$ *et* $\rho(fg) = \rho(f) = \rho(g) = 1$. *D'autre part,* $\rho(f+h) = \rho(f) = \rho(h) = 1$ *et* $\rho(fh) = 0 \neq \rho(f) = \rho(h) = 1$.

Théorème 2.3 [50] *Soient f et g deux fonctions entières.*

(i) Si $\rho(f) > \rho(g)$ $(0 < \rho(f), \rho(g) < \infty)$, *alors on a*

$$\tau_M(f+g) = \tau_M(f) \tag{2.1.10}$$

et

$$\tau_M(fg) \leq \tau_M(f). \tag{2.1.11}$$

(ii) Si $0 < \rho(f) = \rho(g) = \rho(f+g) = \rho(fg) < \infty$, *alors*

$$\tau_M(f+g) \leq \max\{\tau_M(f), \tau_M(g)\} \tag{2.1.12}$$

et

$$\tau_M(fg) \leq \tau_M(f) + \tau_M(g). \tag{2.1.13}$$

De plus, si on a $\tau_M(f) \neq \tau_M(g)$, *alors on obtient*

$$\tau_M(f+g) = \max\{\tau_M(f), \tau_M(g)\}. \tag{2.1.14}$$

Théorème 2.4 [50] *Soient f et g deux fonctions entières telles que* $\rho(f) = \rho(g) = \rho$ $(0 < \rho < \infty)$ *et* $\tau_M(f) \neq \tau_M(g)$. *Alors*

$$\rho(f+g) = \rho(f) = \rho(g) = \rho. \tag{2.1.15}$$

Théorème 2.5 [50] *Soit f une fonction entière d'ordre non-entier* ρ $(0 < \rho < \infty)$, *et soit g une fonction entière telle que* $\rho(f) > \rho(g)$ $(0 < \rho(g) < \infty)$ *ou* $\tau(f) \neq \tau(g)$ *si* $\rho(f) = \rho(g)$. *Alors*

$$\lambda(f+g) = \lambda(fg) = \lambda(f) = \rho. \tag{2.1.16}$$

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.1 [31] *Si l'ordre ρ d'une fonction méromorphe $f(z)$ est non-entier, alors l'ordre de $N(r,0,\infty) = N(r,f) + N\left(r,\frac{1}{f}\right)$ est égale à ρ.*

2.3 Preuve du Théorème 2.1.

(i) D'après la définition du type, on a

$$\tau(f+g) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{T(r,f+g)}{r^{\rho(f+g)}} \leqslant \limsup_{r\to+\infty} \frac{T(r,f)+T(r,g)+O(1)}{r^{\rho(f+g)}}. \tag{2.3.1}$$

Comme $\rho(g) < \rho(f)$, alors $\rho(f+g) = \rho(f)$. Ainsi, de (2.3.1), on obtient

$$\tau(f+g) \leqslant \limsup_{r\to+\infty} \frac{T(r,f)}{r^{\rho(f)}} + \limsup_{r\to+\infty} \frac{T(r,g)+O(1)}{r^{\rho(f)}} = \tau(f). \tag{2.3.2}$$

D'autre part, comme

$$\rho(f+g) = \rho(f) > \rho(g), \tag{2.3.3}$$

alors d'après (2.3.2), on a

$$\tau(f) = \tau(f+g-g) \leqslant \tau(f+g). \tag{2.3.4}$$

Ainsi de (2.3.2) et (2.3.4), on obtient $\tau(f+g) = \tau(f)$. Maintenant, on montre que $\tau(fg) = \tau(f)$. Comme $\rho(g) < \rho(f)$, alors $\rho(fg) = \rho(f)$. Selon la définition du type, on a

$$\begin{aligned}\tau(fg) &= \limsup_{r\to+\infty} \frac{T(r,fg)}{r^{\rho(fg)}} \leqslant \limsup_{r\to+\infty} \frac{T(r,f)+T(r,g)}{r^{\rho(f)}} \\ &\leqslant \limsup_{r\to+\infty} \frac{T(r,f)}{r^{\rho(f)}} + \limsup_{r\to+\infty} \frac{T(r,g)}{r^{\rho(f)}} = \tau(f).\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Comme

$$\rho(fg) = \rho(f) > \rho(g) = \rho\left(\frac{1}{g}\right), \tag{2.3.6}$$

alors d'après (2.3.5), on obtient

$$\tau(f) = \tau\left(fg\frac{1}{g}\right) \leqslant \tau(fg). \tag{2.3.7}$$

Ainsi, de (2.3.5) et (2.3.7), on a $\tau(fg) = \tau(f)$.
(ii) Supposons que $\rho(f) = \rho(g) = \rho(fg) = \rho(f+g) = \rho$ $(0 < \rho < \infty)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$\begin{aligned}T(r,f+g) &\leqslant T(r,f) + T(r,g) + O(1) \\ &\leqslant (\tau(f)+\varepsilon) r^{\rho} + (\tau(g)+\varepsilon) r^{\rho} + O(1) \\ &\leqslant (\tau(f)+\tau(g)+2\varepsilon) r^{\rho} + O(1)\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

et

$$T(r,fg) \leqslant T(r,f) + T(r,g) \leqslant (\tau(f)+\varepsilon)\, r^{\rho} + (\tau(g)+\varepsilon)\, r^{\rho}$$
$$\leqslant (\tau(f)+\tau(g)+2\varepsilon)\, r^{\rho}. \tag{2.3.9}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, de $(2.3.8)$, $(2.3.9)$ et la définition du type, on obtient

$$\tau(f+g) \leqslant \tau(f) + \tau(g) \tag{2.3.10}$$

et

$$\tau(fg) \leqslant \tau(f) + \tau(g). \tag{2.3.11}$$

D'autre part, comme $\rho(g) = \rho(f+g)$, alors d'après $(2.3.10)$

$$\tau(f) = \tau(f+g-g) \leqslant \tau(f+g) + \tau(g) \tag{2.3.12}$$

et de $\rho(f) = \rho(f+g)$, on obtient

$$\tau(g) = \tau(f+g-f) \leqslant \tau(f+g) + \tau(f). \tag{2.3.13}$$

De $(2.3.12)$ et $(2.3.13)$, on a

$$|\tau(f) - \tau(g)| \leqslant \tau(f+g). \tag{2.3.14}$$

Aussi, comme $\rho(g) = \rho\left(\frac{1}{g}\right) = \rho(fg)$, alors d'après $(2.3.11)$

$$\tau(f) = \tau\left(fg\frac{1}{g}\right) \leqslant \tau(fg) + \tau(g). \tag{2.3.15}$$

En utilisant $\rho(f) = \rho\left(\frac{1}{f}\right) = \rho(fg)$, on obtient

$$\tau(g) = \tau\left(fg\frac{1}{f}\right) \leqslant \tau(fg) + \tau(f). \tag{2.3.16}$$

D'après $(2.3.15)$ et $(2.3.16)$, on trouve

$$|\tau(f) - \tau(g)| \leqslant \tau(fg). \tag{2.3.17}$$

De $(2.3.10)$ et $(2.3.14)$ on obtient $(2.1.7)$ et d'après $(2.3.11)$, $(2.3.17)$ on a $(2.1.8)$.

2.4 Preuve du Théorème 2.2.

Sans perte de généralité, on suppose que $\rho(f) = \rho(g)$ et $\tau(g) < \tau(f)$. Alors, d'après le Théorème A, on a

$$\rho(f+g) \leqslant \max\{\rho(f), \rho(g)\} = \rho(f) = \rho(g). \tag{2.3.18}$$

Si on suppose que $\rho(f+g) < \rho(f) = \rho(g)$, alors d'après $(2.1.6)$, on obtient

$$\tau(g) = \tau(f+g-f) = \tau(f)$$

c'est une contradiction. Par conséquent $\rho(f+g)=\rho(f)=\rho(g)$. Maintenant, on montre que $\rho(fg)=\rho(f)=\rho(g)$. Aussi, nous avons par le Théorème A

$$\rho(fg)\leqslant \max\{\rho(f),\rho(g)\}=\rho(f)=\rho(g). \tag{2.3.19}$$

Si on suppose que $\rho(fg)<\rho(f)=\rho(g)=\rho\left(\frac{1}{f}\right)$, alors d'après $(2.1.6)$, on peut écrire

$$\tau(g)=\tau\left(fg\frac{1}{f}\right)=\tau\left(\frac{1}{f}\right)=\tau(f)$$

c'est une contradiction. Par conséquent $\rho(fg)=\rho(f)=\rho(g)$.

2.5 Preuve du Théorème 2.3.

(i) Supposons que $\rho(f)>\rho(g)$ $(0<\rho(f),\rho(g)<\infty)$. D'après la définition du type, on a

$$\tau_M(f+g)=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log M(r,f+g)}{r^{\rho(f+g)}}$$

$$\leqslant \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log M(r,f)+\log M(r,g)+O(1)}{r^{\rho(f+g)}}. \tag{2.3.20}$$

Comme $\rho(g)<\rho(f)$, alors $\rho(f+g)=\rho(f)$. Ainsi, de $(2.3.20)$, on obtient

$$\tau_M(f+g)\leqslant \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log M(r,f)}{r^{\rho(f)}}+\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log M(r,g)}{r^{\rho(f)}}=\tau_M(f). \tag{2.3.21}$$

D'autre part, comme

$$\rho(f+g)=\rho(f)>\rho(g), \tag{2.3.22}$$

alors avec $(2.3.21)$, on trouve

$$\tau_M(f)=\tau_M(f+g-g)\leqslant \tau_M(f+g). \tag{2.3.23}$$

Ainsi de (2.3.21) et $(2.3.23)$, on obtient $\tau_M(f+g)=\tau_M(f)$. Maintenant, on montre que $\tau_M(fg)\leqslant\tau_M(f)$. Comme $\rho(g)<\rho(f)$, alors $\rho(fg)=\rho(f)$. D'après la définition du type, on a

$$\tau_M(fg)=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log M(r,fg)}{r^{\rho(fg)}}\leqslant \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log M(r,f)+\log M(r,g)}{r^{\rho(f)}}$$

$$\leqslant \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log M(r,f)}{r^{\rho(f)}}+\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log M(r,g)}{r^{\rho(f)}}=\tau_M(f). \tag{2.3.24}$$

(ii) Supposons que $\rho(f)=\rho(g)=\rho(fg)=\rho(f+g)=\rho$ $(0<\rho<+\infty)$. Alors pour tout $\varepsilon>0$ donné, on a

$$M(r,f+g)\leqslant M(r,f)+M(r,g)\leqslant \exp\left((\tau_M(f)+\varepsilon)r^{\rho}\right)$$

$$+\exp\left((\tau_M(g)+\varepsilon)r^{\rho}\right)\leqslant 2\exp\left((\max\{\tau_M(f),\tau_M(g)\}+\varepsilon)r^{\rho}\right) \tag{2.3.25}$$

et

$$\begin{aligned} M(r,fg) &\leqslant M(r,f)\,M(r,g) \leqslant \exp\left(\left(\tau_M(f)+\varepsilon\right)r^{\rho} + \left(\tau_M(g)+\varepsilon\right)r^{\rho}\right) \\ &= \exp\left(\left(\tau(f)+\tau(g)+2\varepsilon\right)r^{\rho}\right). \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, de (2.3.25) , (2.3.26) et la définition du type, on a

$$\tau_M(f+g) \leqslant \max\{\tau_M(f), \tau_M(g)\} \tag{2.3.27}$$

et

$$\tau_M(fg) \leqslant \tau_M(f) + \tau_M(g). \tag{2.3.28}$$

D'autre part et sans perte de généralité on suppose que $\tau_M(f) > \tau_M(g)$. Comme $\rho(g) = \rho(f+g)$, alors en utilisant (2.3.27) on a

$$\tau_M(f) = \tau_M(f+g-g) \leqslant \max\{\tau_M(f+g), \tau_M(g)\} = \tau_M(f+g). \tag{2.3.29}$$

A partir de (2.3.27) et (2.3.29) on obtient $\tau_M(f+g) = \tau_M(f) = \max\{\tau_M(f), \tau_M(g)\}$.

2.6 Preuve du Théorème 2.4.

Supposons que $\rho(f) = \rho(g)$ $(0 < \rho(f), \rho(g) < \infty)$ et $\tau_M(f) \neq \tau_M(g)$. Il est clair que

$$\rho(f+g) \leqslant \rho(f) = \rho(g).$$

Si on suppose que $\rho(f+g) < \rho(f) = \rho(g)$, alors avec (2.3.29)

$$\tau_M(g) = \tau_M(f+g-f) = \tau_M(f)$$

c'est une contradiction. Par conséquent $\rho(f+g) = \rho(f) = \rho(g)$.

2.7 Preuve du Théorème 2.5.

On sait que si f est d'ordre non-entier, alors d'après le Lemme 2.1, on a $\rho(f) = \lambda(f)$. Comme $\rho(f) > \rho(g)$ et $\tau(f) \neq \tau(g)$ si $\rho(f) = \rho(g)$, alors des Théorème B et Théorème 2.2, on a

$$\rho(f+g) = \rho(fg) = \rho(f) = \lambda(f).$$

D'autre part, $f+g$ et fg sont d'ordre non-entier. Alors

$$\rho(f+g) = \lambda(f+g) = \rho(fg) = \lambda(fg) = \rho(f) = \lambda(f).$$

Chapitre 3

La croissance des dérivées logarithmiques des fonctions méromorphes

3.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de la croissance des dérivées logarithmiques des fonctions méromorphes et entières et leurs applications dans la théorie des équations différentielles, on va donner aussi quelques exemples pour expliquer l'exactitude de nos résultats.

La croissance des dérivées logarithmiques est un ancien problème dans la théorie de Nevanlinna, l'importance de ce problème réside dans ses applications dans la théorie des équations différentielles. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce problème (voir [31, 35, 67, 75]).
Dans [35], Hayman a prouvé l'identité suivante :

Théorème A ([35]) *Soit f une fonction méromorphe, et soit $g = \frac{f'}{f}$. Alors pour tout entier $n \geqslant 1$,*

$$\frac{f^{(n)}}{f} = g^n + \frac{n(n-1)}{2} g^{n-2} g' + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} g^{n-3} g'' + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} g^{n-4} (g')^2 + P_{n-3}(g),$$

où $P_{n-3}(g)$ est un polynôme en g et ses dérivées à coefficients constants et de degré total $\leqslant n-3$.

Les résultats suivants sont très importants dans la théorie des équations différentielles.

Théorème B ([35]) *Soit f une fonction méromorphe, et soit $k \geqslant 1$ un entier. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f),$$

où $S(r,f) = O(\log T(r,f) + \log r)$, pour $|z| = r \notin E$ où $E \subset [0, +\infty)$ avec $m(E) < \infty$. Si

f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r).$$

Théorème C ([32]) *Soit f une fonction méromorphe d'ordre fini ρ, soit $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geqslant 0, i = 1, ..., m$, et soit $\varepsilon > 0$ une constante. Alors, on a*

(i) *Il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\psi \in [0, 2\pi) \backslash E_1$, alors il existe une constante $R_1 = R_1(\psi) > 1$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg z = \psi$, $|z| \geqslant R_1$ et pour tout $(k, j) \in \Gamma$, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}.$$

(ii) *Il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| \notin E_2 \cup [0, 1]$ et pour tout $(k, j) \in \Gamma$, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}.$$

Le Théorème suivant dû à Valiron [72] et Mohon'ko [64], est d'une importance essentielle dans la théorie des équations différentielles complexes.

Theorem D ([67], [75]) *Soit f une fonction méromorphe. Alors pour toutes les fonctions rationnelles irréductibles en f,*

$$R(z, f) = \frac{P(z, f)}{Q(z, f)} = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i(z) f^i}{\sum_{j=0}^{q} b_j(z) f^j}$$

avec des coefficients méromorphes $a_i(z)$, $b_j(z)$ telles que

$$\begin{cases} T(r, a_i) = S(r, f), \ i = 0, ..., p, \\ T(r, b_j) = S(r, f), \ j = 0, ..., q, \end{cases}$$

la fonction caractéristique de $R(z, f(z))$ satisfait

$$T(r, R(z, f)) = dT(r, f) + S(r, f),$$

où $d = \max\{p, q\}$.

Le but principal de ce chapitre est de donner de nouvelles estimations concernant la croissance des dérivées logarithmiques, on va aussi étudier la relation entre eux, l'hyper-ordre et l'exposant de convergence des zéros.

Théorème 3.1 [55] *Soient $k \geqslant 2$ un entier et f une fonction méromorphe. Alors*

$$\rho\left(\frac{f'}{f}\right) = \max\left\{\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right),\ k \geqslant 2\right\} = \max\left\{\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right), \rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right),\ k \geqslant 2\right\}. \tag{3.1.1}$$

Corollaire 3.1 [55] *Soit f une fonction méromorphe. Si $\frac{f'}{f}$ est d'ordre fini, alors pour tout entier $k \geqslant 2$*

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) < \infty. \tag{3.1.2}$$

Corollaire 3.2 [55] *Soit f une fonction méromorphe. S'il existe un entier $k \geqslant 1$ satisfaisant $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho(f)$ et $\rho(f) > \rho_2(f)$, alors*

$$\max\left\{\overline{\lambda}(f), \overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right\} = \max\left\{\lambda(f), \lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\} = \rho(f). \tag{3.1.3}$$

De plus, si f est une fonction entière, alors

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f).$$

Exemple 3.1 *Il est clair que la fonction $f(z) = e^z - 1$ satisfait*

$$\rho\left(\frac{f'}{f}\right) = \rho\left(\frac{e^z}{e^z - 1}\right) = \rho(f) = 1.$$

Alors d'après le Corollaire 3.2, on a

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = 1.$$

D'autre part, la fonction méromorphe $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ satisfait

$$\rho\left(\frac{f'}{f}\right) = \rho\left(-\frac{e^z}{e^z - 1}\right) = \rho(f) = 1,$$

et

$$\overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) = 1,\ \overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = 0.$$

On voit que

$$\max\left\{\overline{\lambda}(f), \overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right\} = \max\left\{\lambda(f), \lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\} = \rho(f) = 1.$$

Remarque 3.1 *La condition $\rho(f) > \rho_2(f)$ dans Corollaire 3.2 est nécessaire, si on prend par exemple $f(z) = \exp\left(e^{e^z}\right)$, alors f satisfait*

$$\rho\left(\frac{f'}{f}\right) = \rho(f) = \rho_2(f) = \infty,$$

et

$$\lambda(f) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) = 0.$$

Corollaire 3.3 [55] *Soit f une fonction méromorphe telle que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a*

$$\rho\left(\frac{f^{(2k)}}{f}\right) < \rho\left(\frac{f'}{f}\right). \tag{3.1.4}$$

Alors

$$\rho\left(\frac{f^{(2k+1)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right), \ \ (k \geqslant 1). \tag{3.1.5}$$

Exemple 3.2 *Soit $f(z) = \sin z$, il est clair que $\frac{f^{(2k)}}{f} \equiv Const.$, pour tout entier $k \geqslant 1$. Alors d'après le Corollaire 3.3*

$$\rho\left(\frac{f^{(2k+1)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right), \ \ (k \geqslant 1)$$

et comme $\rho\left(\frac{f'}{f}\right) = \rho(f) = 1$, on obtient

$$\rho\left(\frac{f^{(2k+1)}}{f}\right) = \rho(f) = 1, \ \ (k \geqslant 1).$$

Théorème 3.2 [55] *Soit f une fonction entière avec un nombre fini de zéros. Alors pour tout entier $k \geqslant 1$*

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho_2(f). \tag{3.1.6}$$

Corollaire 3.4 [55] *Soit f une fonction entière et c une constante non nulle. Alors*

$$\rho\left(f' + cf^2\right) = \rho(f). \tag{3.1.7}$$

Remarque 3.2 *Le Corollaire 3.4 a été prouvé par S. Bank et I. Laine dans* [5].

3.2 Applications aux équations différentielles

Théorème 3.3 [55] *Soit $k \geq 1$ un entier et soit f une solution de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_0 f = F, \tag{3.2.1}$$

où A_j $(j = 0, ..., k-1)$, $F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières telles que

$$\max\{\rho(F), \rho(A_j) \ \ (j = 0, ..., k-1)\} < \rho(f). \tag{3.2.2}$$

Alors

$$\rho(f) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right) = \overline{\lambda}(f) = \lambda(f). \tag{3.2.3}$$

De plus, si $\frac{f^{(j)}}{f} \not\equiv Const.$ $(j \geqslant 2$ est un entier$)$, alors

$$\rho(f) = \rho\left(\frac{f^{(j)}}{f}\right), \ \ (j \geqslant 2). \tag{3.2.4}$$

Remarque 3.3 *Dans le Théorème 3.3, nous obtenons le résultat de S. A. Gao, Z. X. Chen et T. W. Chen* [24] *, mais la preuve est simple et tout à fait différente.*

Théorème 3.4 [55] (*Equation de Verhulst-Pearl*) *Soit $k \geq 1$ un entier, et soit f une solution méromorphe d'ordre fini de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} = A_1 f + A_2 f^2 + ... + A_n f^n, \tag{3.2.5}$$

où A_j $(j = 1, ..., n)$ ($n \geqslant 2$ est un entier) sont des fonctions méromorphes telles que

$$\max\{\rho(A_j) : j = 1, ..., n\} < \rho(f). \tag{3.2.6}$$

Alors

$$\rho(f) = \max\left\{\overline{\lambda}(f), \overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right\} = \max\left\{\lambda(f), \lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\}. \tag{3.2.7}$$

Exemple 3.3 *Il est clair que la fonction $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ satisfait l'équation différentielle*

$$f' = -f - f^2,$$

et

$$\max\{\rho(A_j) : j = 1, 2\} = 0 < \rho(f) = 1.$$

Alors, d'après le Théorème 3.4, on a

$$\rho(f) = \max\left\{\overline{\lambda}(f), \overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right\} = \max\left\{\lambda(f), \lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\} = 1.$$

3.3 Lemmes préliminaires

Lemme 3.1 [4] *Soient $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ et $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ des fonctions croissantes telles que $g(r) \leqslant h(r)$ en dehors d'un ensemble exceptionnel $E_5 \subset [0,1)$ de mesure logarithmique finie. Alors il existe $d \in (0,1)$ telle que si $s(r) = 1 - d(1-r)$, alors $g(r) \leqslant h(s(r))$ pour tout $r \in [0,1)$.*

Lemme 3.2 [33] *Soient $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ et $\psi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions croissantes telles que $\varphi(r) \leqslant \psi(r)$ pour tout $r \notin E_6 \cup [0,1]$, où $E_6 \subset (1,+\infty)$ est un ensemble de mesure logarithmique finie. Soit $\gamma > 1$ une constante donnée. Alors il existe $r_1 = r_1(\gamma) > 0$ telle que $\varphi(r) \leqslant \psi(\gamma r)$ pour tout $r > r_1$.*

Lemme 3.3 [42, 47] *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière d'ordre ρ, $\mu(r)$ est le terme maximal, i.e., $\mu(r) = \max\{|a_n| r^n;\ n = 0, 1, ...\}$, et soit $\nu_f(r)$ l'indice central de f, i.e., $\nu_f(r) = \max\{m;\ \mu(r) = |a_m| r^m\}$. Alors*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \nu_f(r)}{\log r} = \rho. \tag{3.3.1}$$

Lemme 3.4 [21] *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini avec hyper-ordre $\rho_2(f) = \sigma < +\infty$. Alors*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log \nu_f(r)}{\log r} = \sigma. \tag{3.3.2}$$

Lemme 3.5 (*Wiman-Valiron,* [36] , [74]) *Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière transcendante, et soit $\nu_f(r)$ l'indice central de f. Soit z un point avec $|z| = r$ où $|f(z)| = M(r, f)$. Alors on a l'estimation*

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^k (1 + o(1)), \quad (k \geqslant 1 \quad \text{un entier}) \tag{3.3.3}$$

pour tout $|z|$ en dehors d'un ensemble E_7 de r de mesure logarithmique finie.

Lemme 3.6 ([7]) *Soient $k \geq 2$ et A_0, $A_1, ..., A_{k-1}$, $F \not\equiv 0$ des fonctions entières d'ordre fini. Si f est une solution de l'équation* (3.2.1) , *alors*

$$\rho_2(f) \leq \max\{\rho(A_j) : j = 0, ..., k-1, \rho(F)\} = \sigma.$$

3.4 Preuve du Théorème 3.1.

Tout d'abord, montrons l'inégalité

$$\max\left\{\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right), \ k \geqslant 2\right\} \leqslant \rho\left(\frac{f'}{f}\right).$$

On a

$$\frac{f^{(k)}}{f} = \left(\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)' + \left(\frac{f'}{f}\right)\left(\frac{f^{(k-1)}}{f}\right), \ (k \geqslant 2). \tag{3.4.1}$$

Alors

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) \leqslant \max\left\{\rho\left(\frac{f'}{f}\right), \rho\left(\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)\right\}, \ (k \geqslant 2). \tag{3.4.2}$$

Par le même procédé, nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) &\leqslant \max\left\{\rho\left(\frac{f'}{f}\right), \rho\left(\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)\right\} \\
&\leqslant \max\left\{\rho\left(\frac{f'}{f}\right), \rho\left(\frac{f^{(k-2)}}{f}\right)\right\} \\
&\leqslant ... \leqslant \max\left\{\rho\left(\frac{f'}{f}\right), \rho\left(\frac{f''}{f}\right)\right\} \\
&\leqslant \max\left\{\rho\left(\frac{f'}{f}\right), \rho\left(\frac{f'}{f}\right)\right\} = \rho\left(\frac{f'}{f}\right) \ (k \geqslant 2).
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Maintenant, prouvons l'égalité. Nous divisons la preuve en trois cas.

(i) Supposons que $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) < \rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$. De (3.4.1), on a

$$\frac{f^{(k+1)}}{f} - \left(\frac{f^{(k)}}{f}\right)' = \left(\frac{f'}{f}\right)\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right), \quad (k \geqslant 1). \tag{3.4.4}$$

Comme $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) < \rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right) \leqslant \rho\left(\frac{f'}{f}\right)$, alors d'après (3.4.4) on obtient

$$\rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right).$$

(ii) Si $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) > \rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$, alors d'après (3.4.4) on a

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\frac{f^{(k)}}{f}\right). \tag{3.4.5}$$

De (3.4.3) on a $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) \leqslant \rho\left(\frac{f'}{f}\right)$. Si on suppose que $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) < \rho\left(\frac{f'}{f}\right)$, alors

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right), \tag{3.4.6}$$

c'est une contradiction. Alors

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right).$$

(iii) Supposons que $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$. D'après (3.4.3), on a $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) \leqslant \rho\left(\frac{f'}{f}\right)$. Si on suppose que $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) < \rho\left(\frac{f'}{f}\right)$, alors d'après (3.4.4) on obtient

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right), \tag{3.4.7}$$

c'est une contradiction. Alors, d'après (i), (ii) et (iii) on en déduit que

$$\max\left\{\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right), \rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)\right\} = \rho\left(\frac{f'}{f}\right). \tag{3.4.8}$$

D'après (3.4.8) nous pouvons conclure qu'il existe toujours un certain entier $j \geqslant 1$ tel que

$$\rho\left(\frac{f^{(j)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right).$$

Ainsi

$$\rho\left(\frac{f'}{f}\right) = \max\left\{\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right), k \geqslant 2\right\}. \tag{3.4.9}$$

3.5 Preuve du Corollaire 3.2.

Comme il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho(f).$$

Alors, d'après le Théorème 3.1, on a

$$\rho\left(\frac{f'}{f}\right) = \rho(f). \tag{3.4.10}$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ donné

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{f'}{f}\right) &= m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N\left(r, \frac{f'}{f}\right) \\ &= m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \overline{N}(r, \frac{1}{f}) + \overline{N}(r, f) \\ \leqslant m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + r^{\lambda_1+\varepsilon} + r^{\lambda_2+\varepsilon} &\leqslant m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + 2r^{\max\{\lambda_1,\lambda_2\}+\varepsilon}, \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

où $\lambda_1 = \overline{\lambda}(f)$, $\lambda_2 = \overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)$. Alors d'après le Théorème B et $(3.4.11)$, on a

$$T\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant O\left(\log T(r, f) + \log r\right) + 2r^{\max\{\lambda_1,\lambda_2\}+\varepsilon} \tag{3.4.12}$$

pour tout r à l'extérieur d'un ensemble $E_1 \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire finie. D'après le Lemme 3.1 et (3.4.12) on obtient

$$\begin{aligned} \rho(f) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right) &\leqslant \max\left\{\rho_2(f), \overline{\lambda}(f), \overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right\} \\ &\leqslant \max\left\{\rho_2(f), \lambda(f), \lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\} \leqslant \rho(f), \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

ce qui implique

$$\rho(f) = \max\left\{\overline{\lambda}(f), \overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right\} = \max\left\{\lambda(f), \lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\}. \tag{3.4.14}$$

Si f est entière, alors $\overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) = 0$, donc d'après $(3.4.14)$, on obtient

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f).$$

3.6 Preuve du Théorème 3.2.

Comme f est une fonction entière ayant un nombre fini de zéros. Alors f peut être représentée par

$$f(z) = p(z)\, e^{g}, \tag{3.4.15}$$

où p est un polynôme et g une fonction entière, et

$$f^{(k)} = \Pi e^{g}, \tag{3.4.16}$$

où Π est une fonction entière. Il est clair que f satisfait l'équation différentielle

$$pf^{(k)} - \Pi f = 0. \tag{3.4.17}$$

(i) Si f est une solution entière d'ordre fini, alors g et Π doivent être des polynômes et par (3.4.17)

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{\Pi}{p}\right) = 0 = \rho_2(f). \tag{3.4.18}$$

(ii) Si f est une solution entière d'ordre infini, alors g et Π doivent être des fonctions entières transcendantes et

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{\Pi}{p}\right) = \rho(\Pi). \tag{3.4.19}$$

On a aussi de (3.4.17)

$$\Pi = p\frac{f^{(k)}}{f}, \tag{3.4.20}$$

alors d'après (3.4.20) et le Théorème B, on a

$$\begin{aligned} T(r,\Pi) = m(r,\Pi) &\leqslant m(r,p) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) \\ &= O(\ln r) + O(\ln rT(r,f)) \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

pour tout r en dehors d'un ensemble $E_1 \subset (0,+\infty)$ de mesure linéaire finie. D'après le Lemme 3.1 et (3.4.21) on obtient

$$\rho(\Pi) \leqslant \rho_2(f). \tag{3.4.22}$$

D'autre part, d'après le Lemme 3.5, il existe un ensemble $E_7 \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie $lm(E_7) < +\infty$ et on peut choisir z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_7$ et $|f(z)| = M(r,f)$, tel qu'on a (3.3.1). En substituant (3.3.1) dans (3.4.20) on obtient

$$|p(z)| \left(\frac{v_f(r)}{r}\right)^{k} |1 + o(1)| = |\Pi(z)| \leqslant M(r,\Pi) \tag{3.4.23}$$

pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_7$ et $|f(z)| = M(r,f)$. En utilisant les Lemme 3.2, Lemme 3.4, de (3.4.23) on trouve

$$\rho_2(f) \leqslant \rho(\Pi). \tag{3.4.24}$$

De (3.4.19), (3.4.22) et (3.4.24) on en déduit que

$$\rho_2(f) = \rho(\Pi) = \rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right). \tag{3.4.25}$$

Ceci prouve le Théorème 3.2.

3.7 Preuve du Corollaire 3.4.

On définit la fonction entière G

$$G(z) = \frac{1}{c}\exp\{cF(z)\}, \tag{3.4.26}$$

où F est la primitive de la fonction entière f. On a

$$G''(z) = (f' + cf^2)\exp\{cF(z)\}. \tag{3.4.27}$$

Alors

$$\rho\left(\frac{G''}{G}\right) = \rho(f' + cf^2), \tag{3.4.28}$$

comme $\rho_2(G) = \rho(F) = \rho(f)$, alors d'après le Théorème 3.2 on obtient

$$\rho(f) = \rho(f' + cf^2). \tag{3.4.29}$$

3.8 Preuve du Théorème 3.3.

D'après (3.2.1), on peut écrire

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F}\left(\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + A_1\frac{f'}{f} + A_0\right). \tag{3.4.30}$$

Alors

$$\rho(f) \leqslant \max\left\{\rho(F), \rho(A_j)\ \ (j = 0, ..., k-1), \rho\left(\frac{f^{(i)}}{f}\right)\ \ (i = 1, ..., k)\right\}. \tag{3.4.31}$$

En utilisant (3.2.2) et le Théorème 3.1, on obtient de (3.4.31)

$$\rho(f) \leqslant \max\left\{\rho\left(\frac{f^{(i)}}{f}\right) : i = 1, ..., k\right\} = \rho\left(\frac{f'}{f}\right) \leqslant \rho(f), \tag{3.4.32}$$

d'après le Corollaire 3.2 et Lemme 3.6, on en déduit que

$$\rho(f) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right) = \overline{\lambda}(f) = \lambda(f). \tag{3.4.33}$$

Maintenant, notons par $n(r, 0, f)$ le nombre de zéros de f dans le disque $\{z : |z| < r\}$ et par $\overline{n}(r, 0, f)$ le nombre de zéros distincts de f dans le disque $\{z : |z| < r\}$. Il est clair que si $\frac{f^{(j)}}{f}$ $(j \geqslant 2)$ n'est pas une constante, alors

$$\overline{n}(r, 0, f) \leqslant n\left(r, 0, \frac{f}{f^{(j)}}\right). \tag{3.4.34}$$

Ainsi

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqslant N\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) \leqslant T\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right), \tag{3.4.35}$$

ce qui implique

$$\overline{\lambda}(f) \leqslant \rho\left(\frac{f^{(j)}}{f}\right). \tag{3.4.36}$$

D'après (3.4.31) et (3.4.36), on en déduit

$$\rho(f) = \overline{\lambda}(f) = \lambda(f) \leqslant \rho\left(\frac{f^{(j)}}{f}\right) \leqslant \rho(f), \tag{3.4.37}$$

donc

$$\rho(f) = \overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho\left(\frac{f^{(j)}}{f}\right) \quad (j \geqslant 2).$$

3.9 Preuve du Théorème 3.4.

De (3.2.5), on peut écrire

$$\frac{f^{(k)}}{f} = A_1 + A_2 f + ... + A_n f^{n-1}, \tag{3.4.38}$$

ce qui implique en utilisant le Théorème D

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) &= T\left(r, A_1 + A_2 f + ... + A_n f^{n-1}\right) \\ &= (n-1)\, T(r,f) + S(r,f). \end{aligned} \tag{3.4.39}$$

En utilisant le Lemme 3.1 et le Corollaire 3.2, d'après (3.4.39) on a

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho(f) = \max\left\{\overline{\lambda}(f), \overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right\} = \max\left\{\lambda(f), \lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\}.$$

Chapitre 4

Croissance et oscillation des polynômes différentiels d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes

4.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de la croissance et l'oscillation des polynômes différentiels d'ordre supérieur des solutions des équations différentielles linéaires homogènes.
En ces dernières années, il y a un grand intérêt pour étudier la croissance et l'oscillation des polynômes différentiels généré par les solutions d'équations différentielles dans le plan complexe ([10], [27], [49], [52]). Tout d'abord, on considère pour $k \geq 2$ l'équation différentielle :

$$f^{(k)} + A(z) f = 0 \tag{4.1.1}$$

et le polynôme de différentiel

$$g_f = d_k f^{(k)} + d_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + d_1 f' + d_0 f, \tag{4.1.2}$$

où A et d_j $(j = 0, 1, \cdots, k)$ sont des fonctions méromorphes dans le plan complexe.

Dans [20], Chen a étudié les points fixes et l'hyper-ordre des solutions des équations différentielles à coefficients fonctions entières et a obtenu les résultats suivants.

Theorem A [20] *Pour toute solution non triviale f de*

$$f'' + A(z) f = 0, \tag{4.1.3}$$

on a
(i) *Si A est un polynôme avec* $\deg A = n \geqslant 1$, *alors*

$$\lambda(f - z) = \rho(f) = \frac{n+2}{2}.$$

(ii) *Si A est transcendante et $\rho(A) < \infty$, alors*

$$\lambda(f - z) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\lambda_2(f - z) = \rho_2(f) = \rho(A).$$

Plus tard, dans [76] Wang, Yi et Cai ont généralisé le théorème précédent pour le polynôme différentiel g_f à coefficients constants, comme suit :

Theorem B [76] *Pour toute solution non triviale f de* (4.1.3), *on a :*
(i) *Si A est un polynôme avec* $\deg A = n \geqslant 1$, *alors*

$$\lambda(g_f - z) = \rho(f) = \frac{n+2}{2}.$$

(ii) *Si A est transcendante et $\rho(A) < \infty$, alors*

$$\lambda(g_f - z) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\lambda_2(g_f - z) = \rho_2(f) = \rho(A).$$

Théorème A a été généralisé pour les solutions méromorphes des équations différentielles d'ordre supérieur par Liu Ming-Sheng et Zhang Xiao-Mei comme suit (voir [63]) :

Theorem C [63] *Soient $k \geqslant 2$ et $A(z)$ une fonction méromorphe transcendante satisfaisant $\delta(\infty, A) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{m(r,A)}{T(r,A)} = \delta > 0$, $\rho(A) = \rho < +\infty$. Alors toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de* (4.1.1), *et $f', f'', \cdots, f^{(k)}$ ont une infinité de points fixes et*

$$\overline{\lambda}\left(f^{(j)} - z\right) = \rho(f) = +\infty, \quad (j = 0, \cdots, k),$$

$$\overline{\lambda}_2\left(f^{(j)} - z\right) = \rho_2(f) = \rho \quad (j = 0, \cdots, k).$$

Soit $\mathcal{L}(\mathbf{G})$ un sous-corps du corps $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ des fonctions méromorphes dans un domaine $\mathbf{G} \subset \mathbb{C}$. Si $\mathbf{G} = \mathbb{C}$, notons simplement $\mathcal{L}$ au lieu de $\mathcal{L}(\mathbb{C})$, et on a

$$\mathcal{L}_{p+1,\rho} = \left\{g \text{ méromorphe} : \rho_{p+1}(g) < \rho\right\},$$

où ρ est une constante positive. Dans [49], Laine et Rieppo ont étudié les points fixes d'ordre itératif des équations différentielles du second ordre, et ont obtenu :

Theorem D [49] *Soit $A(z)$ une fonction méromorphe transcendante d'ordre p-itératif $\rho_p(A) = \rho > 0$ telle que $\delta(\infty, A) = \delta > 0$, et soit f une solution méromorphe transcendante de l'équation* (4.1.3). *Supposons que l'une des conditions suivantes soit satisfaite*
(i) *tous les pôles de f sont de multiplicité uniformément borné ou que*
(ii) $\delta(\infty, f) > 0$.

Alors $\rho_{p+1}(f) = \rho_p(A) = \rho$. *De plus, soit*

$$P[f] = P\left(f, f', \cdots, f^{(m)}\right) = \sum_{j=0}^{m} p_j f^{(j)} \tag{4.1.4}$$

un polynôme différentiel linéaire à coefficients $p_j \in \mathcal{L}_{p+1,\rho}$, *en supposant qu'au moins l'un des coefficients* p_j *n'est pas identiquement nul. Alors pour les points fixes de* $P[f]$, *on a*

$$\overline{\lambda}_{p+1}(P[f] - z) = \rho,$$

pourvu que ni $P[f]$ *ni* $P[f] - z$ *est identiquement nul.*

Le but principal de ce chapitre est d'étudier la croissance et l'oscillation du polynôme différentiel (4.1.2) généré par les solutions méromorphes de l'équation (4.1.1). La méthode utilisée dans les preuves de nos théorèmes est simple et tout à fait différente de la méthode utilisée dans le papier de Laine et Rieppo [49]. Avant de citer nos résultats, on définit la suite des fonctions $\alpha_{i,j}$ $(j = 0, \cdots, k-1)$ par

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \alpha'_{i,j-1} + \alpha_{i-1,j-1}, \text{ pour tout } i = 1, \cdots, k-1, \\ \alpha'_{0,j-1} - A\alpha_{k-1,j-1}, \text{ pour } i = 0 \end{cases} \tag{4.1.5}$$

et

$$\alpha_{i,0} = \begin{cases} d_i, \text{ pour tout } i = 1, \cdots, k-1, \\ d_0 - d_k A, \text{ pour } i = 0. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

On définit aussi h par

$$h = \begin{vmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & . & . & \alpha_{k-1,0} \\ \alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} & . & . & \alpha_{k-1,1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{0,k-1} & \alpha_{1,k-1} & . & . & \alpha_{k-1,k-1} \end{vmatrix} \tag{4.1.7}$$

et $\psi(z)$ par

$$\psi(z) = C_0\varphi + C_1\varphi' + \cdots + C_{k-1}\varphi^{(k-1)}, \tag{4.1.8}$$

où C_j $(j = 0, \cdots, k-1)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini en fonction de $\alpha_{i,j}$ et $\varphi \not\equiv 0$ une fonction méromorphe avec $\rho(\varphi) < \infty$.

Théorème 4.1 [57] *Soit* A *une fonction méromorphe d'ordre fini. Soient* $d_j(z)$ $(0 \leq j \leq k)$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini non toutes identiquement nulles telles que* $h \not\equiv 0$. *Si* $f(z)$ *est une solution méromorphe d'ordre infini de* (4.1.1) *avec* $\rho_2(f) = \rho$, *alors le polynôme différentiel* (4.1.2) *satisfait*

$$\rho(g_f) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\rho_2(g_f) = \rho_2(f) = \rho.$$

De plus, si f *est une solution méromorphe d'ordre fini de* (4.1.1) *telle que*

$$\rho(f) > \max\{\rho(A), \rho(d_j) \quad (j = 0, 1, \cdots, k)\}, \tag{4.1.9}$$

alors

$$\rho(g_f) = \rho(f).$$

Remarque 4.1 *Dans le Théorème 4.1, si on a pas la condition $h \not\equiv 0$, alors les conclusions du Théorème 4.1 ne sont pas réalisées. Par exemple, si on prend $d_k = 1, d_0 = A$ et $d_j \equiv 0$ $(j = 1, ..., k-1)$, alors $h \equiv 0$. Il s'ensuit que $g_f \equiv 0$ et $\rho(g_f) = 0$. Donc, si $f(z)$ est une solution méromorphe d'ordre infini de* (4.1.1), *alors $\rho(g_f) = 0 < \rho(f) = \infty$, et si f est une solution méromorphe d'ordre fini de* (4.1.1) *telle que* (4.1.9) *est vérifée, alors $\rho(g_f) = 0 < \rho(f)$.*

Théorème 4.2 [57] *Sous les hypothèses du Théorème 4.1, soit $\varphi(z) \not\equiv 0$ une fonction méromorphe d'ordre fini telle que $\psi(z)$ n'est pas une solution de* (4.1.1). *Si $f(z)$ est une solution méromorphe d'ordre infini de* (4.1.1) *avec $\rho_2(f) = \rho$, alors le polynôme différentiel* (4.1.2) *satisfait*

$$\overline{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\overline{\lambda}_2(g_f - \varphi) = \lambda_2(g_f - \varphi) = \rho_2(f) = \rho.$$

De plus, si f est une solution méromorphe d'ordre fini de (4.1.1) *telle que*

$$\rho(f) > \max\{\rho(A), \rho(\varphi), \rho(d_j) \quad (j = 0, 1, \cdots, k)\}, \tag{4.1.10}$$

alors

$$\overline{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \rho(f).$$

Corollaire 4.1 [57] *Soit $A(z)$ une fonction entière transcendante d'ordre fini et soient $d_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles telles que $h \not\equiv 0$. Si $f \not\equiv 0$ est une solution de* (4.1.1), *alors le polynôme différentiel* (4.1.2) *satisfait*

$$\rho(g_f) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\rho_2(g_f) = \rho_2(f) = \rho(A) = \rho.$$

Corollaire 4.2 [57] *Sous les hypothèses du Corollaire 4.1, soit $\varphi(z) \not\equiv 0$ une fonction entière d'ordre fini telle que $\psi(z) \not\equiv 0$. Alors le polynôme différentiel* (4.1.2) *satisfait*

$$\overline{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\overline{\lambda}_2(g_f - \varphi) = \lambda_2(g_f - \varphi) = \rho_2(f) = \rho(A).$$

Corollaire 4.3 [57] *Soit $A(z)$ un polynôme non constant et soient $d_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ des polynômes non constants non tous identiquement nuls tels que $h \not\equiv 0$. Si $f \not\equiv 0$ est une solution de* (4.1.1), *alors le polynôme différentiel* (4.1.2) *satisfait*

$$\rho(g_f) = \rho(f) = \frac{\deg(A) + k}{k}.$$

Corollaire 4.4 [57] *Soit $A(z)$ une fonction entière transcendante d'ordre fini $\rho(A) > 0$ telle que $\delta(\infty, A) = \delta > 0$, et soit $f \not\equiv 0$ une solution méromorphe de* (4.1.1). *Supposons que l'une des conditions suivante soit satisfaite :*

(i) *tous les pôles de* f *sont de multiplicité uniformément borné ou que*
(ii) $\delta(\infty, f) > 0$.
Soient $d_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ *des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles telles que* $h \not\equiv 0$. *Alors le polynôme différentiel* (4.1.2) *satisfait* $\rho(g_f) = \rho(f) = \infty$ *et* $\rho_2(g_f) = \rho_2(f) = \rho(A)$.

Corollaire 4.5 [57] *Sous les hypothèses du Corollaire 4.4, soit* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *une fonction méromorphe d'ordre fini telle que* $\psi(z) \not\equiv 0$. *Alors le polynôme différentiel* (4.1.2) *satisfait*

$$\overline{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\overline{\lambda}_2(g_f - \varphi) = \lambda_2(g_f - \varphi) = \rho_2(f) = \rho(A).$$

4.2 Lemmes préliminaires

Les deux lemmes suivants sont des cas particuliers du résultat de T. B. Cao, Z. X. Chen, X. M. Zheng et J. Tu dans [17] :

Lemme 4.1 [8, 19] *Soient* $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* f *est une solution méromorphe de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f = F \tag{4.2.1}$$

avec $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) = \rho$, *alors* f *satisfait*

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty,$$

$$\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \rho.$$

Lemme 4.2 *Soient* $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* f *est une solution méromorphe de l'équation* (4.2.1) *avec*

$$\max\{\rho(A_j) \quad (j = 0, 1, \cdots, k-1), \rho(F)\} < \rho(f) < +\infty,$$

alors

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f).$$

Lemme 4.3 [47] *Pour toute solution non triviale* f *de* (4.1.1) *on a*

(i) *Si* A *est un polynôme avec* $\deg A = n \geqslant 1$, *alors*

$$\rho(f) = \frac{n+k}{k}. \tag{4.2.2}$$

(ii) *Si* A *est transcendante et* $\rho(A) < \infty$, *alors*

$$\rho(f) = \infty \text{ and } \rho_2(f) = \rho(A). \tag{4.2.3}$$

Lemme 4.4 [8] *Soit* $A(z)$ *une fonction entière transcendante d'ordre fini* $\rho(A) > 0$ *telle que* $\delta(\infty, A) = \delta > 0$, *et soit* $f \not\equiv 0$ *une solution méromorphe de* $(4.1.1)$. *Supposons que l'une des conditions suivante soit satisfaite*

(i) *tous les pôles de* f *sont de multiplicité uniformément borné ou que*
(ii) $\delta(\infty, f) > 0$.
Alors $\rho(f) = \infty$ *et* $\rho_2(f) = \rho(A)$.

Lemme 4.5 [50] *Soient* f *et* g *deux fonctions méromorphes telles que* $0 < \rho(f), \rho(g) < \infty$ *et* $0 < \tau(f), \tau(g) < \infty$. *Alors on a*

(i) *si* $\rho(f) > \rho(g)$, *on obtient*

$$\tau(f+g) = \tau(fg) = \tau(f). \tag{4.2.4}$$

(ii) *Si* $\rho(f) = \rho(g)$ *et* $\tau(f) \neq \tau(g)$, *alors on trouve*

$$\rho(f+g) = \rho(fg) = \rho(f) = \rho(g). \tag{4.2.5}$$

Lemme 4.6 [35] *Soit* f *une fonction méromorphe et soit* $k \geqslant 1$ *un entier. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r,f),$$

où $S(r,f) = O(\log T(r,f) + \log r)$, *pour* $|z| = r \notin E$ *où* $E \subset [0, +\infty)$ *avec* $m(E) < \infty$. *Si* f *est d'ordre fini, alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r).$$

4.3 Preuve du Théorème 4.1.

Supposons que f est une solution méromorphe d'ordre infini de (4.1.1) avec $\rho_2(f) = \rho$. D'après $(4.1.1)$, on a

$$f^{(k)} = -Af \tag{4.3.1}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} g_f &= d_k f^{(k)} + d_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + d_0 f \\ &= d_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + (d_0 - d_k A) f. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

On peut réécrire (4.3.2) de la forme

$$g_f = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{i,0} f^{(i)}, \tag{4.3.3}$$

où $\alpha_{i,0}$ sont définis dans $(4.1.6)$. En dérivant les deux côtés de l'équation (4.3.3) et en remplaçant $f^{(k)}$ par $f^{(k)} = -Af$, on obtient

$$g_f' = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{i,0}' f^{(i)} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{i,0} f^{(i+1)} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{i,0}' f^{(i)} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i-1,0} f^{(i)}$$

$$= \alpha'_{0,0} f + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha'_{i,0} f^{(i)} + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{i-1,0} f^{(i)} + \alpha_{k-1,0} f^{(k)}$$

$$= \alpha'_{0,0} f + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\alpha'_{i,0} + \alpha_{i-1,0}\right) f^{(i)} - \alpha_{k-1,0} A f$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\alpha'_{i,0} + \alpha_{i-1,0}\right) f^{(i)} + \left(\alpha'_{0,0} - \alpha_{k-1,0} A\right) f. \quad (4.3.4)$$

On peut réécrire (4.3.4) de la forme.

$$g'_f = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{i,1} f^{(i)}, \quad (4.3.5)$$

où

$$\alpha_{i,1} = \begin{cases} \alpha'_{i,0} + \alpha_{i-1,0}, \text{ pour tout } i = 1, \cdots, k-1, \\ \alpha'_{0,0} - A\alpha_{k-1,0}, \text{ pour } i = 0. \end{cases} \quad (4.3.6)$$

En dérivant les deux côtés de l'équation (4.3.5) et en remplaçant $f^{(k)}$ par $f^{(k)} = -Af$, on obtient

$$g''_f = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha'_{i,1} f^{(i)} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{i,1} f^{(i+1)} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha'_{i,1} f^{(i)} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i-1,1} f^{(i)}$$

$$= \alpha'_{0,1} f + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha'_{i,1} f^{(i)} + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{i-1,1} f^{(i)} + \alpha_{k-1,1} f^{(k)}$$

$$= \alpha'_{0,1} f + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\alpha'_{i,1} + \alpha_{i-1,1}\right) f^{(i)} - \alpha_{k-1,1} A f$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\alpha'_{i,1} + \alpha_{i-1,1}\right) f^{(i)} + \left(\alpha'_{0,1} - \alpha_{k-1,1} A\right) f \quad (4.3.7)$$

ce qui implique

$$g''_f = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{i,2} f^{(i)}, \quad (4.3.8)$$

où

$$\alpha_{i,2} = \begin{cases} \alpha'_{i,1} + \alpha_{i-1,1}, \text{ pour tout } i = 1, \cdots, k-1, \\ \alpha'_{0,1} - A\alpha_{k-1,1}, \text{ pour } i = 0. \end{cases} \quad (4.3.9)$$

En utilisant la même méthode ci-dessus, on peut facilement déduire que

$$g_f^{(j)} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{i,j} f^{(i)}, \; j = 0, 1, \cdots, k-1, \quad (4.3.10)$$

où

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \alpha'_{i,j-1} + \alpha_{i-1,j-1}, \text{ pour tout } i = 1, \cdots, k-1, \\ \alpha'_{0,j-1} - A\alpha_{k-1,j-1}, \text{ pour } i = 0 \end{cases} \quad (4.3.11)$$

et

$$\alpha_{i,0} = \begin{cases} d_i, \text{ pour tout } i = 1, \cdots, k-1, \\ d_0 - d_k A, \text{ pour } i = 0. \end{cases} \tag{4.3.12}$$

De $(4.3.3) - (4.3.12)$ nous obtenons le système d'équations

$$\begin{cases} g_f = \alpha_{0,0} f + \alpha_{1,0} f' + \cdots + \alpha_{k-1,0} f^{(k-1)}, \\ g'_f = \alpha_{0,1} f + \alpha_{1,1} f' + \cdots + \alpha_{k-1,1} f^{(k-1)}, \\ g''_f = \alpha_{0,2} f + \alpha_{1,2} f' + \cdots + \alpha_{k-1,2} f^{(k-1)}, \\ \cdots \\ g_f^{(k-1)} = \alpha_{0,k-1} f + \alpha_{1,k-1} f' + \cdots + \alpha_{k-1,k-1} f^{(k-1)}. \end{cases} \tag{4.3.13}$$

Par la règle de Cramer, et comme $h \not\equiv 0$ on a

$$f = \frac{\begin{vmatrix} g_f & \alpha_{1,0} & . & . & \alpha_{k-1,0} \\ g'_f & \alpha_{1,1} & . & . & \alpha_{k-1,1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ g_f^{(k-1)} & \alpha_{1,k-1} & . & . & \alpha_{k-1,k-1} \end{vmatrix}}{h}. \tag{4.3.14}$$

Alors

$$f = C_0 g_f + C_1 g'_f + \cdots + C_{k-1} g_f^{(k-1)}, \tag{4.3.15}$$

où C_j sont des fonctions méromorphes d'ordre fini en fonction de $\alpha_{i,j}$, où $\alpha_{i,j}$ sont définis dans $(4.3.11)$.

Si $\rho(g_f) < +\infty$, alors d'après (4.3.15) on obtient $\rho(f) < +\infty$, c'est une contradiction. Donc $\rho(g_f) = \rho(f) = +\infty$.

Maintenant, montrons que $\rho_2(g_f) = \rho_2(f) = \rho$. D'après (4.3.2), on trouve $\rho_2(g_f) \leqslant \rho_2(f)$ et de (4.3.15) on a $\rho_2(f) \leqslant \rho_2(g_f)$. Ce qui implique $\rho_2(g_f) = \rho_2(f) = \rho$.

De plus, si f est une solution méromorphe d'ordre fini de l'équation (4.1.1) telle que

$$\rho(f) > \max\{\rho(A), \rho(d_j) \quad (j = 0, 1, \cdots, k)\}, \tag{4.3.16}$$

alors

$$\rho(f) > \max\{\rho(\alpha_{i,j}) : i = 0, \cdots, k-1, j = 0, \cdots, k-1\}. \tag{4.3.17}$$

D'après (4.3.2) et (4.3.16) on a $\rho(g_f) \leqslant \rho(f)$. Maintenant, montrons que $\rho(g_f) = \rho(f)$. Si $\rho(g_f) < \rho(f)$, alors d'après (4.3.15) et (4.3.17) on trouve

$$\rho(f) \leqslant \max\{\rho(C_j) \quad (j = 0, \cdots, k-1), \rho(g_f)\} < \rho(f)$$

c'est une contradiction. Donc $\rho(g_f) = \rho(f)$.

4.4 Preuve du Théorème 4.2.

Supposons que f est une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation (4.1.1) avec $\rho_2(f) = \rho$. Posons $w(z) = g_f - \varphi$. Comme $\rho(\varphi) < \infty$, alors d'après le Théorème 4.1 on a $\rho(w) = \rho(g_f) = \infty$ et $\rho_2(w) = \rho_2(g_f) = \rho$.

Pour prouver que $\overline{\lambda}(g_f-\varphi)=\lambda(g_f-\varphi)=\infty$ et $\overline{\lambda}_2(g_f-\varphi)=\lambda_2(g_f-\varphi)=\rho$ il suffit de montrer que $\overline{\lambda}(w)=\lambda(w)=\infty$ et $\overline{\lambda}_2(w)=\lambda_2(w)=\rho$. Comme $g_f=w+\varphi$ et d'après $(4.3.15)$, on trouve

$$f=C_0w+C_1w'+\cdots+C_{k-1}w^{(k-1)}+\psi(z), \tag{4.3.18}$$

où

$$\psi(z)=C_0\varphi+C_1\varphi'+\cdots+C_{k-1}\varphi^{(k-1)}. \tag{4.3.19}$$

En substituant (4.3.18) dans $(4.1.1)$, on obtient

$$C_{k-1}w^{(2k-1)}+\sum_{i=0}^{2k-2}\phi_i w^{(i)}=-\left(\psi^{(k)}+A(z)\psi\right)=H, \tag{4.3.20}$$

où ϕ_i $(i=0,\cdots,2k-2)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Comme $\psi(z)$ n'est pas une solution de $(4.1.1)$, il s'ensuit que $H\not\equiv 0$. Alors d'après le Lemme 4.1, on obtient $\overline{\lambda}(w)=\lambda(w)=\infty$ et $\overline{\lambda}_2(w)=\lambda_2(w)=\rho$, i. e., $\overline{\lambda}(g_f-\varphi)=\lambda(g_f-\varphi)=\infty$ et $\overline{\lambda}_2(g_f-\varphi)=\lambda_2(g_f-\varphi)=\rho$.

Supposons que f est une solution méromorphe d'ordre fini de l'équation (4.1.1) telle que (4.1.10) soit vérifiée. Posons $w(z)=g_f-\varphi$. Comme $\rho(\varphi)<\rho(f)$, alors d'après le Théorème 4.1 on a $\rho(w)=\rho(g_f)=\rho(f)$.

Pour prouver que $\overline{\lambda}(g_f-\varphi)=\lambda(g_f-\varphi)=\rho(f)$ il suffit de montrer que $\overline{\lambda}(w)=\lambda(w)=\rho(f)$. En utilisant le même raisonnement ci-dessus, on obtient

$$C_{k-1}w^{(2k-1)}+\sum_{i=0}^{2k-2}\phi_i w^{(i)}=-\left(\psi^{(k)}+A(z)\psi\right)=F,$$

où C_{k-1}, ϕ_i $(i=0,\cdots,2k-2)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini $\rho(C_{k-1})<\rho(w)$, $\rho(\phi_i)<\rho(w)$ $(i=0,\cdots,2k-2)$ et

$$\psi(z)=C_0\varphi+C_1\varphi'+\cdots+C_{k-1}\varphi^{(k-1)}.$$

Comme $\psi(z)$ n'est pas une solution de $(4.1.1)$, il s'ensuit que $F\not\equiv 0$. Alors d'après le Lemme 4.2, on obtient $\overline{\lambda}(w)=\lambda(w)=\rho(f)$, i. e., $\overline{\lambda}(g_f-\varphi)=\lambda(g_f-\varphi)=\rho(f)$.

4.5 Preuve du Corollaire 4.3.

Supposons que $f\not\equiv 0$ est une solution de $(4.1.1)$. Comme A est un polynôme non constant, alors d'après le Lemme 4.3, on a $\rho(f)=\frac{\deg(A)+k}{k}$, ce qui implique

$$\rho(f)>\max\{\rho(A),\rho(d_j)\quad(j=0,1,\cdots,k)\}=0.$$

Ainsi, d'après le Théorème 4.1 on obtient $\rho(g_f)=\rho(f)=\frac{\deg(A)+k}{k}$.

4.6 Preuve du Corollaire 4.4.

Supposons que $f\not\equiv 0$ est une solution méromorphe de (4.1.1) telle que
(i) tous les pôles de f sont de multiplicité uniformément borné ou que
(ii) $\delta(\infty,f)>0$.
Alors d'après le Lemme 2.4, on a $\rho(f)=\infty$ et $\rho_2(f)=\rho(A)$. Maintenant, en utilisant le Théorème 4.1, on obtient $\rho(g_f)=\rho(f)=\infty$ et $\rho_2(g_f)=\rho_2(f)=\rho(A)$.

4.7 Discussions et applications

Dans cette section, on considère l'équation différentielle

$$f''' + A(z) f = 0, \tag{4.4.1}$$

où $A(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre fini. Il est clair que la difficulté dans l'étude du polynôme différentiel généré par des solutions réside dans le calcul des coefficients $\alpha_{i,j}$. On va expliquer ici que l'utilisation de notre méthode, le calcul des coefficients $\alpha_{i,j}$ peut se déduire facilement. Etudions par exemple la croissance du polynôme différentiel

$$g_f = f''' + f'' + f' + f. \tag{4.4.2}$$

On a

$$\begin{cases} g_f = \alpha_{0,0} f + \alpha_{1,0} f' + \alpha_{2,0} f'', \\ g'_f = \alpha_{0,1} f + \alpha_{1,1} f' + \alpha_{2,1} f'', \\ g''_f = \alpha_{0,2} f + \alpha_{1,2} f' + \alpha_{2,2} f''. \end{cases} \tag{4.4.3}$$

D'après (4.1.5) on a

$$\alpha_{i,0} = \begin{cases} 1, \text{ pour tout } i = 1, 2, \\ 1 - A, \text{ pour } i = 0. \end{cases} \tag{4.4.4}$$

Maintenant, de (4.3.6) on obtient

$$\alpha_{i,1} = \begin{cases} \alpha'_{i,0} + \alpha_{i-1,0}, \text{ pour tout } i = 1, 2 \\ \alpha'_{0,0} - A\alpha_{2,0}, \text{ pour } i = 0. \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} \alpha_{0,1} = \alpha'_{0,0} - A\alpha_{2,0} = -A' - A, \\ \alpha_{1,1} = \alpha'_{1,0} + \alpha_{0,0} = 1 - A, \\ \alpha_{2,1} = \alpha'_{2,0} + \alpha_{1,0} = 1. \end{cases} \tag{4.4.5}$$

Enfin, par (4.3.11), on a

$$\alpha_{i,2} = \begin{cases} \alpha'_{i,1} + \alpha_{i-1,1}, \text{ pour tout } i = 1, 2, \\ \alpha'_{0,1} - A\alpha_{2,1}, \text{ pour } i = 0. \end{cases}$$

Alors, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_{0,2} = \alpha'_{0,1} - A\alpha_{2,1} = -A'' - A' - A, \\ \alpha_{1,2} = \alpha'_{1,1} + \alpha_{0,1} = -2A' - A, \\ \alpha_{2,2} = \alpha'_{2,1} + \alpha_{1,1} = 1 - A, \end{cases} \tag{4.4.6}$$

ce qui implique

$$\begin{cases} g_f = (1 - A) f + f' + f'', \\ g'_f = (-A' - A) f + (1 - A) f' + f'', \\ g''_f = (-A'' - A' - A) f + (-2A' - A) f' + (1 - A) f'' \end{cases} \tag{4.4.7}$$

et

$$h = \begin{vmatrix} 1 - A & 1 & 1 \\ -A' - A & 1 - A & 1 \\ -A'' - A' - A & -2A' - A & 1 - A \end{vmatrix}$$

$$= 3A' - A - AA' - AA'' + A^2 - A^3 + 2(A')^2 + 1. \tag{4.4.8}$$

Supposons que $h \not\equiv 0$, par des calculs simples, on trouve

$$f = \frac{Ag_f'' + (-1 - 2A')\, g_f' + (1 - A + 2A' + A^2)\, g_f}{h} \tag{4.4.9}$$

et par des conditions sur la solution f on peut assurer que

$$\rho\,(g_f) = \rho\,(f''' + f'' + f' + f) = \rho\,(f)\,.$$

Passons maintenant au problème de l'oscillation, pour cela on considère la fonction méromorphe $\varphi\,(z) \not\equiv 0$ d'ordre fini. De (4.4.9) on trouve

$$f = \frac{Aw'' + (-1 - 2A')\, w' + (1 - A + 2A' + A^2)\, w}{h} + \psi\,(z)\,, \tag{4.4.10}$$

où $w = g_f - \varphi$ et

$$\psi\,(z) = \frac{A\varphi'' + (-1 - 2A')\, \varphi' + (1 - A + 2A' + A^2)\, \varphi}{h}. \tag{4.4.11}$$

Par conséquent

$$f = \frac{A}{h} w'' + C_1 w' + C_0 w + \psi, \tag{4.4.12}$$

où

$$C_1 = -\frac{1 + 2A'}{h},\ C_0 = \frac{1 - A + 2A' + A^2}{h}.$$

En substituant (4.4.12) dans (4.4.1) , on obtient

$$\frac{A}{h} w^{(5)} + \sum_{i=0}^{4} \phi_i w^{(i)} = -\left(\psi^{(3)} + A\,(z)\,\psi\right),$$

où ϕ_i $(i = 0, \cdots, 4)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Supposons que toutes les solutions méromorphes $f \not\equiv 0$ de (4.4.1) sont d'ordre infini et $\rho_2\,(f) = \rho$. Si $\psi \not\equiv 0$, alors d'après le Lemme 4.1, on obtient

$$\overline{\lambda}\,(g_f - \varphi) = \lambda\,(g_f - \varphi) = \rho\,(f) = +\infty \tag{4.4.13}$$

et

$$\overline{\lambda}_2\,(g_f - \varphi) = \lambda_2\,(g_f - \varphi) = \rho_2\,(f) = \rho. \tag{4.4.14}$$

Supposons que f est une solution méromorphe d'ordre fini de (4.4.1) telle que

$$\rho\,(f) > \max\left\{\rho\,(A)\,, \rho\,(\varphi)\right\}.$$

Si $\psi^{(3)} + A\,(z)\,\psi \not\equiv 0$, alors d'après le Lemme 4.2, on obtient

$$\overline{\lambda}\,(g_f - \varphi) = \lambda\,(g_f - \varphi) = \rho\,(f)\,.$$

Enfin, on peut affirmer les deux résultats suivants.

Théorème 4.3 [57] *Soit* $A(z)$ *une fonction entière transcendante d'ordre fini* $0 < \rho(A) < \infty$ *et* $0 < \tau(A) < \infty$, *et soient* $d_j(z)$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ *des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles telles que*

$$\max\{\rho(d_j), (j = 0, 1, 2, 3)\} < \rho(A).$$

Si f *est une solution non triviale de* (4.4.1), *alors le polynôme différentiel*

$$g_f = d_3 f^{(3)} + d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f \tag{4.4.15}$$

satisfait

$$\rho(g_f) = \rho(f) = \infty \tag{4.4.16}$$

et

$$\rho_2(g_f) = \rho_2(f) = \rho(A). \tag{4.4.17}$$

Théorème 4.4 [57] *Sous les hypothèses du Théorème 4.3, soit* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *une fonction entière d'ordre fini. Si* f *est une solution non triviale de* (4.4.1), *alors le polynôme différentiel* $g_f = d_3.f^{(3)} + d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ $(d_3 \not\equiv 0)$ *satisfait*

$$\overline{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\overline{\lambda}_2(g_f - \varphi) = \lambda_2(g_f - \varphi) = \rho_2(f) = \rho(A).$$

4.8 Preuve du Théorème 4.3.

Supposons que f est une solution non triviale de (4.4.1). Alors d'aprés le Lemme 4.3, on a

$$\rho(f) = \infty, \ \rho_2(f) = \rho(A).$$

Tout d'abord, supposons que $d_3 \not\equiv 0$. Par le même raisonnement que précédemment, on obtient

$$h = \begin{vmatrix} H_0 & H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 & H_5 \\ H_6 & H_7 & H_8 \end{vmatrix},$$

où $H_0 = d_0 - d_3 A$, $H_1 = d_1$, $H_2 = d_2$, $H_3 = d_0' - (d_2 + d_3') A - d_3 A'$, $H_4 = d_3 + d_1' - d_3 A$, $H_5 = d_1 + d_2'$, $H_6 = d_0'' - (d_1 + 2d_2' + d_3'') A - (d_2 - d_3') A' - d_3 A''$, $H_7 = 2d_0' + d_1'' - (d_2 + 2d_3') A - 2d_3 A'$, $H_8 = d_0 + 2d_1' + d_2'' - d_3 A$. Alors

$$\begin{aligned} h = (&2d_0 d_1 d_2 + d_1 d_2 d_3 + 3d_0 d_1 d_3' + d_0 d_2 d_2' - 4d_0 d_3 d_1' + 3d_1 d_2 d_1' \\ &+3d_1 d_3 d_0' - d_0 d_3 d_2'' + d_1 d_2 d_2'' + d_1 d_3 d_1'' + d_2 d_3 d_0'' + 2d_2 d_3 d_2' + d_2 d_3 d_3'' \\ &+2d_0 d_2' d_3' + 2d_1 d_1' d_3' - 4d_2 d_0' d_3' + 2d_2 d_1' d_2' + 2d_3 d_0' d_2' - d_1 d_2' d_3'' + d_1 d_3' d_2'' \\ &+d_2 d_1' d_3'' - d_2 d_1'' d_3' - d_3 d_1' d_2'' + d_3 d_2' d_1'' - d_1^3 - 2d_0 d_3^2 - d_0^2 d_3 - 3d_2^2 d_0' \\ &-2d_1 (d_2')^2 - 3d_1^2 d_2' - 2d_3 (d_1')^2 - d_2^2 d_1'' - 2d_3^2 d_1' - d_1^2 d_3'' - d_3^2 d_2'') A \end{aligned}$$

$$+(3d_0d_1d_3 + 2d_0d_3d_2' - d_1d_2d_2' + 2d_1d_3d_1' - 4d_2d_3d_0' + d_1d_3d_2'' - d_2d_3d_1'' - d_2d_3d_3'$$
$$+d_1d_2'd_3' - d_2d_1'd_3' - d_1^2d_2 + d_2^2d_3 + d_2^2d_1' + d_1^2d_3')A'$$
$$+(d_2d_3d_1' - d_1^2d_3 + d_2d_3^2 - d_1d_3d_2')A'' + (5d_2d_3d_3' - 3d_1d_3^2 + 2d_2^2d_3 - 2d_3^2d_2')AA'$$
$$+3d_3^2d_1' + 2d_2(d_3')^2 + 3d_2^2d_3' + d_3^2d_2'')A^2 + (2d_0d_3^2 - 3d_1d_2d_3 - 3d_1d_3d_3' - 3d_2d_3d_2' - d_2d_3d_3''$$
$$-2d_3d_2'd_3' + d_2^3 + d_3^3 - d_3^3A^3 + 2d_2d_3^2(A')^2 - d_2d_3^2AA''$$
$$-3d_0d_1d_0' - d_0d_1d_1'' + 2d_0d_3d_1' + d_0d_3d_2'' - d_2d_3d_0'' - 2d_0d_0'd_2' - 2d_1d_0'd_1' + d_0d_1'd_2'' - d_0d_2'd_1''$$
$$-d_1d_0'd_2'' + d_1d_0''d_2' + d_2d_0'd_1'' - d_2d_1'd_0'' + +d_0^2d_3 + 2d_0(d_1')^2 + d_0^2d_1' + 2d_2(d_0')^2 + d_1^2d_0''.$$

Comme $d_3 \not\equiv 0$, $A_0 \not\equiv 0$, alors d'après le Lemme 4.5, on trouve que $\rho(h) = \rho(A)$, donc $h \not\equiv 0$. Pour les cas
(i) $d_3 \equiv 0$, $d_2 \not\equiv 0$,
(ii) $d_3 \equiv 0, d_2 \equiv 0$ et $d_1 \not\equiv 0$,
(iii) $d_3 \equiv 0, d_2 \equiv 0$, $d_1 \equiv 0$ et $d_0 \not\equiv 0$,
en utilisant un raisonnement similaire à celui ci-dessus, on trouve $h \not\equiv 0$. Comme $h \not\equiv 0$, alors on obtient

$$f = \frac{1}{h}\begin{vmatrix} g_f & d_1 & d_2 \\ g_f' & d_3 + d_1' & d_1 + d_2' \\ g_f'' & 2d_0' + d_1'' - d_2A & d_0 + 2d_1' + d_2'' \end{vmatrix},$$

que nous pouvons écrire

$$f = \frac{1}{h}\left(D_0g_f + D_1g_f' + D_2g_f''\right), \tag{4.4.18}$$

où

$$D_0 = \left(d_1d_2 - d_0d_3 + 2d_1d_3' + d_2d_2' - 3d_3d_1' - d_3d_2'' + 2d_2'd_3' - d_3^2\right)A$$
$$+\left(2d_1d_3 + 2d_3d_2'\right)A' + A^2d_3^2 + d_0d_3 + d_0d_1' - 2d_1d_0' - d_1d_1''$$
$$+2d_3d_1' + d_3d_2'' - 2d_0'd_2' + d_1'd_2'' - d_2'd_1'' + 2(d_1')^2,$$
$$D_1 = \left(d_1d_3 - 2d_2d_3' - d_2^2\right)A - 2d_2d_3A' + 2d_2d_0' - d_1d_2'' + d_2d_1'' - d_0d_1 - 2d_1d_1',$$
$$D_2 = d_2d_3A + d_1^2 - d_2d_3 + d_1d_2' - d_2d_1'.$$

Si $\rho(g_f) < +\infty$, alors d'après (4.4.18) on obtient $\rho(f) < +\infty$, c'est une contradiction. Par conséquent $\rho(g_f) = \rho(f) = +\infty$.
Maintenant, montrons que $\rho_2(g_f) = \rho_2(f) = \rho(A)$. D'après (4.4.15), on a $\rho_2(g_f) \leqslant \rho_2(f)$ et de (4.4.18) on obtient $\rho_2(f) \leqslant \rho_2(g_f)$. D'où $\rho_2(g_f) = \rho_2(f) = \rho(A)$.

4.9 Preuve du Théorème 4.4.

Posons $w = g_f - \varphi$, on a

$$f = \frac{1}{h}\left(D_0w + D_1w' + D_2w''\right) + \psi,$$

où

$$\psi = \frac{D_2\varphi'' + D_1\varphi' + D_0\varphi}{h}. \tag{4.4.19}$$

Comme $h \not\equiv 0$, il s'ensuit d'après le Théorème 4.3 que g_f est d'ordre infini et $\rho_2(g_f) = \rho(A)$. En substituant (4.4.18) dans (4.4.1), on obtient

$$\frac{D_2}{h} w^{(5)} + \sum_{i=0}^{4} \phi_i w^{(i)} = -\left(\psi^{(3)} + A(z)\psi\right).$$

Montrons tout d'abord que $\psi \not\equiv 0$. Supposons que $\psi \equiv 0$, alors (4.4.19) peut s'écrire de la forme

$$D_2 \varphi'' + D_1 \varphi' + D_0 \varphi = 0 \tag{4.4.20}$$

et d'après le Lemme 4.5, on a

$$\rho(D_0) > \max\{\rho(D_1), \rho(D_2)\}. \tag{4.4.21}$$

De (4.4.20) on a

$$D_0 = -\left(D_2 \frac{\varphi''}{\varphi} + D_1 \frac{\varphi'}{\varphi}\right).$$

Comme $\rho(\varphi) < \infty$, et d'après le Lemme 4.6 on obtient

$$T(r, D_0) \leqslant T(r, D_1) + T(r, D_2) + O(\log r).$$

Alors

$$\rho(D_0) \leqslant \max\{\rho(D_1), \rho(D_2)\},$$

c'est une contradiction. Il est clair maintenant que $\psi \not\equiv 0$ n'est pas une solution de (4.4.1) parce que $\rho(\psi) < \infty$. Alors, d'après le Lemme 4.2 on obtient (4.4.16) et (4.4.17).

Chapitre 5

Croissance et oscillation de combinaison des solutions de certaines équations différentielles

5.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, nous allons poursuivre l'étude de certaines propriétés sur la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires.

Supposons que f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$f'' + A(z) f = 0 \tag{5.1.1}$$

et la combinaison des solutions

$$g_f = d_1 f_1 + d_2 f_2, \tag{5.1.2}$$

où A et d_j $(j = 1, 2)$ sont des fonctions entières d'ordre fini dans le plan complexe. Il est clair que si d_j $(j = 1, 2)$ sont des nombres complexes telles que $d_1 = cd_2$ où c est un nombre complexe, alors g_f est une solution de (5.1.1) ou a les mêmes propriétés des solutions.

Il est naturel de poser la question : Que peut-on dire sur les propriétés de g_f dans le cas $d_1 \neq cd_2$ où c est un nombre complexe, et sous quelles conditions g_f conserve les mêmes propriétés des solutions de (5.1.1)?

Dans [20] , Chen a étudié les points fixes et l'hyper-ordre des solutions des équations différentielles du second ordre à coefficients fonctions entières et a obtenu les résultats suivants.

Theorem A [20] *Pour toute solution non triviale f de*

$$f'' + A(z) f = 0,$$

on a

(i) *Si A est un polynôme avec* $\deg A = n \geqslant 1$, *alors*

$$\lambda(f - z) = \rho(f) = \frac{n+2}{2}. \tag{5.1.3}$$

(ii) *Si* A *est transcendante et* $\rho(A) < \infty$, *alors*

$$\lambda(f - z) = \rho(f) = \infty \tag{5.1.4}$$

et

$$\lambda_2(f - z) = \rho_2(f) = \rho(A). \tag{5.1.5}$$

Avant l'énoncé de nos résultats, on définit h et ψ par

$$h = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & d_2 & 0 \\ d_1' & d_1 & d_2' & d_2 \\ d_1'' - d_1 A & 2d_1' & d_2'' - d_2 A & 2d_2' \\ d_1''' - 3d_1' A - d_1 A' & d_1'' - d_1 A + 2d_1'' & d_2''' - 3d_2' A - d_2 A' & d_2'' - d_2 A + 2d_2'' \end{vmatrix} \tag{5.1.6}$$

et

$$\psi(z) = \frac{2\left(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1'\right)}{h} \varphi^{(3)} + \phi_2 \varphi'' + \phi_1 \varphi' + \phi_0 \varphi, \tag{5.1.7}$$

où $\varphi \not\equiv 0$ une fonction entière d'ordre fini et

$$\phi_2 = \frac{3d_2^2 d_1'' - 3d_1 d_2 d_2''}{h}, \tag{5.1.8}$$

$$\phi_1 = \frac{2d_1 d_2 d_2' A + 6d_2 d_1' d_2'' - 6d_2 d_2' d_1'' - 2d_2^2 d_1' A}{h}, \tag{5.1.9}$$

$$\begin{aligned} \phi_0 \;\; = \;\; & \frac{2d_2 d_1' d_2''' - 2d_1 d_2' d_2''' - 3d_1 d_2 d_2'' A - 3d_2 d_1'' d_2''}{h} \\ & + \frac{2d_1 d_2 d_2' A' - 4d_2 d_1' d_2' A - 6d_1' d_2' d_2'' + 3d_1 \left(d_2''\right)^2}{h} \\ & + \frac{4d_1 \left(d_2'\right)^2 A + 3d_2^2 d_1'' A + 6\left(d_2'\right)^2 d_1'' - 2d_2^2 d_1' A'}{h}. \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

L'objet de ce chapitre est d'étudier la contrôlabilité des solutions de (5.1.1). En fait, on va étudier la croissance et l'oscillation de $g_f = d_1 f_1 + d_2 f_2$ où f_1, f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (5.1.1), et d_1, d_2 sont des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles telles que $d_1 \neq c d_2$ où c est un nombre complexe, et on obtient les résultats suivants :

Théorème 5.1 [51] *Soit* $A(z)$ *une fonction entière transcendante d'ordre fini. Soient* $d_j(z)$ $(j = 1, 2)$ *des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles telles que*

$$\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \rho(A).$$

Si f_1, f_2 *sont deux solutions linéairement indépendantes de* (5.1.1), *alors la combinaison des solutions* (5.1.2) *satisfait*

$$\rho(g_f) = \rho(f_j) = \infty, \;\; (j = 1, 2) \tag{5.1.11}$$

et

$$\rho_2(g_f) = \rho(A). \tag{5.1.12}$$

Théorème 5.2 [51] *Sous les hypothèses du Théorème 5.1, soit* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *une fonction entière d'ordre fini telle que* $\psi(z) \not\equiv 0$. *Si* f_1, f_2 *sont deux solutions linéairement indépendantes de* $(5.1.1)$, *alors la combinaison des solutions* $(5.1.2)$ *satisfait*

$$\overline{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \rho(f_j) = \infty, \quad (j = 1, 2) \tag{5.1.13}$$

et

$$\overline{\lambda}_2(g_f - \varphi) = \lambda_2(g_f - \varphi) = \rho(A). \tag{5.1.14}$$

Théorème 5.3 [51] *Soit* $A(z)$ *un polynôme de* $\deg A = n$. *Soient* $d_j(z)$ $(j = 1, 2)$ *des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles telles que* $h \not\equiv 0$ *et*

$$\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \frac{n+2}{2}.$$

Si f_1, f_2 *sont deux solutions linéairement indépendantes de* $(5.1.1)$, *alors la combinaison des solutions de* $(5.1.2)$ *satisfait*

$$\rho(g_f) = \rho(f_j) = \frac{n+2}{2}, \quad (j = 1, 2) \tag{5.1.15}$$

Théorème 5.4 [51] *Sous les hypothèses du Théorème 5.3, soit* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *une fonction entière d'ordre* $\rho(\varphi) < \frac{n+2}{2}$ *telle que* $\psi(z) \not\equiv 0$. *Si* f_1, f_2 *sont deux solutions linéairement indépendantes de* $(5.1.1)$, *alors la combinaison des solutions* $(5.1.2)$ *satisfait*

$$\overline{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \frac{n+2}{2}. \tag{5.1.16}$$

5.2 Lemmes préliminaires

Lemme 5.1 [8, 19] *Soient* $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* f *est une solution méromorphe de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f = F \tag{5.2.1}$$

avec $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) = \rho$, *alors* f *satisfait*

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty, \tag{5.2.2}$$

et

$$\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \rho. \tag{5.2.3}$$

Ici, on donne un cas particulier du résultat obtenu par T. B. Cao, Z. X. Chen, X. M. Zheng et J. Tu dans [17] :

Lemme 5.2 *Soient* $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* f *est une solution méromorphe de l'équation* $(4.2.1)$ *avec*

$$\max\{\rho(A_j) \ \ (j = 0, 1, \cdots, k-1), \rho(F)\} < \rho(f) < +\infty,$$

alors

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f).$$

5.3 Preuve du Théorème 5.1.

Supposons que f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes $(5.1.1)$. Alors d'après le Théorème A

$$\rho(f_1) = \rho(f_2) = \infty \tag{5.3.1}$$

et

$$\rho_2(f_1) = \rho_2(f_2) = \rho(A). \tag{5.3.2}$$

Si on suppose que $d_1 = cd_2$ où c est un nombre complexe, alors d'après $(5.1.2)$ on a

$$g_f = d_1 f_1 + d_2 f_2 = d_2 (cf_1 + f_2).$$

Comme $f = cf_1 + f_2$ est une solution de $(5.1.1)$ et $\rho(d_2) < \rho(A)$, alors on a

$$\rho(g_f) = \rho(cf_1 + f_2) = \infty,$$

et

$$\rho_2(g_f) = \rho_2(cf_1 + f_2) = \rho(A).$$

Supposons maintenant que $d_1 \not\equiv cd_2$ où c est un nombre complexe. On a

$$g_f = d_1 f_1 + d_2 f_2. \tag{5.3.3}$$

En dérivant les deux côtés de l'équation $(5.3.3)$, on obtient

$$g'_f = d'_1 f_1 + d_1 f'_1 + d'_2 f_2 + d_2 f'_2. \tag{5.3.4}$$

En dérivant les deux côtés de l'équation $(5.3.4)$, on obtient

$$g''_f = d''_1 f_1 + 2d'_1 f'_1 + d_1 f''_1 + d''_2 f_2 + 2d'_2 f'_2 + d_2 f''_2. \tag{5.3.5}$$

En substituant $f''_j = -Af_j$ $(j = 1, 2)$ dans l'équation $(5.3.5)$, on trouve

$$g''_f = (d''_1 - d_1 A) f_1 + 2d'_1 f'_1 + (d''_2 - d_2 A) f_2 + 2d'_2 f'_2. \tag{5.3.6}$$

En dérivant les deux côtés de l'équation $(5.3.6)$ et en substituant $f''_j = -Af_j$ $(j = 1, 2)$, on obtient

$$\begin{aligned} g'''_f \;=\; & (d'''_1 - 3d'_1 A - d_1 A') f_1 + (d'_1 - d_1 A + 2d''_1) f'_1 \\ & + (d'''_2 - 3d'_2 A - d_2 A') f_2 + (d''_2 - d_2 A + 2d''_2) f'_2. \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

De $(5.3.3) - (5.3.6)$ on a

$$\left\{ \begin{array}{c} g_f = d_1 f_1 + d_2 f_2, \\ g'_f = d'_1 f_1 + d_1 f'_1 + d'_2 f_2 + d_2 f'_2, \\ g''_f = (d''_1 - d_1 A) f_1 + 2d'_1 f'_1 + (d''_2 - d_2 A) f_2 + 2d'_2 f'_2, \\ g'''_f = (d'''_1 - 3d'_1 A - d_1 A') f_1 + (d''_1 - d_1 A + 2d''_1) f'_1, \\ + (d'''_2 - 3d'_2 A - d_2 A') f_2 + (d''_2 - d_2 A + 2d''_2) f'_2, \end{array} \right. \tag{5.3.8}$$

Pour résoudre ce système d'équations, nous devons d'abord prouver que $h \not\equiv 0$. Par des calculs simples, on trouve

$$h = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & d_2 & 0 \\ d_1' & d_1 & d_2' & d_2 \\ d_1'' - d_1 A & 2d_1' & d_2'' - d_2 A & 2d_2' \\ d_1''' - 3d_1'A - d_1 A' & d_1'' - d_1 A + 2d_1'' & d_2''' - 3d_2'A - d_2 A' & d_2'' - d_2 A + 2d_2'' \end{vmatrix} \tag{5.3.9}$$

$$\begin{aligned} = & \left(4d_1^2(d_2')^2 + 4d_2^2(d_1')^2 - 8d_1d_2d_1'd_2'\right) A + 2d_1d_2d_1'd_2''' + 2d_1d_2d_2'd_1''' - 6d_1d_2d_1''d_2'' \\ & -6d_1d_1'd_2'd_2'' - 6d_2d_1'd_2'd_1'' + 6d_1(d_2')^2d_1'' + 6d_2(d_1')^2d_2'' - 2d_2^2d_1'd_1''' \\ & -2d_1^2d_2'd_2''' + 3d_1^2(d_2'')^2 + 3d_2^2(d_1'')^2. \end{aligned}$$

Pour montrer que $4d_1^2(d_2')^2 + 4d_2^2(d_1')^2 - 8d_1d_2d_1'd_2' \not\equiv 0$, on suppose que

$$d_1^2(d_2')^2 + d_2^2(d_1')^2 - 2d_1d_2d_1'd_2' = 0, \tag{5.3.10}$$

En divisant les deux côtés de l'équation (5.3.10) par $(d_1d_2)^2$, on obtient

$$\left(\frac{d_2'}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{d_1'}{d_1}\right)^2 - 2\frac{d_1'}{d_1}\frac{d_2'}{d_2} = 0, \tag{5.3.11}$$

ce qui est équivalent à

$$\left(\frac{d_1'}{d_1} - \frac{d_2'}{d_2}\right)^2 = 0, \tag{5.3.12}$$

ce qui implique que $d_1 = cd_2$ où c est un nombre complexe, c'est une contradiction. Comme $\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \rho(A)$ et $4d_1^2(d_2')^2 + 4d_2^2(d_1')^2 - 8d_1d_2d_1'd_2' \not\equiv 0$, alors

$$\rho(h) = \rho(A) > 0. \tag{5.3.13}$$

Ainsi $h \not\equiv 0$. Par la règle de Cramer, on a

$$f_1 = \frac{\begin{vmatrix} g_f & 0 & d_2 & 0 \\ g_f' & d_1 & d_2' & d_2 \\ g_f'' & 2d_1' & d_2'' - d_2 A & 2d_2' \\ g_f''' & d_1'' - d_1 A + 2d_1'' & d_2''' - 3d_2'A - d_2 A' & d_2'' - d_2 A + 2d_2'' \end{vmatrix}}{h}, \tag{5.3.14}$$

d'où

$$f_1 = \frac{2\left(d_1d_2d_2' - d_2^2d_1'\right)}{h} g_f^{(3)} + \phi_2 g_f'' + \phi_1 g_f' + \phi_0 g_f \tag{5.3.15}$$

où ϕ_j $(j = 0, 1, 2)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini définies dans (5.1.8) − (5.1.10). Supposons maintenant $\rho(g_f) < \infty$, alors d'après (5.3.15) on obtient $\rho(f_1) < \infty$, c'est une contradiction et $\rho(g_f) = \infty$. De (5.3.3) on a $\rho_2(g_f) \leq \rho(A)$, si on suppose que $\rho_2(g_f) < \rho(A)$, alors d'après (5.3.15) on obtient $\rho_2(f_1) < \rho(A)$, c'est une contradiction, donc $\rho_2(g_f) = \rho(A)$.

5.4 Preuve du Théorème 5.2.

D'après le Théorème 5.1 on a $\rho(g_f) = \infty$ et $\rho_2(g_f) = \rho(A)$. Posons $w(z) = d_1 f_1 + d_2 f_2 - \varphi$. Comme $\rho(\varphi) < \infty$ on a $\rho(w) = \rho(g_f) = \infty$. Pour prouver que $\overline{\lambda}(g_f - \varphi) = \infty$, il suffit de montrer que $\overline{\lambda}(w) = \infty$. De $g_f = w + \varphi$ et d'après (5.3.15)

$$f_1 = \frac{2(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1')}{h} w^{(3)} + \phi_2 w'' + \phi_1 w' + \phi_0 w + \psi, \tag{5.3.16}$$

où

$$\psi = \frac{2(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1')}{h} \varphi^{(3)} + \phi_2 \varphi'' + \phi_1 \varphi' + \phi_0 \varphi. \tag{5.3.17}$$

En substituant (5.3.16) dans l'équation (5.1.1), on obtient

$$\frac{2(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1')}{h} w^{(5)} + \sum_{j=0}^{4} \beta_j w^{(j)} = -(\psi'' + A\psi) = B,$$

où β_j $(j = 0, ..., 4)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Comme $\psi \not\equiv 0$ et $\rho(\psi) < \infty$, il s'ensuit que ψ n'est pas une solution de (5.1.1), ce qui implique que $B \not\equiv 0$. En appliquant le Lemme 5.1 on obtient (5.1.13) et (5.1.14).

5.5 Preuve du Théorème 5.3.

Supposons que f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes. Alors d'après le Théorème A

$$\rho(f_1) = \rho(f_2) = \frac{n+2}{2}. \tag{5.3.18}$$

Par le même raisonnement du Théorème 5.1, on a

$$h = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & d_2 & 0 \\ d_1' & d_1 & d_2' & d_2 \\ d_1'' - d_1 A & 2d_1' & d_2'' - d_2 A & 2d_2' \\ d_1''' - 3d_1' A - d_1 A' & d_1'' - d_1 A + 2d_1'' & d_2''' - 3d_2' A - d_2 A' & d_2'' - d_2 A + 2d_2'' \end{vmatrix}. \tag{5.3.19}$$

Comme $h \not\equiv 0$ et par la règle de Cramer, on a

$$f_1 = \frac{\begin{vmatrix} g_f & 0 & d_2 & 0 \\ g_f' & d_1 & d_2' & d_2 \\ g_f'' & 2d_1' & d_2'' - d_2 A & 2d_2' \\ g_f''' & d_1'' - d_1 A + 2d_1'' & d_2''' - 3d_2' A - d_2 A' & d_2'' - d_2 A + 2d_2'' \end{vmatrix}}{h}, \tag{5.3.20}$$

d'où

$$f_1 = \frac{2(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1')}{h} g_f^{(3)} + \phi_2 g_f'' + \phi_1 g_f' + \phi_0 g_f, \tag{5.3.21}$$

où ϕ_j $(j = 0, 1, 2)$ sont des fonctions méromorphes avec $\rho(\phi_j) < \frac{n+2}{2}$ $(j = 0, 1, 2)$ définies dans $(5.1.8) - (5.1.10)$. D'après (5.3.3) on a $\rho(g_f) \leq \frac{n+2}{2}$, si on suppose que $\rho(g_f) < \frac{n+2}{2}$, alors d'après (5.3.15) on obtient $\rho(f_1) < \frac{n+2}{2}$, c'est une contradiction, donc $\rho(g_f) = \frac{n+2}{2}$.

5.6 Preuve du Théorème 5.4.

D'après le Théorème 5.3 on a $\rho(g_f) = \frac{n+2}{2}$. Posons $w(z) = d_1 f_1 + d_2 f_2 - \varphi$. Comme $\rho(\varphi) < \rho(g_f)$, alors $\rho(w) = \rho(g_f) = \frac{n+2}{2}$.
Pour prouver que $\overline{\lambda}(g_f - \varphi) = \frac{n+2}{2}$, il suffit de montrer que $\overline{\lambda}(w) = \frac{n+2}{2}$. D'aprés $g_f = w + \varphi$ et de (5.3.15) on a

$$f_1 = \frac{2\left(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1'\right)}{h} w^{(3)} + \phi_2 w'' + \phi_1 w' + \phi_0 w + \psi, \tag{5.3.22}$$

où

$$\psi = \frac{2\left(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1'\right)}{h} \varphi^{(3)} + \phi_2 \varphi'' + \phi_1 \varphi' + \phi_0 \varphi. \tag{5.3.23}$$

En substituant (5.3.16) dans l'équation (5.1.1), on obtient

$$\frac{2\left(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1'\right)}{h} w^{(5)} + \sum_{j=0}^{4} \beta_j w^{(j)} = -\left(\psi'' + A\psi\right) = B, \tag{5.3.24}$$

où β_j $(j = 0, ..., 4)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre $\rho\left(\beta_j\right) < \frac{n+2}{2}$. Comme $\psi \not\equiv 0$ et $\rho(\psi) < \frac{n+2}{2}$, il s'ensuit que ψ n'est pas une solution de (5.1.1), ce qui implique que $B \not\equiv 0$. En appliquant le Lemme 5.2 on obtient (5.1.16).

Chapitre 6

Croissance et oscillation des polynômes différentiels à coefficients fonctions analytiques dans le disque unité

6.1 Introduction et résultats

La théorie de l'oscillation complexe des solutions d'équations différentielles linéaires dans le plan complexe $\mathbb{C}$ a été lancée par Bank et Laine [5, 6]. Plus tard, de nombreux résultats importants ont été obtenus sur la théorie de l'oscillation des polynômes différentiels générés par les solutions des équations différentielles dans $\mathbb{C}$ (voir [10, 22, 27, 49, 77]) .

Il est naturel de se poser la question : *Que peut-on-dire sur le problème de l'oscillation complexe des polynômes différentiels générés par les solutions des équations différentielles dans le disque unité* $\Delta = \{z : |z| < 1\}$? Récemment dans [15] , Cao et Yi ont obtenus des résultats sur des solutions analytiques de l'équation différentielle

$$f'' + Af = 0,$$

dans Δ. Dans [9, 13, 14, 15, 38, 71, 82] quelques résultats sur la croissance et l'oscillation des solutions analytiques des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur ont été obtenus. Dans ce chapitre, on s'intéresse à ce problème. Tout d'abord, on donne quelques résultats de base concernant le développement de la théorie des équations différentielles dans le disque unité $\Delta = \{z : |z| < 1\}$.

Considérons l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0, \tag{6.1.1}$$

où $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$ des fonctions analytiques dans Δ. Dans [15] , Cao et Yi ont étudié la croissance, l'hyper-ordre et les points fixes des solutions de l'équation ci-dessus et ont obtenu les résultats suivants.

Théorème A ([15]) *Soient* $A_0(z),..., A_{k-1}(z)$ *les coefficients analytiques dans* Δ *de* $(6.1.1)$. *Si* $\max\{\rho(A_j) : j = 1, ..., k-1\} < \rho(A_0)$, *alors* $\rho(A_0) \leqslant \rho_2(f) \leqslant \alpha_M$ *pour toutes les solutions* $f \not\equiv 0$ *de* $(6.1.1)$, *où* $\alpha_M = \max\{\rho_M(A_j) : j = 0, ..., k-1\}$.

Théorème B ([15]) *Sous les hypothèses du Théorème A, si* $\rho_2(A_j) < \infty$ $(j = 0, ..., k-1)$, *alors chaque solution* $f \not\equiv 0$ *de* $(6.1.1)$ *satisfait* $\overline{\lambda}_2(f - z) = \rho_2(f)$.

Dans [28], A. El Farissi, B. Belaidi et Z. Latreuch ont généralisé le Théorème A et le Théorème B pour les équations différentielles du deuxième ordre et ont obtenu le résultat suivant.

Théorème C ([28]) *Soient* $A_0(z)$, $A_1(z)$, d_0, d_1, d_2 *des fonctions analytiques dans* Δ *telles que* $\max\{\rho(A_1), \rho(d_j) \ \ (j = 0, 1, 2)\} < \rho(A_0) = \rho \ (0 < \rho < \infty)$, $\tau(A_0) = \tau \ (0 < \tau < \infty)$, *et soit* $\varphi \not\equiv 0$ *une fonction analytique dans* Δ *avec* $\rho(\varphi) < \infty$. *Si* $f \not\equiv 0$ *est une solution de l'équation*

$$f'' + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0,$$

alors le polynôme différentiel $g_f = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ *satisfait*

$$\overline{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \rho(g_f) = \rho(f) = \infty,$$

$$\alpha_M \geqslant \overline{\lambda}_2(g_f - \varphi) = \lambda_2(g_f - \varphi) = \rho_2(g_f) = \rho_2(f) \geqslant \rho(A_0),$$

où $\alpha_M = \max\{\rho_M(A_j) : j = 0, 1\}$.

Dans [70], Tu et Yi ont obtenus le résultat suivant dans le plan complexe.

Theorem D ([70]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ des *fonctions entières telles que* $\rho(A_0) = \rho \ (0 < \rho < \infty)$, $\tau(A_0) = \tau \ (0 < \tau < \infty)$, *et soit* $\rho(A_j) \leqslant \rho$, $\tau(A_j) < \tau$ *si* $\rho(A_j) = \rho$ $(j = 0, ..., k-1)$. *Alors chaque solution* $f \not\equiv 0$ *de* $(6.1.1)$ *satisfait* $\rho_2(f) = \rho(A_0)$.

En outre, ils ont posé la question suivante " *Peut-on obtenir le même résultat que le théorème D lorsque tous les coefficients de* $(6.1, 1)$ *sont analytiques dans le disque unité* $\{z : |z| < 1\}$ *?"*

6.2 Sur le cas d'ordre infini

Le but principal de cette section est d'étudier la croissance, l'oscillation et la relation entre les fonctions de petite croissance et les polynômes différentiels générés par les solutions des équations différentielles du second ordre lorsque les solutions sont d'ordre infini et les coefficients ayant le même ordre. En outre, on va répondre à la question de Tu et Yi (voir le Lemme 4.8).

Considérons l'équation différentielle

$$f'' + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0, \tag{6.2.1}$$

où $A_0 \not\equiv 0$, A_1 sont des fonctions analytiques dans le disque unité $\Delta = \{z : |z| < 1\}$. Il est clair que toutes les solutions de l'équation (6.2.1) sont des fonctions analytiques dans

Δ et qu'il y a exactement deux solutions linéairement indépendantes de (6.1.2) (voir [37]). Notons par

$$\alpha_0 = d_0 - d_2 A_0,\ \beta_0 = d_2 A_0 A_1 - (d_2 A_0)' - d_1 A_0 + d_0', \tag{6.2.2}$$

$$\alpha_1 = d_1 - d_2 A_1,\ \beta_1 = d_2 A_1^2 - (d_2 A_1)' - d_1 A_1 - d_2 A_0 + d_0 + d_1', \tag{6.2.3}$$

$$h = \alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1 \tag{6.2.4}$$

et

$$\psi(z) = \frac{\alpha_1 \varphi' - \beta_1 \varphi}{h}, \tag{6.2.5}$$

où d_0, d_1, d_2, φ sont des fonctions analytiques dans Δ d'ordre fini. On obtient les résultats suivants.

Théorème 6.1 [53] *Soient $A_0 \not\equiv 0, A_1$ des fonctions analytiques dans Δ telles que $\rho(A_0) = \rho\ (0 < \rho < \infty)$, $\tau(A_0) = \tau\ (0 < \tau < \infty)$, et soit $\rho(A_0) > \rho(A_1)$ et $\tau(A_0) > \tau(A_1)$ si $\rho(A_0) = \rho(A_1)$. Soient d_0, d_1, d_2 des fonctions analytiques dans Δ non toutes identiquement nulles avec $\max\{\rho(d_j)\ \ (j = 0, 1, 2)\} < \rho(A_0)$. Si $f \not\equiv 0$ est une solution de (6.2.1), alors le polynôme différentiel $g_f = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ satisfait*

$$\rho(g_f) = \rho(f) = \infty \tag{6.2.6}$$

et

$$\alpha_M \geqslant \rho_2(g_f) = \rho_2(f) \geqslant \rho(A_0), \tag{6.2.7}$$

où $\alpha_M = \max\{\rho_M(A_j) : j = 0, 1\}$.

Théorème 6.2 [53] *Soient $A_0 \not\equiv 0, A_1$ des fonctions analytiques dans Δ telles que $\rho(A_0) = \rho\ (0 < \rho < \infty)$, $\tau(A_0) = \tau\ (0 < \tau, \rho < \infty)$, $\rho(A_0) = \rho(A_1)$ et $\tau(A_0) > \tau(A_1)$. Soient d_0, d_1, d_2 des fonctions analytiques dans Δ qui ne sont pas toutes égales à zéro avec*

$$\max\{\rho(d_j)\ \ (j = 0, 1, 2)\} < \rho(A_0),$$

et soit $\varphi \not\equiv 0$ une fonction analytique dans Δ d'ordre fini telle que $\psi \not\equiv 0$. Si $f \not\equiv 0$ est une solution de (6.2.1), alors le polynôme différentiel $g_f = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ satisfait

$$\overline{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \rho(g_f) = \rho(f) = \infty \tag{6.2.8}$$

et

$$\alpha_M \geqslant \overline{\lambda}_2(g_f - \varphi) = \lambda_2(g_f - \varphi) = \rho_2(g_f) = \rho_2(f) \geqslant \rho(A_0), \tag{6.2.9}$$

où $\alpha_M = \max\{\rho_M(A_j) : j = 0, 1\}$.

Remarque 6.1 *La condition $\rho(A_0) = \rho(A_1)$ et $\tau(A_0) > \tau(A_1)$ ne garantit pas que ψ n'est pas une solution triviale de l'équation* (6.2.1)*. En effet, si on prend par exemple l'équation différentielle*

$$f'' + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0, \tag{6.2.10}$$

où

$$A_1(z) = \exp\left\{(1-z)^{-\beta}\right\} \quad (\beta > 1) \tag{6.2.11}$$

et

$$A_0(z) = \exp\left\{2(1-z)^{-\beta}\right\} \quad (\beta > 1), \tag{6.2.12}$$

alors il est évident de voir que $\tau(A_0) = 2\tau(A_1) > \tau(A_1)$. Posons $d_1 = d_0 \equiv 0$, $d_2 = 1$ et $\varphi(z) = \exp\left\{(1-z)^{-\beta}\right\}$, alors par des calculs simples, on trouve

$$\psi(z) = \frac{\alpha_1 \varphi' - \beta_1 \varphi}{h} \equiv 0. \tag{6.2.13}$$

Dans ce que suit, nous obtenons un résultat sans la condition supplémentaire $\psi \not\equiv 0$.

Corollaire 6.1 [53] *Soient $A_0 \not\equiv 0, A_1$ des fonctions analytiques dans Δ telles que $\rho(A_0) = \rho$ $(0 < \rho < \infty)$, $\tau(A_0) = \tau$ $(0 < \tau < \infty)$, et soit $\rho(A_0) > \rho(A_1)$ et $\tau(A_0) > 2\tau(A_1)$ si $\rho(A_0) = \rho(A_1)$. Soient d_0, d_1, d_2 des fonctions analytiques dans Δ non identiquement nulles avec $\max\{\rho(d_j)\ (j = 0, 1, 2)\} < \rho(A_0)$. Si $f \not\equiv 0$ est une solution de* (6.2.1)*, alors le polynôme différentiel $g_f = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ satisfait*

$$\overline{\lambda}(g_f - z) = \lambda(g_f - z) = \rho(g_f) = \rho(f) = \infty \tag{6.2.14}$$

et

$$\alpha_M \geqslant \overline{\lambda}_2(g_f - z) = \lambda_2(g_f - z) = \rho_2(g_f) = \rho_2(f) \geqslant \rho(A_0), \tag{6.2.15}$$

où $\alpha_M = \max\{\rho_M(A_j) : j = 0, 1\}$.

6.3 Sur le cas d'ordre fini

Il est naturel de se poser la question "*Que peut-on dire sur la croissance, l'oscillation et la relation entre les fonctions de petite croissance et les polynômes différentiels générés par les solutions des équations différentielles du second ordre lorsque les solutions sont d'ordre fini ?*"
Dans cette section nous tentons de trouver une réponse. Considérons l'équation différentielle

$$f'' + A_1 f' + A_0 f = F, \tag{6.3.1}$$

où $A_0 \not\equiv 0$, A_1 et F sont des fonctions analytiques dans le disque unité Δ. Avant l'énoncé de nos résultats, notons par

$$\eta(z)=\frac{\alpha_1\left(\varphi'-(d_2F)'-\alpha_1F\right)-\beta_1(\varphi-d_2F)}{h},\tag{6.3.2}$$

où d_j $(j=0,1,2)$ et φ sont des fonctions analytiques dans Δ d'ordre fini. On obtient les résultats suivants.

Théorème 6.3 [53] *Soient $A_1,\ A_0\not\equiv 0,\ F$ des fonctions analytiques d'ordre fini dans Δ, et soient d_0,d_1,d_2 des fonctions analytiques d'ordre fini dans Δ non toutes identiquement nulles avec $h\not\equiv 0$, où h est défini dans* (6.2.4). *Si f est une solution d'ordre fini de* (6.3.1) *telle que*

$$\max\left\{\rho(A_j)\quad(j=0,1),\rho(d_j)\quad(j=0,1,2),\rho(F)\right\}<\rho(f),\tag{6.3.3}$$

alors le polynôme différentiel $g_f=d_2f''+d_1f'+d_0f$ satisfait

$$\rho(g_f)=\rho(f).\tag{6.3.4}$$

Remarque 6.2 *La condition* (6.3.3) *est nécessaire car si l'on considère l'équation différentielle*

$$f''-z\exp\left\{\left(\frac{1}{1-z}\right)^2\right\}f'+\exp\left\{\left(\frac{1}{1-z}\right)^2\right\}f=\exp\left\{\left(\frac{1}{1-z}\right)^2\right\},\tag{6.3.5}$$

alors il est facile de voir que $f(z)=z+1$ est une solution de (6.3.5) *et en prenant $d_j=\exp\left\{\left(\frac{1}{1-z}\right)^2\right\}$ $(j=0,1,2)$, on obtient que $\rho(g_f)=1>\rho(f)=0$.*

Remarque 6.3 *Dans le Théorème 6.1, si nous n'avons pas la condition $h\not\equiv 0$, alors la conclusion du Théorème 6.1 n'est pas réalisée. Par exemple, si $d_2(z)\not\equiv 0$ est une fonction analytique d'ordre fini dans Δ et $d_0(z)=A_0(z)d_2(z)$, $d_1(z)=A_1(z)d_2(z)$, alors $h\equiv 0$ et $g_f=F(z)d_2(z)$ avec $\rho(g_f)=\rho(F(z)d_2(z))<\rho(f)$.*

Théorème 6.4 [53] *Sous les hypothèses du Théorème 6.1, soit $\varphi(z)$ une fonction analytique dans Δ avec $\rho(\varphi)<\rho(f)$ telle que $\eta(z)$ n'est pas une solution de* (6.3.1). *Si f est une solution d'ordre fini de* (6.3.1) *vérifiant* (6.3.3), *alors le polynôme différentiel $g_f=d_2f''+d_1f'+d_0f$ satisfait*

$$\overline{\lambda}(g_f-\varphi)=\lambda(g_f-\varphi)=\rho(f).\tag{6.3.6}$$

Remarque 6.4 *Dans le Théorème 6.4, si nous n'avons pas la condition $\eta(z)$ n'est pas une solution de* (6.3.1), *alors la conclusion du Théorème 6.4 n'est pas réalisée. Par exemple, les fonctions $f_1(z)=2-z$ et $f_2(z)=1+(1-z)\exp\frac{1}{(1-z)^p}$, où $p>1$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation*

$$f'' + A_1(z) f' + A_0(z) f = -\frac{p}{(1-z)^{p+2}} - \frac{p-1}{(1-z)^2}, \tag{6.3.7}$$

où

$$A_0(z) = -\frac{p}{(1-z)^{p+2}} - \frac{p-1}{(1-z)^2},\ A_1(z) = -\frac{p}{(1-z)^{p+1}} - \frac{p-1}{(1-z)}.$$

Il est clair que $f = \frac{f_1+f_2}{2}$ *est une solution de* (6.3.7). *Posons* $d_2 = d_1 \equiv 0$ et $d_0 = \frac{1}{1-z}$. *Alors* $g_f = d_0 f$, $h = -d_0^2$, $\eta(z) = \frac{\varphi}{d_0}$ *et* f *satisfait la condition* (6.3.3). *Si on prend* $\varphi = d_0 \frac{(f_1+1)}{2}$, *alors* $\rho(\varphi) = 0 < \rho(f) = p-1$, $\eta(z) = \frac{f_1+1}{2}$ *est une solution de* (6.3.7) *et on trouve*

$$\lambda(g_f - \varphi) = \lambda\left(d_0 f - d_0 \frac{(f_1+1)}{2}\right) = \lambda\left(d_0 \frac{(f_2-1)}{2}\right)$$
$$= \lambda\left(\frac{1}{2}\exp\frac{1}{(1-z)^p}\right) = 0.$$

D'autre part,

$$\rho(g_f) = \rho(d_0 f) = \rho\left(d_0 \frac{(f_1+f_2)}{2}\right)$$
$$= \rho\left(\frac{3-z}{2(1-z)} + \frac{1}{2}\exp\frac{1}{(1-z)^p}\right) = p-1.$$

6.4 Lemmes préliminaires

Lemme 6.1 [15] *Soit* $f(z)$ *une solution méromorphe de l'équation*

$$L(f) = f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_0(z) f = F(z)\ (k \geqslant 1), \tag{6.4.1}$$

où $A_0, ..., A_{k-1}, F \not\equiv 0$ *sont des fonctions méromorphes dans* Δ *telles que*

$$\max\{\rho_i(F), \rho_i(A_j)(j = 0, ..., k-1)\} < \rho_i(f),$$

où $i = 1, 2$. *Alors on a*

$$\overline{\lambda}_i(f) = \lambda_i(f) = \rho_i(f)\ \ (i = 1, 2). \tag{6.4.2}$$

Lemme 6.2 [13] *Soient* f *et* g *des fonctions méromorphes dans* Δ. *Alors on a*

$$\rho(f+g) \leqslant \max\{\rho(f), \rho(g)\} \tag{6.4.3}$$

et

$$\rho\left(fg\right)\leqslant\max\left\{\rho\left(f\right),\rho\left(g\right)\right\}. \tag{6.4.4}$$

De plus, si $\rho\left(f\right)>\rho\left(g\right)$, *alors on obtient*

$$\rho\left(f+g\right)=\rho\left(fg\right)=\rho\left(f\right). \tag{6.4.5}$$

Lemme 6.3 [56] *Soient* f *et* g *des fonctions méromorphes dans* Δ *telles que* $0<\rho\left(f\right),\rho\left(g\right)<\infty$ *et* $0<\tau\left(f\right),\tau\left(g\right)<\infty$. *Alors on a*

(i) *Si* $\rho\left(f\right)>\rho\left(g\right)$, *alors on obtient*

$$\tau\left(f+g\right)=\tau\left(fg\right)=\tau\left(f\right). \tag{6.4.6}$$

(ii) *Si* $\rho\left(f\right)=\rho\left(g\right)$ *et* $\tau\left(f\right)\neq\tau\left(g\right)$, *alors on trouve*

$$\rho\left(f+g\right)=\rho\left(fg\right)=\rho\left(f\right)=\rho\left(g\right). \tag{6.4.7}$$

Lemme 6.4 [37] *Soit* f *une fonction méromorphe dans* Δ, *et soit* $k\geqslant1$ *un entier. Alors*

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=S\left(r,f\right), \tag{6.4.8}$$

où $S\left(r,f\right)=O\left(\log^{+}T\left(r,f\right)\right)+O\left(\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)$, *pour* $|z|=r\notin E_0$ *oú* $E_0\subset[0,1)$ *avec* $\int_{E_0}\frac{dr}{1-r}<\infty$. *Si* f *est d'ordre fini, alors*

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=O\left(\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right). \tag{6.4.9}$$

Lemme 6.5 [4] *Soient* $g:(0,1)\rightarrow\mathbb{R}$ *et* $h:(0,1)\rightarrow\mathbb{R}$ *des fonctions monotones croissantes telles que* $g\left(r\right)\leqslant h\left(r\right)$ *en dehors d'un ensemble exceptionnel* $E_1\subset[0,1)$ *avec* $\int_{E_1}\frac{dr}{1-r}<\infty$. *Alors il existe une constante* $d\in(0,1)$ *telle que si* $s\left(r\right)=1-d\left(1-r\right)$, *alors* $g\left(r\right)\leqslant h\left(s\left(r\right)\right)$ *pour tout* $r\in[0,1)$.

Lemme 6.6 [39] *Soit* f *une solution de l'équation*

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+...+A_0(z)f=0, \tag{6.4.10}$$

où les coefficients $A_j\left(z\right)$ $(j=0,...,k-1)$ *sont des fonctions analytiques dans le disque* $\Delta_R=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|<R\right\}$, $0<R\leqslant\infty$. *Soit* $n_c\in\{1,...,k\}$ *le nombre de coefficients non nuls* $A_j\left(z\right)$ $(j=0,...,k-1)$, *et soient* $\theta\in[0,2\pi[$ *et* $\varepsilon>0$. *Si* $z_\theta=\nu e^{i\theta}\in\Delta_R$ *telle que* $A_j\left(z_\theta\right)\neq0$ *pour un certain* $j=0,...,k-1$, *alors pour tout* $\nu<r<R$,

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\leqslant C\exp\left(n_c\int_{\nu}^{r}\max_{j=0,\ldots,k-1}\left|A_j\left(te^{i\theta}\right)\right|^{\frac{1}{k-j}}dt\right), \tag{6.4.11}$$

où $C>0$ *est une constante satisfaisant*

$$C\leqslant(1+\varepsilon)\max_{j=0,\ldots,k-1}\left(\frac{\left|f^{(j)}\left(z_\theta\right)\right|}{\left(n_c\right)^j\max\limits_{n=0,\ldots,k-1}\left|A_n\left(z_\theta\right)\right|^{\frac{j}{k-n}}}\right). \tag{6.4.12}$$

Lemme 6.7 [53] *Soit f une fonction méromorphe dans Δ d'ordre ρ $(0 < \rho < \infty)$ et de type τ $(0 < \tau < \infty)$. Alors pour tout $\beta < \tau$ donné, il existe un sous-ensemble E_2 de $[0,1)$ de mesure logarithmique infini tel que $T(r,f) > \beta\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho}$ pour tout $r \in E_2$.*

Lemme 6.8 [53] *Soient A_0 $(\not\equiv 0)$, A_1 des fonctions analytiques dans Δ telles que $\rho(A_0) = \rho$ $(0 < \rho < \infty)$, $\tau(A_0) = \tau$ $(0 < \tau < \infty)$, et soit $\rho(A_0) > \rho(A_1)$ et $\tau(A_0) > \tau(A_1)$ si $\rho(A_0) = \rho(A_1)$. Si $f \not\equiv 0$ est une solution de* (6.2.1)*, alors $\rho(f) = \infty$ et*

$$\alpha_M \geqslant \rho_2(f) \geqslant \rho(A_0), \tag{6.4.13}$$

où $\alpha_M = \max\{\rho_M(A_j) : j = 0,1\}$.
Preuve. Si $\rho(A_0) > \rho(A_1)$, alors on obtient le résultat par le Theorem A. Prouvons seulement le cas lorsque $\rho(A_0) = \rho(A_1) = \rho$ et $\tau(A_0) > \tau(A_1)$. Comme $f \not\equiv 0$, alors de (6.2.1) ,on a

$$A_0 = -\left(\frac{f''}{f} + A_1\frac{f'}{f}\right). \tag{6.4.14}$$

Supposons que f est d'ordre fini. Alors d'après le Lemme 6.4

$$T(r,A_0) \leqslant T(r,A_1) + O\left(\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) \tag{6.4.15}$$

ce qui implique la contradiction

$$\tau(A_0) \leqslant \tau(A_1). \tag{6.4.16}$$

Donc $\rho(f) = \infty$. Par l'inégalité (6.4.11), d'après le Lemme 6.7

$$\rho_{M,2}(f) \leqslant \alpha_M \tag{6.4.17}$$

et comme $\rho_{M,2}(f) = \rho_2(f)$, on obtient

$$\rho_2(f) \leqslant \alpha_M. \tag{6.4.18}$$

D'autre part, comme $\rho(f) = \infty$, alors d'après le Lemme 6.4

$$T(r,A_0) \leqslant T(r,A_1) + O\left(\log^+ T(r,f)\right) + O\left(\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) \tag{6.4.19}$$

pour tout $r \notin E_0 \subset [0,1)$ avec $\int_{E_0}\frac{dr}{1-r} < \infty$. D'après $\tau(A_0) > \tau(A_1)$, choisissons α_0, α_1 satisfaisants $\tau(A_0) > \alpha_0 > \alpha_1 > \tau(A_1)$ teles que pour $r \to 1^-$, on a

$$T(r,A_1) \leqslant \alpha_1\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho}. \tag{6.4.20}$$

D'après le Lemme 6.7, il existe un sous-ensemble $E_1 \subset [0,1)$ de mesure logarithmique infini tel que

$$T(r,A_0) > \alpha_0\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho}. \tag{6.4.21}$$

De (6.4.19) – (6.4.21) on obtient pour tout $r \in E_1 - E_0$

$$(\alpha_0-\alpha_1)\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\rho}\leqslant O\left(\log^{+}T(r,f)\right)+O\left(\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right). \tag{6.4.22}$$

En utilisant (6.4.22) et le Lemme 6.5, on obtient

$$\rho(A_0)\leqslant\rho_2(f).$$

Donc $\rho(A_0)\leqslant\rho_2(f)\leqslant\alpha_M$.

6.5 Preuve du Théorème 6.1.

D'après le Lemme 6.8, on a $\rho(f)=\infty$ et

$$\alpha_M\geqslant\rho_2(f)\geqslant\rho(A_0). \tag{6.5.1}$$

En substituant $f''=-A_1f'-A_0f$ dans g_f, on trouve

$$g_f=(d_1-d_2A_1)f'+(d_0-d_2A_0)f. \tag{6.5.2}$$

En dérivant les deux côtés de l'équation (6.5.2) et en remplaçant f'' par $f''=-A_1f'-A_0f$, on obtient

$$g_f'=\left[d_2A_1^2-(d_2A_1)'-d_1A_1-d_2A_0+d_0+d_1'\right]f'$$

$$+\left[d_2A_0A_1-(d_2A_0)'-d_1A_0+d_0'\right]f. \tag{6.5.3}$$

En utilisant (6.2.2) et (6.2.3), nous obtenons de (6.5.2) et (6.5.3)

$$\alpha_1f'+\alpha_0f=g_f, \tag{6.5.4}$$

$$\beta_1f'+\beta_0f=g_f'. \tag{6.5.5}$$

Posons

$$h=\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1=(d_1-d_2A_1)\left(d_2A_0A_1-(d_2A_0)'-d_1A_0+d_0'\right)$$

$$-(d_0-d_2A_0)\left(d_2A_1^2-(d_2A_1)'-d_1A_1-d_2A_0+d_0+d_1'\right). \tag{6.5.6}$$

D'abord, supposons que $d_2(z)\not\equiv 0$. De (6.5.6) on peut écrire

$$h=-d_2^2A_0^2-d_0d_2A_1^2+\left(d_1'd_2+2d_0d_2-d_2'd_1-d_1^2\right)A_0$$
$$+(d_2'd_0-d_2d_0'+d_0d_1)A_1+d_1d_2A_0A_1$$
$$-d_1d_2A_0'+d_0d_2A_1'+d_2^2A_0'A_1-d_2^2A_0A_1'+d_0'd_1-d_0d_1'-d_0^2.$$

D'après $d_2\not\equiv 0$, $A_0\not\equiv 0$, le Lemme 6.2 et le Lemme 6.3 on a $\rho(h)=\rho(A_0)>0$, donc $h\not\equiv 0$. Maintenant, supposons que $d_2\equiv 0$, $d_1\not\equiv 0$ ou $d_2\equiv 0$, $d_1\equiv 0$ et $d_0\not\equiv 0$. En utilisant un raisonnement similaire à celui ci-dessus, on obtient $h\not\equiv 0$. D'après $h\not\equiv 0$ et (6.5.4) – (6.5.6), on trouve

$$f = \frac{\alpha_1 g_f' - \beta_1 g_f}{h}. \tag{6.5.7}$$

De (6.5.2) on a $\rho_i(g_f) \leqslant \rho_i(f)$ $(i=1,2)$ et d'après (6.5.7) on obtient $\rho_i(f) \leqslant \rho_i(g_f)$ $(i=1,2)$. Alors, $\rho_i(g_f) = \rho_i(f)$ $(i=1,2)$.

6.6 Preuve du Théorème 6.2.

D'après le Lemme 6.8 on a $\rho(f) = \infty$ et $\rho(A_0) \leqslant \rho_2(f) \leqslant \max\{\rho_M(A_0), \rho_M(A_1)\}$ et par le Théorème 6.1 on trouve $\rho(g_f) = \rho(f) = \infty$ et $\rho_2(g_f) = \rho_2(f)$. Posons $w(z) = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f - \varphi$. Alors, d'après $\rho(\varphi) < \infty$, on a $\rho(w) = \rho(g_f) = \rho(f) = \infty$ et $\rho_2(w) = \rho_2(g_f) = \rho_2(f)$. Pour prouver que $\overline{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \rho(f) = \infty$ et $\overline{\lambda}_2(g_f - \varphi) = \lambda_2(g_f - \varphi) = \rho_2(f)$, il suffit de montrer que $\overline{\lambda}(w) = \lambda(w) = \rho(f) = \infty$ et $\overline{\lambda}_2(w) = \lambda_2(w) = \rho_2(f)$. En utilisant $g_f = w + \varphi$, on trouve de (6.5.7)

$$f = \frac{\alpha_1 w' - \beta_1 w}{h} + \psi, \tag{6.5.8}$$

où

$$\psi(z) = \frac{\alpha_1 \varphi' - \beta_1 \varphi}{h}. \tag{6.5.9}$$

En substituant (6.5.8) dans l'équation (6.2.1), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_1}{h} w''' + \phi_2 w'' + \phi_1 w' + \phi_0 w \\ &= -\left(\psi'' + A_1(z)\psi' + A_0(z)\psi\right) = A, \end{aligned} \tag{6.5.10}$$

où ϕ_j $(j=0,1,2)$ sont des fonctions méromorphes avec $\rho(\phi_j) < \infty$ $(j=0,1,2)$. Comme $\rho(\psi) < \infty$ et $\psi \not\equiv 0$, il s'ensuit que $A \not\equiv 0$. D'après le Lemme 6.1, on obtient $\overline{\lambda}_i(w) = \lambda_i(w) = \rho_i(f)$ $(i=1,2)$, i.e., $\overline{\lambda}_i(g_f - \varphi) = \lambda_i(g_f - \varphi) = \rho_i(f)$ $(i=1,2)$.

6.7 Preuve du Corollaire 6.1.

Posons $\varphi(z) = z$. Maintenant, montrons que $\psi(z) \not\equiv 0$. Supposons que $\psi(z) \equiv 0$. Alors d'après (6.5.9), on obtient

$$d_1 - d_2 A_1 - \left(d_2 A_1^2 - (d_2 A_1)' - d_1 A_1 - d_2 A_0 + d_0 + d_1'\right) z \equiv 0.$$

En utilisant les Lemmes 6.2-6.3 et le même raisonnement que dans la preuve du Théorème 6.1, nous obtenons une contradiction. Par conséquent $\psi(z) \not\equiv 0$. Comme $\psi(z) \not\equiv 0$ et $\rho(\psi) < \infty$, il s'ensuit que ψ n'est pas une solution de (6.2.1). D'après le Théorème C et le Théorème 6.2, on obtient

$$\overline{\lambda}(g_f - z) = \lambda(g_f - z) = \rho(g_f) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\alpha_M \geqslant \overline{\lambda}_2(g_f - z) = \lambda_2(g_f - z) = \rho_2(g_f) = \rho_2(f) \geqslant \rho(A_0),$$

où $\alpha_M = \max\{\rho_M(A_j) : j = 0,1\}$.

6.8 Preuve du Théorème 6.3.

Supposons que f est une solution de l'équation (6.3.1) avec

$$\max\{\rho(A_j)\quad(j=0,1),\rho(d_j)\quad(j=0,1,2),\rho(F)\}<\rho(f)<\infty.$$

En substituant $f''=F-A_1f'-A_0f$ dans g_f, on trouve

$$g_f-d_2F=(d_1-d_2A_1)f'+(d_0-d_2A_0)f. \tag{6.5.11}$$

En dérivant les deux côtés de l'équation (6.5.11) et en remplaçant f'' par $f''=F-A_1f'-A_0f$, on obtient

$$g_f'-(d_2F)'-(d_1-d_2A_1)F=\left[d_2A_1^2-(d_2A_1)'-d_1A_1-d_2A_0+d_0+d_1'\right]f'$$

$$+\left[d_2A_0A_1-(d_2A_0)'-d_1A_0+d_0'\right]f. \tag{6.5.12}$$

En utilisant (6.2.2) et (6.2.3) , nous obtenons des (6.5.11) et (6.5.12)

$$\alpha_1f'+\alpha_0f=g_f-d_2F, \tag{6.5.13}$$

$$\beta_1f'+\beta_0f=g_f'-(d_2F)'-(d_1-d_2A_1)F. \tag{6.5.14}$$

Soit

$$h=\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1=(d_1-d_2A_1)\left(d_2A_0A_1-(d_2A_0)'-d_1A_0+d_0'\right)$$

$$-(d_0-d_2A_0)\left(d_2A_1^2-(d_2A_1)'-d_1A_1-d_2A_0+d_0+d_1'\right). \tag{6.5.15}$$

Comme $h\not\equiv 0$ de (6.5.13) – (6.5.15) , on obtient

$$f=\frac{\alpha_1\left(g_f'-(d_2F)'-\alpha_1F\right)-\beta_1(g_f-d_2F)}{h}. \tag{6.5.16}$$

D'après (6.3.3) et (6.5.11) on a $\rho(g_f)\leqslant\rho(f)$. Si $\rho(g_f)<\rho(f)$, alors d'après (6.5.16) on trouve

$$\rho(f)\leqslant\max\{\rho(A_j)\quad(j=0,1),\rho(d_j)\quad(j=0,1,2),\rho(F),\rho(g_f)\}<\rho(f)$$

c'est une contradiction. Donc $\rho(g_f)=\rho(f)$.

6.9 Preuve du Théorème 6.4.

D'après le Théorème 6.3, on a $\rho(g_f)=\rho(f)$. Posons $w(z)=d_2f''+d_1f'+d_0f-\varphi$. Alors, d'après $\rho(\varphi)<\rho(f)$ et le Lemme 6.2, on obtient $\rho(w)=\rho(g_f)=\rho(f)$. Pour prouver que $\overline{\lambda}(g_f-\varphi)=\lambda(g_f-\varphi)=\rho(f)$, il suffit de montrer que $\overline{\lambda}(w)=\lambda(w)=\rho(f)$. En utilisant $g_f=w+\varphi$, on trouve de (6.5.16)

$$f=\frac{\alpha_1w'-\beta_1w}{h}+\eta, \tag{6.5.17}$$

où

$$\eta(z) = \frac{\alpha_1 \left(\varphi' - (d_2F)' - \alpha_1 F\right) - \beta_1 (\varphi - d_2 F)}{h}. \tag{6.5.18}$$

En substituant (6.5.18) dans (6.3.1) , on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_1}{h} w''' + \tilde{\phi}_2 w'' + \tilde{\phi}_1 w' + \tilde{\phi}_0 w \\ &= F - \left(\eta'' + A_1(z)\eta' + A_0(z)\eta\right) = B, \end{aligned} \tag{6.5.19}$$

où $\tilde{\phi}_j$ $(j = 0,1,2)$ sont des fonctions méromorphes avec $\rho\left(\tilde{\phi}_j\right) < \rho(f)$ $(j = 0,1,2)$. Comme $\eta(z)$ n'est pas une solution de (6.3.1) , il s'ensuit que $B \not\equiv 0$. D'après $\rho\left(\tilde{\phi}_j\right) < \rho(f)$ $(j = 0,1,2)$, $\rho\left(\frac{\alpha_1}{h}\right) < \rho(f)$, $\rho(B) < \rho(f)$ et le Lemme 6..1, on obtient $\overline{\lambda}(w) = \lambda(w) = \rho(f)$, i.e., $\overline{\lambda}(g_f - \varphi) = \lambda(g_f - \varphi) = \rho(f)$.

Chapitre 7

Equations différentielles complexes à coefficients fonctions analytiques d'ordre $[p, q]$ dans le disque unité

7.1 Introduction et résultats

La théorie de Nevanlinna est considérée comme un outil trés puissant dans l'étude des équations différentielles complexe. Pour une introduction à la théorie des équations différentielles dans le plan complexe en utilisant la théorie Nevanlinna (voir [47]) . La recherche active dans ce domaine a été lancée par H. Wittich [79] et ses étudiants dans les années 1950 et 1960. Plus tard, plusieurs auteurs ont étudié l'équation différentielle complexe

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{7.1.1}$$

et ont obtenu de nombreux résultats intéressants lorsque les coefficients $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ sont des fonctions entières d'ordre fini [23, 34, 40, 47]. L. G. Bernal, L. Kinnunen, J. Tu et T. Long on étudié la croissance des solutions de (7.1.1) individuellement lorsque les coefficients sont des fonctions entières d'ordre itératif fini (voir [12, 45, 72]). Les propriétés de la croissance des solutions de (7.1.1) ont également été étudiées par J. Heittokangas, T. B. Cao et B. Belaïdi lorsque les coefficients sont des fonctions analytiques dans le disque unité $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ (voir [8, 9, 13 − 16, 28, 37, 38, 64]). Après, A. El Farissi, B. Belaïdi et Z. Latreuch ont généralisé les résultats de T. B. Cao et ont étudié la croissance du polynôme différentiele généré par des solutions d'équations différentielles du second ordre dans le disque unité (voir Théorème C) . Dans [43, 44] , O. P. Juneja et ses co-auteurs ont étudié certaines propriétés des fonctions entières d'ordre $[p, q]$, et ont obtenu des résultats. J. Liu, J. Tu et L. Z. Shi ont appliqué les concepts des fonctions entières d'ordre $[p, q]$ pour étudier l'équation différentielle complexe (7.1.1) (voir [65]) .

Dans ce qui suit, nous allons donner des définitions similaires à celles [43, 44] pour les fonctions analytiques et méromorphes d'ordre $[p, q]$, type $[p, q]$ et l'exposant $[p, q]$ de convergence des zéros dans le disque unité.

Définition 7.1 [11] *Soient $p \geq q \geq 1$ des nombres entiers et f une fonction méromorphe* *dans* Δ. *On définit l'ordre* $[p,q]$ *de* f *par*

$$\rho_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log_p^+ T(r,f)}{\log_q \frac{1}{1-r}}, \quad (p \geq q \geq 1).$$

Si f *est une fonction analytique sur* Δ, *alors l'ordre* $[p,q]$ *de* f *est défini par*

$$\rho_{M[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log_{p+1}^+ M(r,f)}{\log_q \frac{1}{1-r}}, \quad (p \geq q \geq 1).$$

Remarque 7.1 [11] *Il est clair que* $0 \leq \rho_{[p,q]}(f) \leq \infty$ $\left(0 \leq \rho_{M[p,q]}(f) \leq \infty\right)$, *pour tout* $p \geq q \geq 1$. *D'après la Définition 7.1 on a* $\rho_{[1,1]}(f) = \rho_1(f)$ $\left(\rho_{M[1,1]}(f) = \rho_{M,1}(f)\right)$, $\rho_{[2,1]}(f) = \rho_2(f)$ *et* $\left(\rho_{M[2,1]}(f) = \rho_{M,2}(f)\right)$. *Pour la relation entre* $\rho_{[p,q]}(f)$ *et* $\rho_{M[p,q]}(f)$ *nous montrons la double inégalité suivante :*

Proposition 7.1 [11] *Soient* $p \geq q \geq 1$ *des nombres entiers et* f *une fonction analytique dans* Δ *d'ordre* $[p,q]$. *Alors*

(i) *Si* $p = q$

$$\rho_{[p,q]}(f) \leq \rho_{M[p,q]}(f) \leq \rho_{[p,q]}(f) + 1.$$

(ii) *Si* $p > q$

$$\rho_{[p,q]}(f) = \rho_{M[p,q]}(f).$$

Définition 7.2 [11] *Soient* $p \geq q \geq 1$ *des nombres entiers et* f *une fonction méromorphe dans* Δ *d'ordre* $[p,q]$ *égal à* ρ $(0 < \rho < \infty)$. *Alors le type* $[p,q]$ *de* f *est défini par*

$$\tau_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log_{p-1}^+ T(r,f)}{\left(\log_{q-1} \frac{1}{1-r}\right)^{\rho}}.$$

Définition 7.3 *On définit l'exposant* $[p,q]$ *de convergence des zéros de la fonction* f *par*

$$\lambda_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log_p^+ N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q \frac{1}{1-r}},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(r, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

et $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre de zéros de la fonction* f *situés dans le disque* $|z| \leqslant r$.

On définit l'exposant $[p,q]$ *de convergence des zéros distincts de la fonction* f *par*

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f) = \overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{\log_p^+ \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log_q \frac{1}{1-r}},$$

où

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)=\int_0^r\frac{\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)-\overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt+\overline{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)\log r,$$

et $\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre de zéros distincts de la fonction* f *situés dans le disque* $|z|\leqslant r$.

Dans [15], Cao et Yi ont étudié la croissance, l'hyper-ordre et les points fixes des solutions de l'équation ci-dessus et ont obtenu les résultats suivants.

Théorème A ([15]) *Soient* $A_0(z),...,A_{k-1}(z)$ *sont les coefficients analytiques dans* Δ *de* (7.1.1). *Si* $\max\{\rho(A_j): j=1,...,k-1\}<\rho(A_0)$, *alors* $\rho(A_0)\leqslant\rho_2(f)\leqslant\alpha_M$ *pour toutes les solutions* $f\not\equiv 0$ *de* (1.1), *où* $\alpha_M=\max\{\rho_M(A_j): j=0,...,k-1\}$.

Théorème B ([15]) *Sous les hypothèses du Théorème A, si* $\rho_2(A_j)<\infty$ $(j=0,...,k-1)$, *alors chaque solution* $f\not\equiv 0$ *de* (7.1.1) *satisfait* $\overline{\lambda}_2(f-z)=\rho_2(f)$.

Dans [28], A. El Farissi, B. Belaïdi et Z. Latreuch ont généralisé le Théorème A et le Théorème B pour les équations différentielles du deuxième ordre et ont obtenu le résultat suivant.

Théorème C ([28]) *Soient* $A_0(z)$, $A_1(z)$, d_0, d_1, d_2 *des fonctions analytiques dans* Δ *telles que* $\max\{\rho(A_1),\rho(d_j)\ \ (j=0,1,2)\}<\rho(A_0)=\rho\ (0<\rho<\infty)$, $\tau(A_0)=\tau\ (0<\tau<\infty)$, *et soit* $\varphi\not\equiv 0$ *une fonction analytique dans* Δ *avec* $\rho(\varphi)<\infty$. *Si* $f\not\equiv 0$ *est une solution de l'équation*

$$f''+A_1(z)f'+A_0(z)f=0, \tag{7.1.2}$$

alors le polynôme différentiel $g_f=d_2f''+d_1f'+d_0f$ *satisfait*

$$\overline{\lambda}(g_f-\varphi)=\lambda(g_f-\varphi)=\rho(g_f)=\rho(f)=\infty,$$

$$\alpha_M\geqslant\overline{\lambda}_2(g_f-\varphi)=\lambda_2(g_f-\varphi)=\rho_2(g_f)=\rho_2(f)\geqslant\rho(A_0),$$

où $\alpha_M=\max\{\rho_M(A_j): j=0,1\}$.

Le but de ce chapitre est d'utiliser les concepts des fonctions analytiques dans le disque unité d'ordre $[p,q]$ et type $[p,q]$ pour obtenir plusieurs théorèmes sur la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles (7.1.1) et (7.1.2).

Théorème 7.1 [54] *Soient* $p\geq q\geq 1$ *des nombres entiers, et soient* A_j $(j=0,\cdots,k-1)$ *des fonctions analytiques dans* Δ *telles que*

$$\max\left\{\rho_{[p,q]}(A_j): j=1,\cdots,k-1\right\}<\rho_{[p,q]}(A_0).$$

Si $f\not\equiv 0$ *est une solution de* (7.1.1), *alors* $\rho_{[p,q]}(f)=\infty$ *et*

$$\rho_{[p,q]}(A_0)\leq\rho_{[p+1,q]}(f)\leq\max\left\{\rho_{M,[p,q]}(A_j): j=0,\cdots,k-1\right\}.$$

De plus, si $p>q$, *alors*

$$\rho_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p,q]}(A_0).$$

Théorème 7.2 [54] *Soient* $p \geq q \geq 1$ *des nombres entiers. Supposons que* $A_0(z), \cdots,$ $A_{k-1}(z)$ *vérifient les hypothèses du Théorème 7.1, et soit* $\varphi \not\equiv 0$ *une fonction analytique dans* Δ *telle que* $\rho_{[p,q]}(\varphi) < \infty$*. Alors chaque solution* $f \not\equiv 0$ *de* (7.1.1) *satisfait*

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f-\varphi) = \lambda_{[p,q]}(f-\varphi) = \rho_{[p,q]}(f) = \infty$$

et

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f-\varphi) = \rho_{[p+1,q]}(f).$$

Théorème 7.3 [54] *Soient* $p \geq q \geq 1$ *des nombres entiers, et soient* $A_0(z)$, $A_1(z)$ *des fonctions analytiques dans* Δ *telles que* $\rho_{[p,q]}(A_1) < \rho_{[p,q]}(A_0) = \rho$ $(0 < \rho < \infty)$ *et* $\tau_{[p,q]}(A_0) = \tau$ $(0 < \tau < \infty)$. *Soient* d_0, d_1, d_2 *des fonctions analytiques dans* Δ *non toutes identiquement nulles telles que*

$$\max\left\{\rho_{[p,q]}(d_j) : j = 0, 1, 2\right\} < \rho_{[p,q]}(A_0).$$

Si $f \not\equiv 0$ *est une solution de* (7.1.2), *alors le polynôme différentiel* $g_f = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ *satisfait*

$$\rho_{[p,q]}(g_f) = \rho_{[p,q]}(f) = \infty$$

et

$$\rho_{[p+1,q]}(g_f) = \rho_{[p+1,q]}(f).$$

Théorème 7.4 [54] *Soient* $p \geq q \geq 1$ *des nombres entiers, et soient* $A_0(z)$, $A_1(z)$ *des fonctions analytiques dans* Δ *telles que* $\rho_{[p,q]}(A_1) < \rho_{[p,q]}(A_0) = \rho$ $(0 < \rho < \infty)$ *et* $\tau_{[p,q]}(A_0) = \tau$ $(0 < \tau < \infty)$. *Soient* d_0, d_1, d_2 *des fonctions analytiques dans* Δ *non toutes identiquement nulles telles que*

$$\max\left\{\rho_{[p,q]}(d_j) : j = 0, 1, 2\right\} < \rho_{[p,q]}(A_1),$$

et soit $\varphi \not\equiv 0$ *une fonction analytique dans* Δ *telle que* $\rho_{[p,q]}(\varphi) < \infty$. *Si* $f \not\equiv 0$ *est une solution de* (7.1.2), *alors le polynôme différentiel* $g_f = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f$ *satisfait*

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(g_f-\varphi) = \lambda_{[p,q]}(g_f-\varphi) = \rho_{[p,q]}(f) = \infty$$

et

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(g_f-\varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(g_f-\varphi) = \rho_{[p+1,q]}(f).$$

7.2 Lemmes préliminaires

Lemme 7.1 [37] *Soit* f *une fonction méromorphe dans* Δ*, et soit* $k \geqslant 1$ *un entier. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r,f),$$

où $S(r,f) = O\left(\log^+ T(r,f)\right) + O\left(\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)$, *pour* $|z| = r \notin E_0$ *oú* $E_0 \subset [0,1)$ *avec* $\int_{E_0} \frac{dr}{1-r} < \infty$. *Si* f *est d'ordre fini, alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right).$$

Lemme 7.2 [4] *Soient* $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ *et* $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ *des fonctions monotones croissantes telles que* $g(r) \leqslant h(r)$ *en dehors d'un ensemble exceptionnel* $E_1 \subset [0,1)$ *avec* $\int_{E_1} \frac{dr}{1-r} < \infty$. *Alors il existe une constante* $d \in (0,1)$ *telle que si* $s(r) = 1 - d(1-r)$, *alors* $g(r) \leqslant h(s(r))$ *pour tout* $r \in [0,1)$.

Lemme 7.3 [54] *Soient* $p \geq q \geq 1$ *des entiers. Soient* A_j $(j = 0, \cdots, k-1)$, $F \not\equiv 0$ *des fonctions analytiques dans* Δ, *et soit* $f(z)$ *une solution de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = F \tag{7.2.1}$$

telle que $\max\left\{\rho_{[p,q]}(A_j) \quad (j = 0, \cdots, k-1), \rho_{[p,q]}(F)\right\} < \rho_{[p,q]}(f) = \rho \leq \infty$. *Alors on a*

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f) = \lambda_{[p,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(f)$$

et

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f) = \lambda_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p+1,q]}(f).$$

Lemme 7.4 [54] *Soient* $p \geq q \geq 1$ *des entiers. Si* $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *sont des fonctions analytiques d'ordre* $[p,q]$ *dans le disque unité* Δ, *alors chaque solution* $f \not\equiv 0$ *de* (7.1.1) *satisfait*

$$\rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{M,[p+1,q]}(f) \leq \max\left\{\rho_{M,[p,q]}(A_j) : j = 0, 1, \cdots, k-1\right\}.$$

Lemme 7.5 [54] *Soient* $p \geq q \geq 1$ *des entiers, et soient* f *et* g *des fonctions méromorphes d'ordre* $[p,q]$ *dans* Δ. *Alors on a*

$$\rho_{[p,q]}(f+g) \leq \max\left\{\rho_{[p,q]}(f), \rho_{[p,q]}(g)\right\}$$

et

$$\rho_{[p,q]}(fg) \leq \max\left\{\rho_{[p,q]}(f), \rho_{[p,q]}(g)\right\}.$$

De plus, si $\rho_{[p,q]}(f) > \rho_{[p,q]}(g)$, *alors on obtient*

$$\rho_{[p,q]}(f+g) = \rho_{[p,q]}(fg) = \rho_{[p,q]}(f).$$

Lemme 7.6 [54] *Soient* $p \geq q \geq 1$ *des entiers, et soient* f *et* g *des fonctions méromorphes d'ordre* $[p,q]$ *dans* Δ *telles que* $0 < \rho_{[p,q]}(f), \rho_{[p,q]}(g) < \infty$ *et* $0 < \tau_{[p,q]}(f), \tau_{[p,q]}(g) < \infty$. *On a*

(i) *Si* $\rho_{[p,q]}(f) > \rho_{[p,q]}(g)$, *alors*

$$\tau_{[p,q]}(f+g) = \tau_{[p,q]}(fg) = \tau_{[p,q]}(f).$$

(ii) *Si* $\rho_{[p,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(g)$ *et* $\tau_{[p,q]}(f) \neq \tau_{[p,q]}(g)$, *alors*

$$\rho_{[p,q]}(f+g) = \rho_{[p,q]}(fg) = \rho_{[p,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(g).$$

Lemme 7.7 [11] *Soient* $p \geq q \geq 1$ *des entiers. Soit* f *une fonction méromorphe dans* Δ *telle que* $\rho_{[p,q]}(f) = \rho < \infty$, *et soit* $k \geq 1$ *un nombre entier. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\exp_{p-1}\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right)$$

pour tout $r \notin E_2 \subset [0,1)$ *avec* $\int_{E_2} \frac{dr}{1-r} < \infty$.

Lemme 7.8 [54] *Soient* $p \geq q \geq 1$ *des entiers, et soit* f *une fonction méromorphe d'ordre* $[p,q]$ *dans* Δ. *Alors* $\rho_{[p,q]}(f') = \rho_{[p,q]}(f)$.

7.3 Preuve du Théorème 7.1.

Notons $\rho_{[p,q]}(A_0) = \rho$ et soit $f \not\equiv 0$ une solution de (7.1.1). De l'équation (7.1.1) on trouve

$$A_0 = -\left(\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + A_1\frac{f'}{f}\right), \tag{7.3.1}$$

alors, d'après le Lemme 7.1

$$m(r, A_0) \leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + O\left(\log^+ T(r,f) + \log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) \tag{7.3.2}$$

vrais pour tout $|z| = r \notin E_0$, où E_0 est un sous-ensemble de $[0,1)$ avec $\int_{E_0} \frac{dr}{1-r} < \infty$. Par la Définition 7.1, il existe une suite $\{r_n'\}$ $(r_n' \longrightarrow 1^-)$ telle que

$$\lim_{r_n' \mapsto 1^-} \frac{\log_p^+ T(r_n', A_0)}{\log_q \frac{1}{1-r_n'}} = \rho.$$

Posons $\int_{E_0} \frac{dr}{1-r} := \log\gamma < \infty$. Comme $\int_{r_n'}^{1-\frac{1-r_n'}{\gamma+1}} \frac{dr}{1-r} = \log(\gamma+1)$, alors il existe un point $r_n \in \left[r_n', 1 - \frac{1-r_n'}{\gamma+1}\right] - E_0 \subset [0,1)$. De

$$\frac{\log_p^+ T(r_n, A_0)}{\log_q \frac{1}{1-r_n}} \geq \frac{\log_p^+ T\left(r_n', A_0\right)}{\log_q\left(\frac{\gamma+1}{1-r_n'}\right)} = \frac{\log_p^+ T\left(r_n', A_0\right)}{\log_{q-1}\left[\left(1 + \frac{\log(\gamma+1)}{\log\frac{1}{1-r_n'}}\right)\log\frac{1}{1-r_n'}\right]},$$

il s'ensuit que

$$\lim_{r_n \to 1^-} \frac{\log_p^+ T(r_n, A_0)}{\log_q \frac{1}{1-r_n}} = \rho.$$

Posons $\max\left\{\rho_{[p,q]}(A_j) : j = 1, \cdots, k-1\right\} = \beta < \rho_{[p,q]}(A_0) = \rho$. Ainsi, pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \rho - \beta)$ donnée, on a

$$T(r_n, A_0) > \exp_p\left\{(\rho - \varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r_n}\right)\right\} \tag{7.3.3}$$

et pour $j = 1, \cdots, k-1$

$$T(r_n, A_j) \leq \exp_p\left\{(\beta + \varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r_n}\right)\right\} \tag{7.3.4}$$

pour $r_n \to 1^-$. D'après (7.3.2), (7.3.3) et (7.3.4), on trouve pour $r_n \to 1^-$

$$\exp_p\left\{(\rho - \varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r_n}\right)\right\} \leq (k-1)\exp_p\left\{(\beta + \varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r_n}\right)\right\}$$
$$+O\left(\log\frac{1}{1-r_n} T(r_n, f)\right). \tag{7.3.5}$$

Comme $\rho - \varepsilon > \beta + \varepsilon$, il résulte de (7.3.5) que pour $r_n \to 1^-$

$$(1 - o(1)) \exp_p \left\{ (\rho - \varepsilon) \log_q \left(\frac{1}{1 - r_n} \right) \right\} \leq O \left(\log \frac{1}{1 - r_n} T(r_n, f) \right). \tag{7.3.6}$$

Ainsi, par (7.3.6) on obtient $\rho_{[p,q]}(f) = \infty$ et

$$\rho_{[p+1,q]}(f) = \limsup_{r_n \to 1^-} \frac{\log^+_{p+1} T(r_n, f)}{\log_q \frac{1}{1-r_n}} \geq \rho - \varepsilon. \tag{7.3.7}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire on trouve de (7.3.7) que $\rho_{[p+1,q]}(f) \geq \rho = \rho_{[p,q]}(A_0)$. D'autre part, d'après le Lemme 7.4, on a

$$\rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{M,[p+1,q]}(f) \leq \max \left\{ \rho_{M,[p,q]}(A_j) : j = 0, 1, \cdots, k-1 \right\},$$

ce qui implique

$$\rho_{[p,q]}(A_0) \leq \rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{M,[p+1,q]}(f) \leq \max\{\rho_{M,[p,q]}(A_j) : j = 0, 1, \cdots, k-1\}.$$

Si $p > q$, alors on a

$$\max \left\{ \rho_{M,[p,q]}(A_j) : j = 0, 1, \cdots, k-1 \right\} = \rho_{[p,q]}(A_0).$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(A_0).$$

7.4 Preuve du Théorème 7.2.

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (7.1.1). Alors d'après le Théorème 7.1, on a $\rho_{[p,q]}(f) = \infty$ et

$$\rho_{[p,q]}(A_0) \leq \rho_{[p+1,q]}(f) \leq \max \left\{ \rho_{M,[p,q]}(A_j) : j = 0, \cdots, k-1 \right\}.$$

De plus, si $p > q$, alors

$$\rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(A_0).$$

Posons $w = f - \varphi$. Comme $\rho_{[p,q]}(\varphi) < \infty$, alors d'après le Lemme 7.5, on a $\rho_{[p,q]}(w) = \rho_{[p,q]}(f - \varphi) = \rho_{[p,q]}(f) = \infty$ et $\rho_{[p+1,q]}(w) = \rho_{[p+1,q]}(f - \varphi) = \rho_{[p+1,q]}(f)$. En substituant $f = w + \varphi$ dans l'équation (7.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} & w^{(k)} + A_{k-1}(z) w^{(k-1)} + \cdots + A_0(z) w \\ &= -(\varphi^{(k)} + A_{k-1}(z) \varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0(z) \varphi) = W. \end{aligned} \tag{7.3.8}$$

Comme $\varphi \not\equiv 0$ et $\rho_{[p,q]}(\varphi) < \infty$, et d'après le Théorème 7.1, on a $W \not\equiv 0$. Alors d'après le Lemme 7.3, on obtient $\overline{\lambda}_{[p,q]}(w) = \lambda_{[p,q]}(w) = \rho_{[p,q]}(w) = \infty$ et $\overline{\lambda}_{p+1}(w) = \lambda_{p+1}(w) = \rho_{p+1}(w)$, i.e.,

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f - \varphi) = \lambda_{[p,q]}(f - \varphi) = \rho_{[p,q]}(f) = \infty$$

et

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f - \varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(f - \varphi) = \rho_{[p+1,q]}(f).$$

7.5 Preuve du Théorème 7.3.

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation $(7.1.2)$. Alors d'après le Théorème 7.1, on a $\rho_{[p,q]}(f) = \infty$ et

$$\rho_{[p,q]}(A_0) \leq \rho_{[p+1,q]}(f) \leq \max\left\{\rho_{M,[p,q]}(A_j) : j = 0, 1\right\}.$$

De plus, si $p > q$, alors

$$\rho_{[p+1,q]}(f) = \rho_{[p,q]}(A_0).$$

En substituant $f'' = -A_1 f' - A_0 f$ dans g_f, on trouve

$$g_f = (d_1 - d_2 A_1) f' + (d_0 - d_2 A_0) f. \tag{7.3.9}$$

En dérivant les deux côtés de l'équation (7.3.9) et remplaçant f'' par $f'' = -A_1 f' - A_0 f$, on obtient

$$\begin{aligned} g_f' = &\left[d_2 A_1^2 - (d_2 A_1)' - d_1 A_1 - d_2 A_0 + d_0 + d_1'\right] f' \\ &+ \left[d_2 A_0 A_1 - (d_2 A_0)' - d_1 A_0 + d_0'\right] f. \end{aligned} \tag{7.3.10}$$

Notons par

$$\alpha_1 = d_1 - d_2 A_1, \quad \alpha_0 = d_0 - d_2 A_0, \tag{7.3.11}$$

$$\beta_1 = d_2 A_1^2 - (d_2 A_1)' - d_1 A_1 - d_2 A_0 + d_0 + d_1', \tag{7.3.12}$$

$$\beta_0 = d_2 A_0 A_1 - (d_2 A_0)' - d_1 A_0 + d_0'. \tag{7.3.13}$$

Alors, on a

$$\alpha_1 f' + \alpha_0 f = g_f, \quad \beta_1 f' + \beta_0 f = g_f'. \tag{7.3.14}$$

Soit

$$\begin{aligned} h = \alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1 = &(d_1 - d_2 A_1)\left(d_2 A_0 A_1 - (d_2 A_0)' - d_1 A_0 + d_0'\right) \\ &- (d_0 - d_2 A_0)\left(d_2 A_1^2 - (d_2 A_1)' - d_1 A_1 - d_2 A_0 + d_0 + d_1'\right). \end{aligned} \tag{7.3.15}$$

D'abord, supposons que $d_2 \not\equiv 0$. D'après (7.3.15) on peut écrire

$$\begin{aligned} h = &-d_2^2 A_0^2 - d_0 d_2 A_1^2 + \left(d_1' d_2 + 2 d_0 d_2 - d_2' d_1 - d_1^2\right) A_0 \\ &+ \left(d_2' d_0 - d_2 d_0' + d_0 d_1\right) A_1 + d_1 d_2 A_0 A_1 \\ &- d_1 d_2 A_0' + d_0 d_2 A_1' + d_2^2 A_0' A_1 - d_2^2 A_0 A_1' + d_0' d_1 - d_0 d_1' - d_0^2. \end{aligned} \tag{7.3.16}$$

D'après $d_2 \not\equiv 0$, $A_0 \not\equiv 0$ et les Lemmes 7.5-7.6 on a $\rho_{[p,q]}(h) = \rho_{[p,q]}(A_0)$, donc $h \not\equiv 0$. Maintenant, supposons que $d_2 \equiv 0$, $d_1 \not\equiv 0$, en utilisant un raisonnement similaire à celui ci-dessus, on obtient $h \not\equiv 0$. Enfin, si $d_2 \equiv 0$, $d_1 \equiv 0$ et $d_0 \not\equiv 0$, on a $h = -d_0^2 \not\equiv 0$. Donc $h \not\equiv 0$. D'après $h \not\equiv 0$ et $(7.3.14)$, on obtient

$$f = \frac{\alpha_1 g_f' - \beta_1 g_f}{h}. \tag{7.3.17}$$

Si $\rho_{[p,q]}(g_f) < \infty$, alors d'après $(7.3.17)$, le Lemme 7.5 et le Lemme 7.8 on a $\rho_{[p,q]}(f) < \infty$,c'est une contradiction. Donc $\rho_{[p,q]}(g_f) = \rho_{[p,q]}(f) = \infty$.

Maintenant, prouvons que $\rho_{[p+1,q]}(g_f) = \rho_{[p+1,q]}(f)$. D'après (5.1), Lemme 7.5 et Lemme 7.8, on trouve $\rho_{[p+1,q]}(g_f) \leq \rho_{[p+1,q]}(f)$ et par (7.3.17) on a $\rho_{[p+1,q]}(f) \leq \rho_{[p+1,q]}(g_f)$, ce qui implique $\rho_{[p+1,q]}(g_f) = \rho_{[p+1,q]}(f)$.

7.6 Preuve du Théorème 7.4.

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (7.1.2) . Alors, d'après le Théorème 7.3, on a $\rho_{[p,q]}(g_f) = \rho_{[p,q]}(f) = \infty$ et $\rho_{[p+1,q]}(g_f) = \rho_{[p+1,q]}(f)$. Posons $w(z) = d_2 f'' + d_1 f' + d_0 f - \varphi$. Alors, d'après $\rho_{[p,q]}(\varphi) < \infty$, on a $\rho_{[p,q]}(w) = \rho_{[p,q]}(g_f) = \rho_{[p,q]}(f) = \infty$ et $\rho_{[p+1,q]}(w) = \rho_{[p+1,q]}(g_f) = \rho_{[p+1,q]}(f)$. Pour prouver $\overline{\lambda}_{[p,q]}(g_f - \varphi) = \rho_{[p,q]}(f) = \infty$, $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(g_f - \varphi) = \rho_{[p+1,q]}(f)$, il suffit de montrer que $\overline{\lambda}_{[p,q]}(w) = \rho_{[p,q]}(f) = \infty$, $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(w) = \rho_{[p+1,q]}(f)$. En utilisant $g_f = w + \varphi$, on trouve de (7.3.17)

$$f = \frac{\alpha_1 w' - \beta_1 w}{h} + \psi, \tag{7.3.18}$$

où

$$\psi(z) = \frac{\alpha_1 \varphi' - \beta_1 \varphi}{h}. \tag{7.3.19}$$

En substituant (7.3.18) dans l'équation (7.1.2) , on obtient

$$\frac{\alpha_1}{h} w''' + \phi_2 w'' + \phi_1 w' + \phi_0 w = -\left(\psi'' + A_1(z)\psi' + A_0(z)\psi\right) = A, \tag{7.3.20}$$

où ϕ_j $(j = 0, 1, 2)$ sont des fonctions méromorphes dans Δ avec $\rho_{[p,q]}(\phi_j) < \infty$ $(j = 0, 1, 2)$.

Maintenant, prouvons que $\psi(z) \not\equiv 0$. Supposons que $\psi(z) \equiv 0$. Alors de (7.3.20) , on obtient que

$$\beta_1 = \alpha_1 \frac{\varphi'}{\varphi}. \tag{7.3.21}$$

Posons $\rho_{[p,q]}(\varphi) = \alpha < \infty$. Alors, de (7.3.24) et le Lemme 7.7, on a

$$m(r, \beta_1) \leq m(r, \alpha_1) + O\left(\exp_{p-1}\left\{(\alpha + \varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right) \tag{7.3.22}$$

pour tout $r \notin E_2 \subset [0, 1)$ avec $\int_{E_2} \frac{dr}{1-r} < \infty$.

(i) Si $d_2 \not\equiv 0$, d'après le Lemme 7.2 et (7.3.22) on obtient

$$\rho_{[p,q]}(A_0) \leq \rho_{[p,q]}(A_1).$$

C'est une contradiction.

(ii) Si $d_2 \equiv 0$ et $d_1 \not\equiv 0$, d'après le Lemme 7.2 et (7.3.22) on obtient

$$\rho_{[p,q]}(A_1) \leq \rho_{[p,q]}(d_1).$$

C'est une contradiction.

(iii) Si $d_2 = d_1 \equiv 0$ et $d_0 \not\equiv 0$, on a de (7.3.22)

$$\beta_1 = d_0 = \alpha_1 \frac{\varphi'}{\varphi} \equiv 0$$

c'est une contradiction. Par conséquent $\psi(z) \not\equiv 0$.

D'après $\psi(z) \not\equiv 0$ et $\rho_{[p,q]}(\psi) < \infty$, il s'ensuit du Théorème 7.1 que $A \not\equiv 0$. Alors d'après $h \not\equiv 0$ et le Lemme 7.3, on obtient $\overline{\lambda}_{[p,q]}(w) = \lambda_{[p,q]}(w) = \rho_{[p,q]}(w) = \infty$ et $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(w) = \lambda_{[p+1,q]}(w) = \rho_{[p+1,q]}(w)$, i.e., $\overline{\lambda}_{[p,q]}(g_f - \varphi) = \lambda_{[p,q]}(g_f - \varphi) = \rho_{[p,q]}(g_f) = \rho_{[p,q]}(f) = \infty$ et $\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(g_f - \varphi) = \lambda_{[p+1,q]}(g_f - \varphi) = \rho_{[p+1,q]}(f)$.

Chapitre 8

Comparaison entre les solutions de deux équations différentielles

8.1 Introduction et résultats

Le but de ce chapitre est d'étudier la contrôlabilité des solutions de deux équations différentielles linéaires

$$f'' + A(z) f = 0$$

et

$$g'' + B(z) g = 0.$$

On va étudier la croissance et l'oscillation de $w = d_1 f + d_2 g$, où f, g sont les solutions des équations ci-dessus et d_1, d_2 sont des fonctions entières d'ordre fini.

Supposons que f et g deux solutions des équations différentielles linéaires complexes

$$f'' + A(z) f = 0 \tag{8.1.1}$$

et

$$g'' + B(z) g = 0, \tag{8.1.2}$$

et soit la combinaison des solutions

$$w = d_1 f + d_2 g. \tag{8.1.3}$$

Dans [51] (voir Chapitre 5) , on a étudié la relation entre les solutions de (8.1.1) et les fonctions de petite croissance. En d'autres mots, on a étudié la croissance et l'oscillation de $g_f = d_1 f_1 + d_2 f_2$, où f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (8.1.1) (voir Théorème 5.1 et Théorème 5.2).
Avant l'énoncé de nos résultats, on définit h et ψ par

$$h = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & d_2 & 0 \\ d_1' & d_1 & d_2' & d_2 \\ d_1'' - d_1 A & 2d_1' & d_2'' - d_2 B & 2d_2' \\ d_1''' - 3d_1' A - d_1 A' & d_1'' - d_1 A + 2d_1'' & d_2''' - 3d_2' B - d_2 B' & d_2'' - d_2 B + 2d_2'' \end{vmatrix} \tag{8.1.4}$$

et

$$\psi(z) = \frac{2(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1')}{h} \varphi^{(3)} + \phi_2 \varphi'' + \phi_1 \varphi' + \phi_0 \varphi, \tag{8.1.5}$$

où $\varphi \not\equiv 0$ est une fonction entière d'ordre fini et

$$\phi_2 = \frac{-3d_1 d_2 d_2'' - Ad_1 d_2^2 + Bd_1 d_2^2 + 3d_2^2 d_1''}{h}, \tag{8.1.6}$$

$$\phi_1 = \frac{2Ad_1 d_2 d_2' + 6d_2 d_1' d_2'' - 6d_2 d_2' d_1'' - 2Bd_2^2 d_1'}{h}, \tag{8.1.7}$$

$$\begin{aligned}\phi_0 = \frac{1}{h} \Big[&\left(d_1 d_2 d_2'' - 2d_1 (d_2')^2\right) A + \left(-4d_1 d_2 d_2'' - 4d_2 d_1' d_2' + 6d_1 (d_2')^2 + 3d_2^2 d_1''\right) B \\ &+ \left(2d_1 d_2 d_2' - 2d_2^2 d_1'\right) B' - ABd_1 d_2^2 + B^2 d_1 d_2^2 - 2d_1 d_2' d_2''' \\ &+ 2d_2 d_1' d_2''' - 3d_2 d_1'' d_2'' - 6d_1' d_2' d_2'' + 3d_1 (d_2'')^2 \Big].\end{aligned} \tag{8.1.8}$$

En 1972, H. Herold ([41]) a montré quelques critères sur la comparaison entre deux paires d'équations différentielles complexes. Dans [80] , L. Z. Yang a étudié les solutions communes d'une paire d'équations différentielles et a trouvé leurs applications dans les problèmes d'unicité des fonctions entières. Récemment, A. Asiri ([1, 2, 3]) a étudié certaines propriétés des solutions des équations différentielles ayant les mêmes zéros. Il est intéressant maintenant d'étudier la croissance et l'oscillation de $w = d_1 f + d_2 g$ où f et g sont deux solutions des équations (8.1.1) et (8.1.2), d_1 et d_2 sont deux fonctions entières non toutes identiquement nulles. On obtient les résultats suivants.

Théorème 8.1 [59] *Soient $A(z)$ et $B(z)$ des fonctions entières transcendantes d'ordre fini. Soient $d_j(z) \not\equiv 0$ $(j = 1, 2)$ des fonctions entières d'ordre fini telles que $h \not\equiv 0$. Si f et g sont deux solutions de* (8.1.1) *et* (8.1.2) , *alors la combinaison des solutions* (8.1, 3) *satisfait*

$$\rho(w) = \rho(f) = \rho(g) = \infty$$

et

$$\rho_2(w) = \max\{\rho(A), \rho(B)\}.$$

Remarque 8.1 *Si $\rho(A) \neq \rho(B)$, alors les conclusions du Théorème 8.1 sont triviales. L'importance du Théorème 8.1 se trouve dans le cas où $\rho(A) = \rho(B)$. Par exemple, nous pouvons voir que $f(z) = \exp(e^z)$ et $g(z) = \exp\left(e^{z^2}\right)$ vérifient respectivement les équations différentielles suivantes*

$$f'' - \left(e^z + e^{2z}\right) f = 0$$

et

$$g'' - \left[\left(2 + 4z^2\right) e^{z^2} + 4z^2 e^{2z^2}\right] g = 0.$$

Il est clair que

$$1 = \rho\left(e^z + e^{2z}\right) < \rho\left(\left(2 + 4z^2\right) e^{z^2} + 4z^2 e^{2z^2}\right) = 2.$$

D'autre part, on a

$$\rho_2(f + g) = 2.$$

Remarque 8.2 *Dans le cas où* $\rho(A) = \rho(B)$, *on peut supposer dans l'énoncé du Théorème 8.1 que* $d_j(z)$ $(j = 1, 2)$ *non toutes identiquement nulles.*

Théorème 8.2 [59] *Sous les hypothèses du Théorème 8.1, soit* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *une fonction entière d'ordre fini telle que* $\psi(z) \not\equiv 0$. *Si* f *et* g *sont deux solutions de* (8.1.1) *et* (8.1.2), *alors la combinaison des solutions* (8.1, 3) *satisfait*

$$\overline{\lambda}(w - \varphi) = \lambda(w - \varphi) = \infty \tag{8.1.9}$$

et

$$\overline{\lambda}_2(w - \varphi) = \lambda_2(w - \varphi) = \max\{\rho(A), \rho(B)\}. \tag{8.1.10}$$

Dans la suite, nous donnons des conditions suffisantes pour éliminer la condition $h \not\equiv 0$.

Théorème 8.3 [59] *Soient* $A(z)$ *et* $B(z)$ *des fonctions entières transcendantes telles que* $\rho(A) = \rho(B) = \rho$ $(0 < \rho < \infty)$ *et* $0 < \tau(A) \neq \tau(B) < \infty$. *Soient* $d_j(z)$ $(j = 1, 2)$ *des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles telles que* $\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \rho$. *Si* f *et* g *sont deux solutions de* (8.1.1) *et* (8.1.2), *alors la combinaison des solutions* (8.1, 3) *satisfait*

$$\rho(w) = \rho(f) = \rho(g) = \infty$$

et

$$\rho_2(w) = \rho_2(f) = \rho_2(g) = \rho.$$

Théorème 8.4 [59] *Sous les hypothèses du Théorème 8.3, soit* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *une fonction entière d'ordre fini telle que* $\psi(z) \not\equiv 0$. *Si* f *et* g *sont deux solutions de* (8.1.1) *et* (8.1.2), *alors la combinaison des solutions* (8.1, 3) *satisfait*

$$\overline{\lambda}(w - \varphi) = \lambda(w - \varphi) = \infty \tag{8.1.11}$$

et

$$\overline{\lambda}_2(w - \varphi) = \lambda_2(w - \varphi) = \rho. \tag{8.1.12}$$

Remarque 8.3 *Dans le cas où* $A(z) = B(z)$, *en choisissant* f *et* g *comme étant deux solutions linéairement indépendantes, on peut déduire les Théorème 5.1 et Théorème 5.2.*

Considérons maintenant f et g comme deux solutions des équations différentielles complexes (8.1.1) et (8.1.2), où A et B sont deux polynômes non constants du même degré. Il est clair que $\rho(f) = \rho(g) = \frac{\deg A + 2}{2}$, mais que peut-on-dire sur la croissance et l'oscillation de $w = d_1 f + d_2 g$? Ici on va répondre à cette question et on obtient les résultats suivants.

Théorème 8.5 [59] *Soient* A *et* B *deux polynômes non constants du même degré* n. *Soient* $d_j(z)$ $(j = 1, 2)$ *des fonctions entières d'ordre fini non toutes identiquement nulles telles que* $h \not\equiv 0$ *et* $\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \frac{n+2}{2}$. *Si* f *et* g *sont deux solutions de* (8.1.1) *et* (8.1.2), *alors la combinaison des solutions* (8.1, 3) *satisfait*

$$\rho(w) = \rho(f) = \rho(g) = \frac{n+2}{2}.$$

Théorème 8.6 [59] *Sous les hypothèses du Théorème 8.5, soit* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *une fonction entière avec* $\rho(\varphi) < \frac{n+2}{2}$ *telle que* $\psi(z) \not\equiv 0$. *Si* f *et* g *sont deux solutions de* (8.1.1) *et* (8.1.2), *alors la combinaison des solutions* (8.1, 3) *satisfait*

$$\overline{\lambda}(w - \varphi) = \lambda(w - \varphi) = \frac{n+2}{2}. \tag{8.1.13}$$

Remarque 8.4 *Dans le cas où* $A(z) = B(z)$, *en choisissant* f *et* g *comme étant deux solutions linéairement indépendantes, on peut déduire les Théorème 5.3 et Théorème 5.4.*

8.2 Lemmes préliminaires

Lemme 8.1 [8, 19] *Soient* $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini.*

(i) *Si* f *est une solution méromorphe de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f = F \tag{8.2.1}$$

avec $\rho(f) = +\infty$, *alors* f *satisfait*

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty.$$

(ii) *Si* f *est une solution méromorphe de l'équation* (8.2.1) *avec* $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) = \rho$, *alors*

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty,\ \overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \rho.$$

Lemme 8.2 [17] *Soient* $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* f *est une solution méromorphe de l'équation* (8.2.1) *avec*

$$\max\{\rho(A_j)\ \ (j = 0, 1, \cdots, k-1), \rho(F)\} < \rho(f) < +\infty,$$

alors

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f).$$

Lemme 8.3 [20] *Pour toutes les solutions non triviales* f *de*

$$f'' + A(z) f = 0, \tag{8.2.2}$$

on a

(i) *Si* A *est un polynôme avec* $\deg A = n \geqslant 1$, *alors*

$$\lambda(f - z) = \rho(f) = \frac{n+2}{2}.$$

(ii) *Si* A *est transcendante et* $\rho(A) < \infty$, *alors*

$$\lambda(f - z) = \rho(f) = \infty$$

et

$$\lambda_2(f - z) = \rho_2(f) = \rho(A).$$

Lemme 8.4 [50] *Soient f et g des fonctions méromorphes telles que $0 < \rho(f), \rho(g) < \infty$ et $0 < \tau(f), \tau(g) < \infty$. Alors on a*

(i) *Si $\rho(f) > \rho(g)$, alors on obtient*

$$\tau(f+g) = \tau(fg) = \tau(f).$$

(ii) *Si $\rho(f) = \rho(g)$ et $\tau(f) \neq \tau(g)$, alors on trouve*

$$\rho(f+g) = \rho(fg) = \rho(f) = \rho(g).$$

8.3 Preuve du Théorème 8.1.

Supposons que f et g sont deux solutions de (8.1.1) et (8.1.2). Alors d'après le Lemme 8.3, on a

$$\rho(f) = \rho(g) = \infty$$

et

$$\rho_2(f) = \rho(A), \ \rho_2(g) = \rho(B).$$

Sans perte de généralité, supposons que $\rho(A) \geqslant \rho(B)$. On a

$$w = d_1 f + d_2 g. \tag{8.3.1}$$

En dérivant les deux côtés de l'équation (8.3.1), on obtient

$$w' = d_1' f + d_1 f' + d_2' g + d_2 g'. \tag{8.3.2}$$

En dérivant les deux côtés de l'équation (8.3.2), on a

$$w'' = d_1'' f + 2d_1' f' + d_1 f'' + d_2'' g + 2d_2' g' + d_2 g''. \tag{8.3.3}$$

En substituant $f'' = -Af$ et $g'' = -Bg$ dans l'équation (8.3.3), on trouve

$$w'' = (d_1'' - d_1 A) f + 2d_1' f' + (d_2'' - d_2 B) g + 2d_2' g'. \tag{8.3.4}$$

En dérivant les deux côtés de (8.3.4) et en substituant $f'' = -Af$ et $g'' = -Bg$, on obtient

$$\begin{aligned} w''' &= (d_1''' - 3d_1' A - d_1 A') f + (d_1'' - d_1 A + 2d_1'') f' \\ &+ (d_2''' - 3d_2' B - d_2 B') g + (d_2'' - d_2 A + 2d_2'') g'. \end{aligned} \tag{8.3.5}$$

De (8.3.1) – (8.3.5) on trouve

$$\begin{cases} w = d_1 f + d_2 g, \\ w' = d_1' f + d_1 f' + d_2' g + d_2 g', \\ w'' = (d_1'' - d_1 A) f + 2d_1' f' + (d_2'' - d_2 B) g + 2d_2' g', \\ w''' = (d_1''' - 3d_1' A - d_1 A') f + (d_1'' - d_1 B + 2d_1'') f' \\ \quad + (d_2''' - 3d_2' B - d_2 B') g + (d_2'' - d_2 B + 2d_2'') g'. \end{cases} \tag{8.3.6}$$

Par des calculs simples, on obtient

$$h=\begin{vmatrix} d_1 & 0 & d_2 & 0 \\ d_1' & d_1 & d_2' & d_2 \\ d_1''-d_1A & 2d_1' & d_2''-d_2B & 2d_2' \\ d_1'''-3d_1'A-d_1A' & d_1''-d_1A+2d_1'' & d_2'''-3d_2'B-d_2B' & d_2''-d_2B+2d_2'' \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \left(-4d_1d_2d_1'd_2' - 4d_1d_2^2d_1'' + 4d_1^2d_2d_2'' - 2d_1^2(d_2')^2 + 6d_2^2(d_1')^2\right) A \\ &+ \left(-4d_1d_2d_1'd_2' + 4d_1d_2^2d_1'' - 4d_1^2d_2d_2'' + 6d_1^2(d_2')^2 - 2d_2^2(d_1')^2\right) B \\ &+ \left(2d_1d_2^2d_1' - 2d_1^2d_2d_2'\right) A' + \left(-2d_1d_2^2d_1' + 2d_1^2d_2d_2'\right) B' + d_1^2d_2^2\left(A-B\right)^2 \\ &+2d_1d_2d_1'd_2''' + 2d_1d_2d_2'd_1''' - 6d_1d_2d_1''d_2'' - 6d_1d_1'd_2'd_2'' + 3d_1^2(d_2'')^2 + 3d_2^2(d_1'')^2 \\ &-6d_2d_1'd_2'd_1'' + 6d_1(d_2')^2d_1'' + 6d_2(d_1')^2d_2'' - 2d_2^2d_1'd_1''' - 2d_1^2d_2'd_2'''. \end{aligned} \tag{8.3.7}$$

Comme $h \not\equiv 0$, alors par la règle de Cramer on a

$$f = \frac{\begin{vmatrix} w & 0 & d_2 & 0 \\ w' & d_1 & d_2' & d_2 \\ w'' & 2d_1' & d_2''-d_2B & 2d_2' \\ w''' & d_1''-d_1A+2d_1'' & d_2'''-3d_2'B-d_2B' & d_2''-d_2B+2d_2'' \end{vmatrix}}{h}$$

$$= \frac{2\left(d_1d_2d_2' - d_2^2d_1'\right)}{h} w^{(3)} + \phi_2 w'' + \phi_1 w' + \phi_0 w, \tag{8.3.8}$$

où ϕ_j $(j=0,1,2)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini définies dans (8.1.6) – (8.1.8). Supposons maintenant $\rho(w) < \infty$. Alors d'après (8.3.8) on obtient $\rho(f) < \infty$, c'est une contradiction. Donc $\rho(w) = \infty$. De (8.3.1) on a $\rho_2(w) \leqslant \max\{\rho(A), \rho(B)\} = \rho(A)$. Supposons que $\rho_2(w) < \rho(A)$. Alors d'après (8.3.8) on obtient $\rho_2(f) < \rho(A)$, c'est une contradiction. Donc $\rho_2(w) = \max\{\rho(A), \rho(B)\}$.

8.4 Preuve du Théorème 8.2.

D'après le Théorème 8.1 on a $\rho(w) = \infty$ et $\rho_2(w) = \max\{\rho(A), \rho(B)\}$. Posons $\Phi(z) = d_1f + d_2g - \varphi$. Comme $\rho(\varphi) < \infty$, alors on a $\rho(\Phi) = \rho(w) = \infty$ et $\rho_2(\Phi) = \rho_2(w) = \max\{\rho(A), \rho(B)\}$. Pour prouver que $\overline{\lambda}(w-\varphi) = \lambda(w-\varphi) = \infty$ et

$$\overline{\lambda}_2(w-\varphi) = \lambda_2(w-\varphi) = \max\{\rho(A), \rho(B)\},$$

il suffit de montrer que $\overline{\lambda}(\Phi) = \lambda(\Phi) = \infty$ et $\overline{\lambda}_2(\Phi) = \lambda_2(\Phi) = \max\{\rho(A), \rho(B)\}$. D'après $w = \Phi + \varphi$ et de (8.3.8)

$$f = \frac{2\left(d_1d_2d_2' - d_2^2d_1'\right)}{h} \Phi^{(3)} + \phi_2\Phi'' + \phi_1\Phi' + \phi_0\Phi + \psi, \tag{8.3.9}$$

où

$$\psi = \frac{2\left(d_1d_2d_2' - d_2^2d_1'\right)}{h} \varphi^{(3)} + \phi_2\varphi'' + \phi_1\varphi' + \phi_0\varphi.$$

En substituant (8.3.9) dans l'équation (8.1.1), on obtient

$$\frac{2\left(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1'\right)}{h}\Phi^{(5)} + \sum_{j=0}^{4}\beta_j \Phi^{(j)} = -\left(\psi'' + A\psi\right) = F,$$

où β_j $(j = 0, \cdots, 4)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Comme $\psi \not\equiv 0$ et $\rho(\psi) < \infty$, il s'ensuit que ψ n'est pas une solution de (8.1.1), ce qui implique que $F \not\equiv 0$. Ensuite, en appliquant le Lemme 8.1 on obtient (8.1.9) et (8.1.10).

8.5 Preuve du Théorème 8.3.

Par le même raisonnement que dans le Théorème 8.1 on a

$$\begin{cases} w = d_1 f + d_2 g, \\ w' = d_1' f + d_1 f' + d_2' g + d_2 g', \\ w'' = \left(d_1'' - d_1 A\right) f + 2d_1' f' + \left(d_2'' - d_2 B\right) g + 2d_2' g', \\ w''' = \left(d_1''' - 3d_1' A - d_1 A'\right) f + \left(d_1'' - d_1 B + 2d_1''\right) f', \\ + \left(d_2''' - 3d_2' B - d_2 B'\right) g + \left(d_2'' - d_2 B + 2d_2''\right) g'. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système d'équations, nous devons d'abord prouver que $h \not\equiv 0$. Par des calculs simples, on obtient

$$\begin{aligned} h = {} & \left(-4d_1 d_2 d_1' d_2' - 4d_1 d_2^2 d_1'' + 4d_1^2 d_2 d_2'' - 2d_1^2 (d_2')^2 + 6d_2^2 (d_1')^2\right) A \\ & + \left(-4d_1 d_2 d_1' d_2' + 4d_1 d_2^2 d_1'' - 4d_1^2 d_2 d_2'' + 6d_1^2 (d_2')^2 - 2d_2^2 (d_1')^2\right) B \\ & + \left(2d_1 d_2^2 d_1' - 2d_1^2 d_2 d_2'\right) A' + \left(-2d_1 d_2^2 d_1' + 2d_1^2 d_2 d_2'\right) B' + d_1^2 d_2^2 (A - B)^2 \\ & + 2d_1 d_2 d_1' d_2''' + 2d_1 d_2 d_2' d_1''' - 6d_1 d_2 d_1'' d_2'' - 6d_1 d_1' d_2' d_2'' + 3d_1^2 (d_2'')^2 + 3d_2^2 (d_1'')^2 \\ & - 6d_2 d_1' d_2' d_1'' + 6d_1 (d_2')^2 d_1'' + 6d_2 (d_1')^2 d_2'' - 2d_2^2 d_1' d_1''' - 2d_1^2 d_2' d_2'''. \end{aligned}$$

Comme

$$\max\{\rho(d_1), \rho(d_2)\} < \rho(A) = \rho(B) = \rho \ \ (0 < \rho < \infty)$$

et $0 < \tau(A) \neq \tau(B) < \infty$, alors en appliquant le Lemme 8.4 on a $\rho(h) = \rho > 0$, ce qui implique que $h \not\equiv 0$. Maintenant, par la règle de Cramer on a

$$\begin{aligned} f &= \frac{\begin{vmatrix} w & 0 & d_2 & 0 \\ w' & d_1 & d_2' & d_2 \\ w'' & 2d_1' & d_2'' - d_2 B & 2d_2' \\ w''' & d_1'' - d_1 A + 2d_1'' & d_2''' - 3d_2' B - d_2 B' & d_2'' - d_2 B + 2d_2'' \end{vmatrix}}{h} \\ &= \frac{2\left(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1'\right)}{h} w^{(3)} + \phi_2 w'' + \phi_1 w' + \phi_0 w, \end{aligned} \qquad (8.3.10)$$

où ϕ_j $(j = 0, 1, 2)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini définies dans (8.1.6) – (8.1.8). Supposons maintenant $\rho(w) < \infty$. Alors d'après (8.3.10) on obtient $\rho(f) < \infty$, c'est une contradiction. Par conséquent $\rho(w) = \infty$. De (8.3.1) on a $\rho_2(w) \leqslant \rho(A)$. Supposons que $\rho_2(w) < \rho(A)$. Alors d'après (8.3.10) on obtient $\rho_2(f) < \rho(A)$, c'est une contradiction. Donc $\rho_2(w) = \rho$.

8.6 Preuve du Théorème 8.4.

D'après le Théorème 8.3 on a $\rho(w) = \infty$ et $\rho_2(w) = \rho$. Posons $\Phi(z) = d_1 f + d_2 g - \varphi$. Comme $\rho(\varphi) < \infty$, alors on a $\rho(\Phi) = \rho(w) = \infty$ et $\rho_2(\Phi) = \rho_2(w) = \rho$. Pour prouver que $\overline{\lambda}(w-\varphi) = \lambda(w-\varphi) = \infty$ et $\overline{\lambda}_2(w-\varphi) = \lambda_2(w-\varphi) = \rho$, il suffit de montrer $\overline{\lambda}(\Phi) = \lambda(\Phi) = \infty$ et $\overline{\lambda}_2(\Phi) = \lambda_2(\Phi) = \rho$. D'après $w = \Phi + \varphi$ et de (8.3.10)

$$f = \frac{2(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1')}{h}\Phi^{(3)} + \phi_2 \Phi'' + \phi_1 \Phi' + \phi_0 \Phi + \psi, \tag{8.3.11}$$

où

$$\psi = \frac{2(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1')}{h}\varphi^{(3)} + \phi_2 \varphi'' + \phi_1 \varphi' + \phi_0 \varphi.$$

En substituant (8.3.11) dans l'équation (8.1.1), on obtient

$$\frac{2(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1')}{h}\Phi^{(5)} + \sum_{j=0}^{4} \beta_j \Phi^{(j)} = -(\psi'' + A\psi) = F.$$

où β_j $(j = 0, \cdots, 4)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Comme $\psi \not\equiv 0$ et $\rho(\psi) < \infty$, il s'ensuit que ψ n'est pas une solution de (8.1.1), ce qui implique que $F \not\equiv 0$. Alors en appliquant le Lemme 8.1 on obtient (8.1.11) et (8.1.12).

8.7 Preuve du Théorème 8.5.

Supposons que f et g sont deux solutions de (8.1.1) et (8.1.2). Alors d'après le Lemme 8.3, on a

$$\rho(f) = \rho(g) = \frac{n+2}{2}.$$

Par le même raisonnement que dans le Théorème 8.1, on obtient $h \not\equiv 0$, Comme $h \not\equiv 0$, alors par la règle de Cramer on a

$$f = \frac{\begin{vmatrix} w & 0 & d_2 & 0 \\ w' & d_1 & d_2' & d_2 \\ w'' & 2d_1' & d_2'' - d_2 B & 2d_2' \\ w''' & d_1'' - d_1 A + 2d_1'' & d_2''' - 3d_2' B - d_2 B' & d_2'' - d_2 B + 2d_2'' \end{vmatrix}}{h}$$

$$= \frac{2(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1')}{h} w^{(3)} + \phi_2 w'' + \phi_1 w' + \phi_0 w, \tag{8.3.12}$$

où ϕ_j $(j = 0, 1, 2)$ sont des fonctions méromorphes définies dans (8.1.6) $-$ (8.1.8) telles que $\rho(\phi_j) < \frac{n+2}{2}$ $(j = 0, 1, 2)$. Supposons maintenant $\rho(w) < \frac{n+2}{2}$. Alors d'après (8.3.12) on obtient que $\rho(f) < \frac{n+2}{2}$, c'est une contradiction. Par conséquent $\rho(w) = \frac{n+2}{2}$.

8.8 Preuve du Théorème 8.6.

D'après le Théorème 8.5, on a $\rho(w) = \frac{n+2}{2}$. Posons $\Phi(z) = d_1 f + d_2 g - \varphi$. Comme $\rho(\varphi) < \frac{n+2}{2}$, alors on a $\rho(\Phi) = \rho(w) = \frac{n+2}{2}$. Pour prouver que $\overline{\lambda}(w-\varphi) = \lambda(w-\varphi) = \frac{n+2}{2}$, il suffit de montrer $\overline{\lambda}(\Phi) = \lambda(\Phi) = \frac{n+2}{2}$. D'après $w = \Phi + \varphi$ et de (8.3.12)

$$f = \frac{2\left(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1'\right)}{h}\Phi^{(3)} + \phi_2 \Phi'' + \phi_1 \Phi' + \phi_0 \Phi + \psi, \tag{8.3.13}$$

où

$$\psi = \frac{2\left(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1'\right)}{h}\varphi^{(3)} + \phi_2 \varphi'' + \phi_1 \varphi' + \phi_0 \varphi.$$

En substituant (8.3.13) dans l'équation (8.1.1), on obtient

$$\frac{2\left(d_1 d_2 d_2' - d_2^2 d_1'\right)}{h}\Phi^{(5)} + \sum_{j=0}^{4} \beta_j \Phi^{(j)} = -\left(\psi'' + A\psi\right) = F,$$

où β_j $(j = 0, \cdots, 4)$ sont des fonctions méromorphes avec $\rho\left(\beta_j\right) < \frac{n+2}{2}$ $(j = 0, \cdots, 4)$. Comme $\psi \not\equiv 0$ et $\rho(\psi) < \frac{n+2}{2}$, il s'ensuit que ψ n'est pas une solution de (8.1.1), ce qui implique que $F \not\equiv 0$. Alors en appliquant le Lemme 8.2 on obtient (8.1.13).

Chapitre 9

Sur les zéros des solutions et leurs dérivées des équations différentielles non-homogènes

9.1 Introduction et résultats

L'étude de l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires a attiré de nombreux intérêts depuis les travaux de Bank et Laine, pour plus de détails voir [47] . Le but de ce chapitre est d'étudier la distribution des solutions et leurs dérivées des équations différentielles linéaires. Nous discutons d'abord sur la croissance des solutions de l'équation

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = F(z), \tag{9.1.1}$$

où $A(z), B(z) (\not\equiv 0)$ et $F(z) (\not\equiv 0)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. Quelques résultats sur la croissance des solutions de (9.1.1) ont été obtenus par plusieurs chercheurs (*voir* [8, 19, 24]). Li et Wang (voir [66]) ont étudié l'équation différentielle linéaire non homogène

$$f'' + e^{-z} f' + h(z) e^{bz} f = H(z), \tag{9.1.2}$$

où $h(z)$ est une fonction entière transcendante d'ordre fini $\rho(h) < \frac{1}{2}$, et b est une constante réelle. Ils ont prouvé que toutes les solutions non triviales de (9.1.2) sont d'ordre infini, à condition que $\rho(H) < 1$. Après, Wang et Laine (voir [78]) ont considéré l'équation différentielle

$$f'' + A_1(z) e^{az} f' + A_0(z) e^{bz} f = H(z), \tag{9.1.3}$$

où $A_0(z)$, $A_1(z)$, $H(z)$ sont des fonctions entières d'ordre inférieur à 1, et $a, b \in \mathbb{C}$, et ont obtenu le résultat suivant.

Théorème A [78] *Supposons que* $A_0 \not\equiv 0$, $A_1 \not\equiv 0$, H *sont des fonctions entières d'ordre inférieur à* 1, *et les constantes complexes* a, b *telles que* $ab \neq 0$ *et* $a \neq b$. *Alors chaque solution non triviale* f *de* (9.1.3) *est d'ordre infini.*

J. Tu et ses co-auteurs ont étudié l'hyper-exposant de convergence des zéros de $f^{(j)}(z) - \varphi(z)$ $(j = 0, 1, 2, ...)$, où f est une solution de l'équation

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = 0, \tag{9.1.4}$$

et $\varphi(z)$ est une fonction entière satisfaisant $\rho(\varphi) < \rho(f)$ ou $\rho_2(\varphi) < \rho_2(f)$, et ils ont obtenu le résultat suivant.

Théorème B [73] *Soient* $A(z)$ *et* $B(z)$ *deux fonctions entières d'ordre fini. Si* $\rho(A) < \rho(B) < \infty$ *ou* $0 < \rho(A) = \rho(B) < \infty$ *et* $\tau(A) < \tau(B)$, *alors pour chaque solution* $f \not\equiv 0$ *de* (9.1.4) *et pour toute fonction entière* $\varphi(z) \not\equiv 0$ *satisfaisant* $\rho_2(\varphi) < \rho_2(f)$, *on a*

$$\overline{\lambda_2}\left(f^{(j)} - \varphi\right) = \rho_2(f) = \rho(B), (j = 0, 1, 2, ...).$$

Il est naturel de poser la question suivante : *Que peut-on-dire sur l'exposant de convergence des zéros de* $f^{(j)}(z)$ $(j = 0, 1, 2, ...)$, *où* f *est une solution de* (9.1.1)? Le but principal de ce chapitre est de donner une réponse à cette question. Avant d'énoncé nos résultats, nous donnons les notations suivantes

$$A_j(z) = A_{j-1}(z) - \frac{B'_{j-1}(z)}{B_{j-1}(z)}, \ \textit{pour } j \in \mathbb{N}, \tag{9.1.5}$$

$$B_j(z) = A'_{j-1}(z) - A_{j-1}(z)\frac{B'_{j-1}(z)}{B_{j-1}(z)} + B_{j-1}(z), \ \textit{pour } j \in \mathbb{N}, \tag{9.1.6}$$

et

$$F_j(z) = F'_{j-1}(z) - F_{j-1}(z)\frac{B'_{j-1}(z)}{B_{j-1}(z)}, \ \textit{pour } j \in \mathbb{N}, \tag{9.1.7}$$

où $A_0(z) = A(z)$, $B_0(z) = B(z)$ et $F_0(z) = F(z)$. On obtient les résultats suivants

Théorème 9.1 [61] *Soient* $A(z)$,$B(z) \not\equiv 0$ *et* $F(z) \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini telles que* $B_j(z) \not\equiv 0$ *et* $F_j(z) \not\equiv 0$ $(j = 1, 2, 3, ...)$. *Si* f *est une solution méromorphe de* (9.1.1) *avec* $\rho(f) = \infty$ *et* $\rho_2(f) = \rho$, *alors* f *satisfait*

$$\overline{\lambda}\left(f^{(j)}\right) = \lambda\left(f^{(j)}\right) = +\infty, (j = 0, 1, 2, ...)$$

et

$$\overline{\lambda_2}\left(f^{(j)}\right) = \lambda_2\left(f^{(j)}\right) = \rho, (j = 0, 1, 2, ...).$$

Théorème 9.2 [61] *Soient* $A(z)$,$B(z) \not\equiv 0$ *et* $F(z) \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini telles que* $B_j(z) \not\equiv 0$ *et* $F_j(z) \not\equiv 0$ $(j = 1, 2, 3, ...)$. *Si* f *est une solution méromorphe d'ordre fini de* (9.1.1) *avec*

$$\rho(f) > \max\{\rho(A), \rho(B), \rho(F)\},$$

alors

$$\overline{\lambda}\left(f^{(j)}\right) = \lambda\left(f^{(j)}\right) = \rho(f), (j = 0, 1, 2, ...).$$

Remarque 9.1 *Les conditions* $B_j(z) \not\equiv 0$ *et* $F_j(z) \not\equiv 0$ $(j = 1, 2, 3, ...)$ *sont nécessaires. Par exemple* $f(z) = e^{-z} + 1$ *satisfait* (9.1.1) *où* $A(z) = \frac{z}{z+1}$, $B(z) = -\frac{1}{z+1}$ *et* $F(z) = -\frac{1}{z+1}$. *D'autre part*

$$A_1 = A - \frac{B'}{B} = 1,$$

$$B_1 = A' - A\frac{B'}{B} + B = 0, \ F_1 = F' - F\frac{B'}{B} = 0,$$

et

$$\lambda(f) = 1 > \lambda(f') = 0.$$

Ici, nous allons donner des conditions suffisantes sur les coefficients garantissant $B_j(z) \not\equiv 0$ *et* $F_j(z) \not\equiv 0$ $(j = 1, 2, 3, ...)$, et on obtient :

Théorème 9.3 [61] *Soient* $A(z)$, $B(z) \not\equiv 0$ *et* $F(z) \not\equiv 0$ *des fonctions entières d'ordre fini telles que* $\rho(B) > \max\{\rho(A), \rho(F)\}$. *Alors toute solution non triviale de* (9.1.1) *satisfait*

$$\overline{\lambda}\left(f^{(j)}\right) = \lambda\left(f^{(j)}\right) = +\infty, (j = 0, 1, 2, ...)$$

avec au plus une solution exceptionnelle possible f_0 *telle que*

$$\rho(f_0) = \max\left\{\overline{\lambda}(f_0), \rho(B)\right\}.$$

Remarque 9.2 *La condition* $\rho(B) > \max\{\rho(A), \rho(F)\}$ *ne garantit pas que toutes les solutions de* (9.1.1) *sont d'ordre infini. Par exemple, on peut voir que* $f_0(z) = e^{-z^2}$ *satisfait l'équation différentielle*

$$f'' + 2zf' + (e^{z^2} + 2)f = 1,$$

où

$$\overline{\lambda}(f_0) < \rho(f_0) = \rho(B) = 2.$$

Dans la suite, notons

$$\sigma(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log m(r, f)}{\log r}.$$

Théorème 9.4 [61] *Soient* $A(z)$, $B(z) \not\equiv 0$ *et* $F(z) \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini telles que* $\sigma(B) > \max\{\sigma(A), \sigma(F)\}$. *Si* f *est une solution méromorphe de* (9.1.1) *avec* $\rho(f) = \infty$ *et* $\rho_2(f) = \rho$, *alors* f *satisfait*

$$\overline{\lambda}\left(f^{(j)}\right) = \lambda\left(f^{(j)}\right) = +\infty, (j = 0, 1, 2, ...)$$

et

$$\overline{\lambda_2}\left(f^{(j)}\right) = \lambda_2\left(f^{(j)}\right) = \rho, (j = 0, 1, 2, ...).$$

Théorème 9.5 [61] *Soient* $A(z)$*,* $B(z) \not\equiv 0$ *et* $F(z) \not\equiv 0$ *des fonctions entières d'ordre fini telles que* $\rho(B) = \rho(A) > \rho(F)$ *et* $\tau(B) > k\tau(A)$ *où* $k \geq 1$ *est un entier. Si* f *est une solution non triviale de* (9.1.1) *avec* $\rho(f) = \infty$ *et* $\rho_2(f) = \rho$*, alors* f *satisfait*

$$\overline{\lambda}\left(f^{(j)}\right) = \lambda\left(f^{(j)}\right) = +\infty, (j = 0, 1, ..., k)$$

et

$$\overline{\lambda_2}\left(f^{(j)}\right) = \lambda_2\left(f^{(j)}\right) = \rho, (j = 0, 1, ..., k).$$

Corollaire 9.1 [61] *Supposons que* $A_0 \not\equiv 0$*,* $A_1 \not\equiv 0$*,* $H \not\equiv 0$ *sont des fonctions entières d'ordre inférieur à* 1*, et les constantes complexes* a, b *vérifient* $ab \neq 0$ *et* $|b| > k|a|$ *où* $k \geq 1$ *est un entier. Alors chaque solution non triviale* f *de* (9.1.3) *satisfait*

$$\overline{\lambda}\left(f^{(j)}\right) = \lambda\left(f^{(j)}\right) = +\infty, (j = 0, 1, ..., k).$$

9.2 Lemmes préliminaires

Lemme 9.1 ([47]) *Soit* f *une fonction méromorphe, et soit* $k \geqslant 1$ *un entier. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f), \tag{9.2.1}$$

où $S(r, f) = O(\log T(r, f) + \log r)$*, pour* $|z| = r \notin E$ *où* $E \subset [0, +\infty)$ *avec* $m(E) < \infty$*. Si* f *est d'ordre fini, alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r). \tag{9.2.2}$$

Lemme 9.2 [8, 19] *Soient* A_0*,* A_1*, ...,* A_{k-1}*,* $F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* f *est une solution méromorphe de l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f = F$$

avec $\rho(f) = +\infty$ *et* $\rho_2(f) = \rho$*, alors* f *satisfait*

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty,$$
$$\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \rho.$$

Lemme 9.3 [73] *Soient* A_0*,* A_1*, ...,* A_{k-1}*,* $F \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* f *est une solution méromorphe de l'équation* (9.2.3) *avec*

$$\max\{\rho(A_j) \quad (j = 0, 1, \cdots, k-1), \rho(F)\} < \rho(f),$$

alors

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f).$$

Lemme 9.4 [50] *Soient f et g des fonctions méromorphes telles que $0 < \rho(f), \rho(g) < \infty$ et $0 < \tau(f), \tau(g) < \infty$. Alors on a*

(i) *Si $\rho(f) > \rho(g)$, alors on obtient*

$$\tau(f+g) = \tau(fg) = \tau(f). \tag{9.2.3}$$

(ii) *Si $\rho(f) = \rho(g)$ et $\tau(f) \neq \tau(g)$, alors on trouve*

$$\rho(f+g) = \rho(fg) = \rho(f) = \rho(g). \tag{9.2.4}$$

Lemme 9.5 [24] *Soient A, $B_1, ..., B_{k-1}$, $F \not\equiv 0$ des fonctions entières d'ordre fini, où $k \geq 2$. Supposons que (i) ou (ii) ci-dessous soit vérifiée :*

(i) $\rho(B_j) < \rho(A)\,(j = 1, ..., k-1)$.
(ii) *$B_1, ..., B_{k-1}$ sont des polynômes et A est transcendante. Alors on a*
(a) Toutes solutions de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + B_{k-1}f^{(k-1)} + ... + B_1 f' + Af = F$$

vérifient

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty, \tag{9.2.5}$$

avec au plus une solution possible f_0 d'ordre fini.
(b) S'il existe une solution exceptionnelle f_0 dans le cas (a), alors f_0 satisfait

$$\rho(f_0) \leq \max\left\{\rho(A), \rho(F), \overline{\lambda}(f_0)\right\} < \infty. \tag{9.2.6}$$

De plus, si $\rho(A) \neq \rho(F)$ et $\overline{\lambda}(f_0) < \rho(f_0)$, alors $\rho(f_0) = \max\{\rho(A), \rho(F)\}$.

9.3 Preuve du Théorème 9.1.

Faisons un raisonnement par récurrence. Comme $B \not\equiv 0$, $F \not\equiv 0$, alors en utilisant le Lemme 9.2 on a

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = +\infty,$$

et

$$\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \rho.$$

En divisant les deux côtés de (9.1.1) par B, on obtient

$$\frac{1}{B}f'' + \frac{A}{B}f' + f = \frac{F}{B}. \tag{9.3.1}$$

En dérivant les deux côtés de l'équation (9.3.1), on a

$$\frac{1}{B}f^{(3)} + \left(\left(\frac{1}{B}\right)' + \frac{A}{B}\right)f'' + \left(\left(\frac{A}{B}\right)' + 1\right)f' = \left(\frac{F}{B}\right)'. \tag{9.3.2}$$

En multipliant maintenant (9.3.2) par B, on trouve

$$f^{(3)} + A_1 f'' + B_1 f' = F_1, \tag{9.3.3}$$

où

$$A_1 = A - \frac{B'}{B},$$

$$B_1 = A' - A\frac{B'}{B} + B,$$

et

$$F_1 = F' - F\frac{B'}{B}.$$

Comme $B_1 \not\equiv 0$, $F_1 \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini, alors en utilisant le Lemme 9.2 on obtient

$$\overline{\lambda}(f') = \lambda(f') = \rho(f) = +\infty,$$

et

$$\overline{\lambda}_2(f') = \lambda_2(f') = \rho_2(f) = \rho.$$

En divisant maintenant les deux côtés de (9.3.3) par B_1, on trouve

$$\frac{1}{B_1}f^{(3)} + \frac{A_1}{B_1}f'' + f' = \frac{F_1}{B_1}. \tag{9.3.4}$$

En dérivant les deux côtés de l'équation (9.3.4) et en multipliant par B_1, on a

$$f^{(4)} + A_2 f^{(3)} + B_2 f'' = F_2, \tag{9.3.5}$$

où $A_2, B_2 \not\equiv 0$ et $F_2 \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes définies dans $(9.1.5) - (9.1.7)$. En utilisant le Lemme 9.2 on obtient

$$\overline{\lambda}(f'') = \lambda(f'') = \rho(f) = +\infty,$$

et

$$\overline{\lambda}_2(f'') = \lambda_2(f'') = \rho_2(f) = \rho.$$

Supposons maintenant que

$$\overline{\lambda}\left(f^{(k)}\right) = \lambda\left(f^{(k)}\right) = \rho(f) = +\infty, \tag{9.3.6}$$

pour tout $k = 0, 1, 2, ..., j-1$, et montrons que (9.3.6) est vraie pour $k = j$. Avec la même procédure que précédemment, nous pouvons obtenir

$$f^{(j+2)} + A_j f^{(j+1)} + B_j f^{(j)} = F_j,$$

où $A_j, B_j \not\equiv 0$ et $F_j \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes définies dans $(9.1.5) - (9.1.7)$. En utilisant le Lemme 9.2 on obtient

$$\overline{\lambda}\left(f^{(j)}\right) = \lambda\left(f^{(j)}\right) = \rho(f) = +\infty,$$

et

$$\overline{\lambda}_2\left(f^{(j)}\right) = \lambda_2\left(f^{(j)}\right) = \rho_2(f) = \rho.$$

La preuve du Théorème 9.1 est terminée.

9.4 Preuve du Théorème 9.2.

Par un raisonnement similaire à celui du Théorème 9.1 et en utilisant le Lemme 9.3, on obtient

$$\overline{\lambda}\left(f^{(j)}\right) = \lambda\left(f^{(j)}\right) = \rho\left(f\right), \left(j \in \mathbb{N}\right).$$

9.5 Preuve du Théorème 9.3.

D'après le Lemme 9.5, toutes les solutions non triviales de (9.1.1) sont d'ordre infini avec au plus une solution exceptionnelle f_0 d'ordre fini. En utilisant (9.1.5) et d'après le Lemme 9.1 on a

$$m\left(r, A_j\right) \leq m\left(r, A_{j-1}\right) + O\left(\log r\right),$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, qu'on peut écrire

$$m\left(r, A_j\right) \leq m\left(r, A\right) + O\left(\log r\right), \quad \left(j \in \mathbb{N}\right). \tag{9.3.7}$$

D'autre part, on a de (9.1.6)

$$\begin{aligned} B_j &= A_{j-1}\left(\frac{A'_{j-1}}{A_{j-1}} - \frac{B'_{j-1}}{B_{j-1}}\right) + B_{j-1} \\ &= A_{j-1}\left(\frac{A'_{j-1}}{A_{j-1}} - \frac{B'_{j-1}}{B_{j-1}}\right) + A_{j-2}\left(\frac{A'_{j-2}}{A_{j-2}} - \frac{B'_{j-2}}{B_{j-2}}\right) + B_{j-2} \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} A_k\left(\frac{A'_k}{A_k} - \frac{B'_k}{B_k}\right) + B. \end{aligned} \tag{9.3.8}$$

Maintenant, montrons que $B_j \not\equiv 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Pour cela, supposons qu'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $B_j = 0$. D'après (9.3.7) et (9.3.8)

$$\begin{aligned} T\left(r, B\right) &= m\left(r, B\right) \leq \sum_{k=0}^{j-1} m\left(r, A_k\right) + O\left(\log r\right) \\ &\leq jm\left(r, A\right) + O\left(\log r\right) \\ &= jT\left(r, A\right) + O\left(\log r\right). \end{aligned} \tag{9.3.9}$$

ce qui implique la contradiction $\rho\left(B\right) \leq \rho\left(A\right)$, et $B_j \not\equiv 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
Supposons qu'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $F_j = 0$. Donc

$$F'_{j-1}\left(z\right) - F_{j-1}\left(z\right)\frac{B'_{j-1}\left(z\right)}{B_{j-1}\left(z\right)} = 0,$$

ce qui implique

$$F_{j-1}\left(z\right) = cB_{j-1}\left(z\right),$$

où $c \in \mathbb{C}^*$. De (9.3.8) on a

$$\frac{1}{c}F_{j-1} = \sum_{k=0}^{j-2} A_k\left(\frac{A'_k}{A_k} - \frac{B'_k}{B_k}\right) + B. \tag{9.3.10}$$

D'autre part, on a de (9.1.7)

$$m(r,F_j) \leq m(r,F) + O(\log r), (j = 1,2,3,...). \tag{9.3.11}$$

D'après (9.3.9), (9.3.10) et le Lemme 9.1, on trouve

$$\begin{aligned} T(r,B) &= m(r,B) \leq \sum_{k=0}^{j-2} m(r,A_k) + m(r,F_j) + O(\log r) \\ &\leq (j-1)\, m(r,A) + m(r,F) + O(\log r) \\ &= (j-1)\, T(r,A) + T(r,F) + O(\log r), \end{aligned}$$

ce qui implique la contradiction $\rho(B) \leq \max\{\rho(A), \rho(F)\}$. Comme $B_j \not\equiv 0$, $F_j \not\equiv 0$ $(j \in \mathbb{N})$, alors en appliquant le Théorème 9.1 et le Lemme 9.5 on a

$$\overline{\lambda}\left(f^{(j)}\right) = \lambda\left(f^{(j)}\right) = +\infty, (j \in \mathbb{N}),$$

avec au plus une solution exceptionnelle f_0 d'ordre fini. De (9.2.6) et comme $\rho(B) > \max\{\rho(A), \rho(F)\}$ on a

$$\rho(f_0) \leq \max\left\{\rho(B), \overline{\lambda}(f_0)\right\}. \tag{9.3.12}$$

D'après (9.1.1), on obtient

$$B = \frac{F}{f_0} - \left(\frac{f_0''}{f_0} + A\frac{f_0'}{f_0}\right),$$

alors

$$\begin{aligned} T(r,B) &= m(r,B) \leq m\left(r, \frac{F}{f_0}\right) + m(r,A) + O(\log r) \\ &\leq T(r,f_0) + T(r,F) + T(r,A) + O(\log r). \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\rho(B) \leq \max\{\rho(f_0), \rho(A), \rho(F)\} = \rho(f_0). \tag{9.3.13}$$

Comme $\overline{\lambda}(f_0) \leq \rho(f_0)$, alors en utilisant (9.3.12) et (9.3.13) on trouve

$$\rho(f_0) = \max\left\{\rho(B), \overline{\lambda}(f_0)\right\},$$

et la preuve du Théorème 9.3 est terminée.

9.6 Preuve du Théorème 9.4.

En utilisant le même raisonnement que le Théorème 9.3, on obtient le Théorème 9.4.

9.7 Preuve du Théorème 9.5.

En utilisant le même raisonnement du Théorème 9.2 et comme $\rho(B) > \rho(F)$, on trouve que $F_j \not\equiv 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Maintenant, prouvons que $B_j \not\equiv 0$ pour tout $j = 1, 2, ..., k$. Pour cela, supposons qu'il existe $1 \leq s \leq k$ tel que $B_s = 0$. D'après (9.3.7) et (9.3.8)

$$\begin{aligned} T(r, B) &= m(r, B) \leq \sum_{k=0}^{s-1} m(r, A_k) + O(\log r) \\ &\leq sm(r, A) + O(\log r) \\ &= sT(r, A) + O(\log r), \end{aligned} \tag{9.3.14}$$

ce qui implique la contradiction avec l'hypothèse $\tau(B) \leq s\tau(A)$. Alors $B_j \not\equiv 0$ pour tout $j = 1, 2, ..., k$. Comme $B_j \not\equiv 0$ et $F_j \not\equiv 0$ $(j = 0, 1, ..., k)$, alors d'après le Théorème 9.1 on a

$$\overline{\lambda}\left(f^{(j)}\right) = \lambda\left(f^{(j)}\right) = +\infty, (j = 0, 1, ..., k),$$

et

$$\overline{\lambda_2}\left(f^{(j)}\right) = \lambda_2\left(f^{(j)}\right) = \rho, (j = 0, 1, ..., k).$$

9.8 Preuve du Corollaire 9.1.

Comme $ab \neq 0$, $|b| > k|a|$, alors d'après le Théorème A, chaque solution non triviale f de (9.1.3) est d'ordre infini. En utilisant le Lemme 9.4 on a

$$\tau\left(A_0 e^{bz}\right) = \frac{|b|}{\pi} > k\frac{|a|}{\pi} = k\tau\left(A_1 e^{az}\right).$$

Alors d'après le Théorème 9.5

$$\overline{\lambda}\left(f^{(j)}\right) = \lambda\left(f^{(j)}\right) = \rho(f) = +\infty, (j = 0, 1, ..., k).$$

Chapitre 10

Oscillation des solutions et leurs dérivées des équations différentielles non-homogènes dans le disque unité

10.1 Introduction et résultats

Le but de ce chapitre est de continuer l'étude de problème d'oscillation des solutions et leurs dérivées des équations différentielles de type

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = F(z), \tag{10.1.1}$$

où $A(z)$, $B(z) \not\equiv 0$ et $F(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre $p-$itératif fini dans le disque unité Δ. Il est naturel de poser la question : *Que peut-on-dire sur l'exposant de convergence* $f^{(j)}(z)$ $(j \in \mathbb{N})$, où f est une solution de $(10.1.1)$. Pour certains études liées dans le plan complexe avec l'ordre habituel voir $[17, 19]$. Le but principal de ce chapitre est de donner une réponse à cette question. Avant d'énoncé nos résultats, donnons les notations suivantes

$$A_j(z) = A_{j-1}(z) - \frac{B'_{j-1}(z)}{B_{j-1}(z)} \text{ pour } j \in \mathbb{N}, \tag{10.1.2}$$

$$B_j(z) = A'_{j-1}(z) - A_{j-1}(z) \frac{B'_{j-1}(z)}{B_{j-1}(z)} + B_{j-1}(z) \text{ pour } j \in \mathbb{N} \tag{10.1.3}$$

et

$$F_j(z) = F'_{j-1}(z) - F_{j-1}(z) \frac{B'_{j-1}(z)}{B_{j-1}(z)} \text{ pour } j \in \mathbb{N}, \tag{10.1.4}$$

où $A_0(z) = A(z)$, $B_0(z) = B(z)$ et $F_0(z) = F(z)$. On obtient les résultats suivants.

Théorème 10.1 [60] *Soient $A(z)$, $B(z) \not\equiv 0$ et $F(z) \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes d'ordre $p-$itératif fini dans Δ telles que $B_j(z) \not\equiv 0$ et $F_j(z) \not\equiv 0$ $(j \in \mathbb{N})$. Si f est une solution méromorphe dans Δ de* $(10.1.1)$ *avec $\rho_p(f) = \infty$ et $\rho_{p+1}(f) = \rho$, alors f satisfait*

$$\overline{\lambda}_p\left(f^{(j)}\right) = \lambda_p\left(f^{(j)}\right) = \rho_p(f) = \infty \;\; (j \in \mathbb{N})$$

et

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(j)}\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(j)}\right) = \rho_{p+1}(f) = \rho \;\; (j \in \mathbb{N}).$$

Théorème 10.2 [60] *Soient* $A(z)$, $B(z) \not\equiv 0$ *et* $F(z) \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre* $p-$*itératif fini dans* Δ *telles que* $B_j(z) \not\equiv 0$ *et* $F_j(z) \not\equiv 0$ $(j \in \mathbb{N})$. *Si* f *une solution méromorphe dans* Δ *de* (10.1.1) *avec*

$$\rho_p(f) > \max\left\{\rho_p(A), \rho_p(B), \rho_p(F)\right\},$$

alors

$$\overline{\lambda}_p\left(f^{(j)}\right) = \lambda_p\left(f^{(j)}\right) = \rho_p(f) \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Remarque 10.1 *Dans les Théorèmes 10.1-10.2, les conditions* $B_j(z) \not\equiv 0$ *et* $F_j(z) \not\equiv 0$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ *sont nécessaires. Par exemple* $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 - 1$ *satisfait* (10.1.1) *où* $A(z) = \frac{-3}{1-z}$, $B(z) = -\frac{4}{(1-z)^6}$, $F(z) = \frac{4}{(1-z)^6}$ *et* $\rho_1(f) = 1 > \max\{\rho_1(A), \rho_1(B), \rho_1(F)\} = 0$. *D'autre part, on a*

$$A_1 = A - \frac{B'}{B} = -\frac{9}{1-z},$$

$$B_1 = A' - A\frac{B'}{B} + B = \frac{15}{(1-z)^2} - \frac{4}{(1-z)^6}, \quad F_1 = F' - F\frac{B'}{B} \equiv 0,$$

et

$$\lambda_1(f) = 1 > \lambda_1(f') = 0.$$

Ici, nous donnons des conditions suffisantes sur les coefficients qui garantissent $B_j(z) \not\equiv 0$ et $F_j(z) \not\equiv 0$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$, et on obtient :

Théorème 10.3 [60] *Soient* $A(z)$, $B(z) \not\equiv 0$ *et* $F(z) \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre* $p-$*itératif fini dans* Δ *telles que* $\beta = \rho_p(B) > \max\left\{\rho_p(A), \rho_p(F)\right\}$. *Alors toute solution non triviale de* (10.1.1) *satisfait*

$$\rho_p(B) \leq \overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(j)}\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(j)}\right) = \rho_{p+1}(f) \leq \rho_{M,p}(B) \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

avec au plus une solution exceptionnelle possible f_0 *telle que*

$$\rho_{p+1}(f_0) < \rho_p(B).$$

Dans la suite, notons

$$\sigma_p(f) = \limsup_{r \to 1^-} \frac{\log_p m(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}}.$$

Théorème 10.4 [60] *Soient* $A(z)$, $B(z) \not\equiv 0$ *et* $F(z) \not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre* $p-$*itératif fini dans* Δ *telles que* $\sigma_p(B) > \max\{\sigma_p(A), \sigma_p(F)\}$. *Si* f *est une solution méromorphe dans* Δ *de* (10.1.1) *avec* $\rho_p(f) = \infty$ *et* $\rho_{p+1}(f) = \rho$, *alors* f *satisfait*

$$\overline{\lambda}_p\left(f^{(j)}\right) = \lambda_p\left(f^{(j)}\right) = \rho_p(f) = \infty \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

et

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(j)}\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(j)}\right) = \rho_{p+1}(f) = \rho \quad (j = 0, 1, 2, \cdots).$$

10.2 Lemmes préliminaires

Lemme 10.1 [11] *Soit f une fonction méromorphe dans Δ avec $i(f) = p \geq 1$ et $\rho_p(f) = \beta < \infty$, et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors pour toute $\varepsilon > 0$ doné,*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\exp_{p-2}\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\beta+\varepsilon}\right)$$

pour tout $r \notin E_1 \subset [0,1)$ avec $\int_{E_1} \frac{dr}{1-r} < \infty$.

Lemme 10.2 [16] *Soient $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes dans Δ, et soit f une solution méromorphe de l'équation différentielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z) f = F(z) \tag{10.2.1}$$

telle que $i(f) = p$ $(0 < p < \infty)$. Si

$$\max\{i(A_j) \quad (j = 0, 1, \cdots, k-1), i(F)\} < p$$

ou

$$\max\left\{\rho_p(A_j) \quad (j = 0, 1, \cdots, k-1), \rho_p(F)\right\} < \rho_p(f),$$

alors

$$i_{\overline{\lambda}}(f) = i_\lambda(f) = i(f) = p$$

et

$$\overline{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \rho_p(f).$$

Lemme 10.3 [16] *Soient $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes d'ordre $p-$itératif fini dans Δ. Si f est une solution méromorphe avec $\rho_p(f) = \infty$ et $\rho_{p+1}(f) = \rho < \infty$ de l'équation* (10.2.1), *alors $\overline{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \rho_p(f) = \infty$ et $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho$.*

Lemme 10.4 [16] *Soit $p \in \mathbb{N}$, et supposons que les coefficients $A_0, \cdots, A_{k-1}$ et $F \not\equiv 0$ sont analytiques dans Δ et $\rho_p(A_j) < \rho_p(A_0)$ pour tout $j = 1, \cdots, k-1$. Soit*

$$\alpha_M := \max\left\{\rho_{M,p}(A_j) : j = 0, \cdots, k-1\right\}.$$

(i) *Si $\rho_{M,p+1}(F) > \alpha_M$, alors toute solution f de* (10.2.1) *satisfait $\rho_{M,p+1}(f) = \rho_{M,p+1}(F)$.*
(ii) *Si $\rho_{M,p+1}(F) < \alpha_M$, alors toute solution f de* (10.2.1) *satisfait $\rho_p(A_0) \leq \rho_{M,p+1}(f) \leq \alpha_M$, avec au plus une exeption f_0 satisfaisant $\rho_{M,p+1}(f_0) < \rho_p(A_0)$.*
(iii) *Si $\rho_{M,p+1}(F) < \rho_p(A_0)$, alors toute solution f de* (10.2.1) *satisfait $\rho_p(A_0) \leq \overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{M,p+1}(f) \leq \alpha_M$, avec au plus une exeption f_0 satisfaisant $\rho_{M,p+1}(f_0) < \rho_p(A_0)$.*

10.3 Preuve du Théorème 10.1.

Faisons un raisonnement par récurrence. Comme $B(z) \not\equiv 0$ et $F(z) \not\equiv 0$, alors en utilisant le Lemme 10.3 on a
$$\overline{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \rho_p(f) = \infty$$
et
$$\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \rho_{p+1}(f) = \rho.$$
En divisant les deux côtés de (10.1.1) par B, on obtient
$$\frac{1}{B}f'' + \frac{A}{B}f' + f = \frac{F}{B}. \tag{10.3.1}$$
En dérivant les deux côtés de l'équation (10.3.1), on a
$$\frac{1}{B}f^{(3)} + \left(\left(\frac{1}{B}\right)' + \frac{A}{B}\right)f'' + \left(\left(\frac{A}{B}\right)' + 1\right)f' = \left(\frac{F}{B}\right)'. \tag{10.3.2}$$
En multipliant maintenant (10.3.2) par B, on trouve
$$f^{(3)} + A_1 f'' + B_1 f' = F_1, \tag{10.3.3}$$
où
$$A_1 = A - \frac{B'}{B},\ B_1 = A' - A\frac{B'}{B} + B$$
et
$$F_1 = F' - F\frac{B'}{B}.$$
Comme $B_1 \not\equiv 0$ et $F_1 \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre $p-$iteratif fini, alors en utilisant le Lemme 10.3 on obtient
$$\overline{\lambda}_p(f') = \lambda_p(f') = \rho_p(f) = \infty$$
et
$$\overline{\lambda}_{p+1}(f') = \lambda_{p+1}(f') = \rho_{p+1}(f) = \rho.$$
En divisant les deux côtés de (10.3.3) par B_1, on obtient
$$\frac{1}{B_1}f^{(3)} + \frac{A_1}{B_1}f'' + f' = \frac{F_1}{B_1}. \tag{10.3.4}$$
En dérivant les deux côtés de l'équation (10.3.4) et multipliant par B_1, on trouve
$$f^{(4)} + A_2 f^{(3)} + B_2 f'' = F_2, \tag{10.3.5}$$
où $A_2, B_2 \not\equiv 0$ et $F_2 \not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes definies dans $(10.1.2) - (10.1.4)$. En utilisant le Lemme 10.3 on obtient
$$\overline{\lambda}_p(f'') = \lambda_p(f'') = \rho_p(f) = \infty$$
et
$$\overline{\lambda}_{p+1}(f'') = \lambda_{p+1}(f'') = \rho_{p+1}(f) = \rho.$$

Supposons maintenant que

$$\overline{\lambda}_p\left(f^{(k)}\right)=\lambda_p\left(f^{(k)}\right)=\rho_p\left(f\right)=\infty,\ \overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(k)}\right)=\lambda_{p+1}\left(f^{(k)}\right)=\rho_{p+1}\left(f\right)=\rho \tag{10.3.6}$$

pour tout $k=0,1,2,\cdots,j-1$, et montrons que (10.3.6) est vraie pour $k=j$. Avec la même procédure que précédemment, nous pouvons obtenir

$$f^{(j+2)}+A_jf^{(j+1)}+B_jf^{(j)}=F_j,$$

où $A_j,B_j\not\equiv 0$ et $F_j\not\equiv 0$ sont des fonctions méromorphes definies dans $(10.1.2)-(10.1.4)$. En utilisant le Lemme 10.3 on obtient

$$\overline{\lambda}_p\left(f^{(j)}\right)=\lambda_p\left(f^{(j)}\right)=\rho_p\left(f\right)=\infty$$

et

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(j)}\right)=\lambda_{p+1}\left(f^{(j)}\right)=\rho_{p+1}\left(f\right)=\rho.$$

La preuve du Théorème 10.1 est terminée.

10.4 Preuve du Théorème 10.2.

Par un raisonnement similaire à celui du Théorème 10.1 et en utilisant le Lemme 10.2, on obtient

$$\overline{\lambda}\left(f^{(j)}\right)=\lambda\left(f^{(j)}\right)=\rho\left(f\right),(j=0,1,2,...)\,.$$

10.5 Preuve du Théorème 10.3.

D'après le Lemme 10.4 (iii), toutes les solutions non triviales de (10.1.1) vérifient

$$\rho_p\left(B\right)\leq\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right)=\lambda_{p+1}\left(f\right)=\rho_{p+1}\left(f\right)\leq\rho_{M,p}\left(B\right)$$

avec au plus une solution exceptionnelle f_0 telle que $\rho_p\left(B\right)>\rho_{p+1}\left(f_0\right)$. En utilisant (10.1.2) et le Lemme 10.1 on a

$$m\left(r,A_j\right)\leq m\left(r,A_{j-1}\right)+O\left(\exp_{p-2}\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\beta+\varepsilon}\right)\quad\left(\beta=\rho_p\left(B_{j-1}\right)\right),$$

où $r\notin E_1\subset[0,1)$ avec $\int_{E_1}\frac{dr}{1-r}<\infty$, pour tout $j\in\mathbb{N}$, qu'on peut écrire

$$m\left(r,A_j\right)\leq m\left(r,A\right)+O\left(\exp_{p-2}\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\beta+\varepsilon}\right)\quad\left(j=1,2,3,\cdots\right). \tag{10.3.7}$$

D'autre part, on a de (10.1.3)

$$B_j=A_{j-1}\left(\frac{A'_{j-1}}{A_{j-1}}-\frac{B'_{j-1}}{B_{j-1}}\right)+B_{j-1}$$

$$=A_{j-1}\left(\frac{A'_{j-1}}{A_{j-1}}-\frac{B'_{j-1}}{B_{j-1}}\right)+A_{j-2}\left(\frac{A'_{j-2}}{A_{j-2}}-\frac{B'_{j-2}}{B_{j-2}}\right)+B_{j-2}$$

$$= \sum_{k=0}^{j-1} A_k \left(\frac{A'_k}{A_k} - \frac{B'_k}{B_k} \right) + B. \tag{10.3.8}$$

Maintenant, montrons que $B_j \not\equiv 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Pour cela, supposons qu'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $B_j = 0$. D'après (10.3.7) et (10.3.8) on a

$$\begin{aligned} T(r, B) = m(r, B) &\leq \sum_{k=0}^{j-1} m(r, A_k) + O\left(\exp_{p-2} \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\beta+\varepsilon} \right) \\ &\leq jm(r, A) + O\left(\exp_{p-2} \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\beta+\varepsilon} \right) \\ &= jT(r, A) + O\left(\exp_{p-2} \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\beta+\varepsilon} \right) \end{aligned} \tag{10.3.9}$$

ce qui implique la contradiction $\rho_p(B) \leq \rho_p(A)$. Donc $B_j \not\equiv 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Supposons maintenant qu'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $F_j = 0$. Alors, de (10.1.5)

$$F'_{j-1}(z) - F_{j-1}(z) \frac{B'_{j-1}(z)}{B_{j-1}(z)} = 0$$

ce qui implique

$$F_{j-1}(z) = cB_{j-1}(z), \tag{10.3.10}$$

où $c \in \mathbb{C}^*$. D'après (10.3.8) et (10.3.10) on a

$$\frac{1}{c} F_{j-1} = \sum_{k=0}^{j-2} A_k \left(\frac{A'_k}{A_k} - \frac{B'_k}{B_k} \right) + B. \tag{10.3.11}$$

d'autre part, on a de (10.1.5)

$$m(r, F_j) \leq m(r, F) + O\left(\exp_{p-2} \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\beta+\varepsilon} \right) \quad (j = 1, 2, 3, \cdots). \tag{10.3.12}$$

D'après (10.3.11), (10.3.12) et le Lemme 10.1, on a

$$\begin{aligned} T(r, B) &= m(r, B) \leq \sum_{k=0}^{j-2} m(r, A_k) + m(r, F_{j-1}) + O\left(\exp_{p-2} \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\beta+\varepsilon} \right) \\ &\leq (j-1)\, m(r, A) + m(r, F) + O\left(\exp_{p-2} \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\beta+\varepsilon} \right) \\ &= (j-1)\, T(r, A) + T(r, F) + O\left(\exp_{p-2} \left(\frac{1}{1-r} \right)^{\beta+\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

ce qui implique la contradiction $\rho_p(B) \leq \max\left\{ \rho_p(A), \rho_p(F) \right\}$. Comme $B_j \not\equiv 0$, $F_j \not\equiv 0$ $(j \in \mathbb{N})$, alors en appliquant le Théorème 10.1 et le Lemme 10.4 (iii) on a

$$\rho_p(B) \leq \overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(j)} \right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(j)} \right) = \rho_{p+1}(f) \leq \rho_{M,p}(B) \quad (j \in \mathbb{N})$$

avec au plus une solution exceptionnelle f_0 telle que $\rho_p(B) > \rho_{p+1}(f_0)$.

10.6 Preuve du Théorème 10.4.

En utilisant le même raisonnement du Théorème 10.1, on obtient le Théorème 10.4.

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, on a étudié certains problèmes liés à l'ordre de croissance et à la distribution des zéros des solutions des équations différentielles complexes dans le plan et le disque unité. Des résultats importants on été obtenus sur les équations homogènes et non homogènes à coefficients fonctions polynômes et fonctions transcendantes. L'outil principal utilisé dans cette étude étant la théorie de Nevanlinna. Cette théorie est la plus approprié dans l'étude des équations différentielles. On a commencé cette thèse, par montrer quelques nouvelles propriétés sur l'ordre et le type de croissance et la relation entre eux. On a prouvé aussi dans le troisième Chapitre quelques estimations sur la croissance des dérivées logarithmiques des fonctions méromorphes et entières et leurs applications dans la théorie des équations différentielles. Par exemple, dans le Théorème 3.4, on a étudié une version plus générale de l'équation de Verhulst-Pearl (voir [29])

$$x'(t) = x(t)\left[a - bx(t)\right] \quad (a, b > 0),$$

qui est le modèle déterminant les causes qui agissent sur l'accroissement d'une population.

Dans les Chapitres 4-8, on a étudié le problème de la croissance et l'oscillation des polynômes différentiels dans le plan complexe et le disque unité, on a montré sous certaines conditions que les polynômes différentiels possèdent les mêmes propriétés des solutions, d'une manière analogue, on a étudié le même problème pour les polynômes des solutions $w = d_1 f_1 + d_2 f_2$, lorsque f_1 et f_2 ne sont pas solutions de la même équation.

Dans les Chapitres 9-10, on a utilisé une nouvelle technique pour étudier le problème de la distribution des zéros des dérivées des solutions des équations différentielles non-homogènes du second ordre dans le plan et le disque unité.

Enfin, on propose quelques questions et problème ouverts.

Problème 1. *Soient f_1, $f_2, ..., f_k$ des solutions linéairement indépendantes de l'équation à coefficients fonctions méromorphes*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_0(z) f = 0.$$

Que peut-on-dire sur l'ordre et l'oscillation de la combinaison des solutions

$$w = d_k f_k + d_{k-1} f_{k-1} + ... + d_0 f,$$

où $d_i(z)$ $(i = 0, 1, ..., k)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini ?

Problème 2. *Soient f et g deux solutions des équations*

$$f'' + A(z) f = 0$$

et

$$g'' + (A(z) + h(z))\, g = 0,$$

où A *et* h *sont des fonctions entières telles que* $\rho(A) > \rho(h)$. *Quelle est la relation entre l'exposant de convergence de* f *et de* g?

Problème3. *Peut-on obtenir des résultats analogues à cette thèse pour les équations fonctionnelles complexes ?* (voir [58]) .

Bibliographie

[1] **A. Asiri**, *Common zeros of the solutions of two differential equations,* Comput. Methods Funct. Theory, 12(1) (2012), 67-85.

[2] **A. Asiri**, *Common zeros of the solutions of two differential equations with transcendental coefficients*, J. Inequal. Appl. 2011, 2011 :134, 1-13.

[3] **A. Asiri**, *Common zeros of the solutions of two non-homogeneous first order differential equations,* Results in Mathematics, pages 1-10.

[4] **S. Bank**, *General theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations*, Compositio Math. 25 (1972), 61–70.

[5] **S. Bank and I. Laine**, *On the oscillation theory of* $f'' + Af = 0$ *where* A *is entire*, Trans. Amer Math.Soc. 273(1982), 351-363.

[6] **S. Bank and I. Laine**, *On the zeros of meromorphic solutions of second order linear differential equations*, Comment. Math. Helv. 58(1983), 656-677.

[7] **B. Belaïdi**, *The Properties of Solutions of Some Linear Differential Equations*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 78/2 (2011), 317-326.

[8] **B. Belaïdi**, *Growth and oscillation theory of solutions of some linear differential equations*, Mat. Vesnik 60 (2008), no. 4, 233–246.

[9] **B. Belaïdi**, *Oscillation of fast growing solutions of linear differential equations in the unit disc*, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 2, 1 (2010), 25-38.

[10] **B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Differential polynomials generated by some complex linear differential equations with meromorphic coefficients*, Glas. Mat. Ser. III 43(63) (2008), no. 2, 363-373.

[11] **B. Belaïdi**, *Growth of soluitions to linear differential equations with analytic coefficients of [P,Q]-order in the unit disc*, Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2011 (2011), No. 156, 1-11.

[12] **L. G. Bernal**, *On growth k-order of solutions of a complex homogeneous linear differential equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987), no. 2, 317-322.

[13] **T. B. Cao**, *The growth, oscillation and fixed points of solutions of complex linear differential equations in the unit disc*, J. Math. Anal. Appl. 352(2009), no. 2, 739-748.

[14] **T. B. Cao and H. X. Yi**, *The growth of solutions of linear differential equations with coefficients of iterated order in the unit disc*, J. Math. Anal. Appl. 319 (2006), 278-294.

[15] **T. B. Cao and H. X. Yi**, *On the complex oscillation theory of* $f'' + Af = 0$ *where* $A(z)$ *is analytic in the unit disc*, Math. Nachr. 282(2009), no. 6, 820-831.

[16] **T. B. Cao and H. X. Yi**, *On the complex oscillation theory of linear differential equations with analytic coefficients in the unit disc*, Acta Math. Sci. 28A (6) (2008), 1046-1057.

[17] **T. B. Cao, Z. X. Chen, X. M. Zheng and J. Tu**, *On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Ann. Differential Equations 21 (2005), no. 2, 111–122.

[18] **T. B. Cao, Z. X. Chen, X. M. Zheng and J. Tu**, *On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Ann. Differential Equations 21 (2005), no. 2, 111–122.
[19] **Z. X. Chen**, *Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Analysis 14 (1994), no. 4, 425–438.
[20] **Z. X. Chen**, *The fixed points and hyper-order of solutions of second order complex differential equations,* Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed. 20 (2000), no. 3, 425–432 (in Chinese).
[21] **Z.X. Chen and C.C. Yang**, *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*, Kodai Math. J., 22 (1999), 273-285.
[22] **Z. X. Chen and K. H. Shon**, *On the growth and fixed points of solutions of second order differential equations with meromorphic coefficients*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 21(2005), 753-764.
[23] **Z. X. Chen and C. C. Yang**, *Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations*, Complex Var. 42 (2000), 119-133.
[24] **Z. X. Chen and S. A. Gao**, *The complex oscillation theory of certain non-homogeneous linear differential equations with transcendental entire coefficients*, Journal of Math Analysis and Applications 179, 403-416 (1993).
[25] **Z. X. Chen and C. C. Yang**, *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*, Kodai Math. J. 22 (1999), no. 2, 273–285.
[26] **C. T. Chuang**, *Sur la comparaison de la croissance d'une fonction méromorphe et de celle de sa dérivée*, Bull. Sci. Math. (2) 75(1951), 171-190.
[27] **A. El Farissi and B. Belaïdi**, *On oscillation theorems for differential polynomials*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2009), No. 22, 1-10.
[28] **A. El Farissi, B. Belaïdi and Z. Latreuch**, *Growth and oscillation of differential polynomials in the unit disc*, Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2010(2010), No. 87, 1-7.
[29] **S. Elaydi,** *An Introductio to Difference Equations,* 3rd ed., Springer, New York, 2005.
[30] **S. A. Gao, Z. X. Chen and T. W. Chen**, *Oscillation theory of linear differential equations*, Middle China University of Technology Press, Wuhan, China, 1998.
[31] **A. A. Goldberg and I. V. Ostrovskii**, *The distribution of values of meromorphic functions*, Irdat Nauk, Moscow, 1970 (in Russian), Transl. Math. Monogr., vol. 236, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2008.
[32] **G. G. Gundersen**, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), no. 1, 88–104.
[33] **G. G. Gundersen**, *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), no. 1, 415–429.
[34] **G. Gundersen, E. M. Steinbart and S. P. Wang**, *The possible order of solutions of linear differential equations with polynomial coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (3)(1998), 1225-1247.
[35] **W. K. Hayman**, *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford, 1964.
[36] **W. K. Hayman**, *The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method*, Canad. Math. Bull. 17 (1974), no. 3, 317–358.
[37] **J. Heittokangas**, *On complex differential equations in the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. 122(2000), 1-54.

[38] **J. Heittokangas, R. Korhonen and J. Rättyä**, *Fast growing solutions of linear differential equations in the unit disc*, Result. Math. 49(2006), 265-278.
[39] **J. Heittokangas, R. Korhonen and J. Rättyä**, *Growth estimates for solutions of linear complex differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 29(2004), 233-246.
[40] **S. Hellerstein, J. Miles and J. Rossi**, *On the growth of solutions of* $f''+gf'+hf=0$, Trans. Amer. Math. Soc. 324 (1991), 693-706.
[41] **H. Herold**, *Ein Vergleichssatz für komplexe lineare Differentialgleichungen*, (German) Math. Z. 126 (1972), 91–94.
[42] **G. Jank and L. Volkmann**, *Einführung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen*, Birkhäuser, Basel-Boston, 1985.
[43] **O. P. Juneja, G. P. Kapoor and S. K. Bajpai**, *On the (p,q)-order and lower (p,q)-order of an entire function*, J. Reine Angew. Math. 282 (1976), 53-67.
[44] **O. P. Juneja, G. P. Kapoor and S. K. Bajpai**, *On the (p,q)-type and lower (p,q)-type of an entire function*, J. Reine Angew. Math. 290 (1977), 385-405.
[45] **L. Kinnunen**, *Linear differential equations with solutions of finite iterated order*, Southeast Asian Bull. Math. 22 (1998), no. 4, 385-405.
[46] **K. H. Kwon**, *Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations*, Kodai Math. J. 19 (1996), no. 3, 378–387.
[47] **I. Laine**, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1993.
[48] **I. Laine**, *Complex differential equations*, Handbook of Differential Equations : Ordinary Differential Equations, 4(2008), 269-363.
[49] **I. Laine and J. Rieppo,** *Differential polynomials generated by linear differential equations*, Complex Var. Theory Appl. 49 (2004), no. 12, 897–911.
[50] **Z. Latreuch and B. Belaïdi**, *Estimations about the order of growth and the type of meromorphic functions in the complex plane*. Univ. Oradea, fasc. Mat 20 (2013).
[51] **Z. Latreuch and B. Belaïdi**, *Some properties of solutions of second order linear differential equations*, Journal of Complex Analysis. Volume 2013, Article ID 253168, 5 pages.
[52] **Z. Latreuch and B. Belaïdi** , *Growth and Oscillation of Differential Polynomials Generated by Finite Order Solutions of Second Order Differential Equations*. Institute of Advanced Scientific Research , Vol 3, Issue 3, 2011 , pp. 46 – 55
[53] **Z. Latreuch and B. Belaïdi and A. El Farissi**, *Complex oscillation of differential polynomials in the unit disc*, Periodica Mathematica Hungarica.Vol 66 (1), 2013, pp. 45-60.
[54] **Z. Latreuch and B. Belaïdi**, *Linear differential equations with analytic coefficients of [p,q]-order in the unit disc*, Sarajevo Journal of Mathematics. Vol.9 (21) (2013), 71-84.
[55] **Z. Latreuch and B. Belaïdi**, *Growth of logarithmic derivative of meromorphic functions*, Mathematica Scandinavica.Vol 113, No 2 (2013).
[56] **Z. Latreuch and B. Belaïdi**, *Further estimations on the order of growth and the type of meromorphic functions in the unit disc*, Journal of Interdisciplinary Mathematics. Volume 16, Issue 6, 2013.
[57] **Z. Latreuch and B. Belaïdi**, *Growth and oscillation of differential polynomials generated by complex differential equations*, Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2013 (2013), No. 16, pp. 1-14.
[58] **Z. Latreuch and B. Belaïdi**, *Growth and oscillation of meromorphic solutions of linear difference equations*, Matematicki Vesnik. 66, 2 (2014), 213–222. June 2014.

[59] **Z. Latreuch and B. Belaïdi**, *On the comparison of two pairs of second order linear differential equations*, Journal of Mathematical Sciences the University of Tokyo. Accepted.
[60] **Z. Latreuch and B. Belaïdi**, *Complex oscillation of solutions and their derivatives of non-homogenous linear differential equations in the unit disc*, International Journal of Analysis and Applications. Volume 2, Number 2 (2013), 111-123.
[61] **Z. Latreuch and B. Belaïdi**, *On the zeros of solutions and their derivatives of second order non-homogenous linear differential equations*, Soumis.
[62] **B. Ya. Levin**, *Lectures on entire functions.* In collaboration with and with a preface by Yu. Lyubarskii, M. Sodin and V. Tkachenko. Translated from the Russian manuscript by Tkachenko. Translations of Mathematical Monographs, 150. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
[63] **M. S. Liu and X. M. Zhang**, *Fixed points of meromorphic solutions of higher order Linear differential equations,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31 (2006), no. 1, 191–211.
[64] **Y. Z. Li**, *On the growth of the solution of two-order differential equations in the unit disc*, Pure Appl. Math. 4 (2002), 295-300.
[65] **J. Liu, J. Tu and L. Z. Shi**, *Linear differential equations with entire coefficients of (p,q)-order in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl. 372 (2010), 55-67.
[66] **Y. Li and J. Wang**, *Oscillation of solutions of linear differential equations*, Acta Math. Sin.(Engl. Ser.). 24(1)(2008) : 167-178.
[67] **A. Z. Mohon'ko**, *The Nevanlinna characteristics of certain meromorphic functions*, (Russian) Teor. Funkciĭ Funkcional. Anal. i Priložen. No. 14 (1971), 83–87.
[68] **R. Nevanlinna**, *Eindeutige analytische Funktionen*, Zweite Auflage, Reprint.
Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 46. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.
[69] **M.Tsuji**, *Potential theory in modern function theory*, New York ; Chelsea 1975.
[70] **J. Tu and C. F. Yi**, *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order*, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), no. 1, 487-497.
[71] **J. Tu and C. F. Yi**, *Growth of solutions of higher order linear differential equations with the coefficient A_0 being dominant*, Acta Math. Sci. 30A (4) (2010), 945-952.
[72] **J. Tu and T. Long**, *Oscillation of complex high order linear differential equations with coefficients of finite iterated order*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2009, No. 66, 1-13.
[73] **J. Tu, H. Y. Xu and C. Y. Zhang**, *On the zeros of solutions of any order of derivative of second order linear diffential equations taking small functions*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2011, No. 23, 1-17.
[74] **G. Valiron**, *Sur la dérivée des fonctions algébroides*, Bull. Soc. Math. France 59 (1931), 17-39.
[75] **G. Valiron**, *Lectures on the General Theory of Integral Functions*, translated by E. F. Collingwood, Chelsea, New York, 1949.
[76] **J. Wang, H. X. Yi, H. Cai**, *Fixed points of the $l-th$ power of differential polynomials generated by solutions of differential equations*, J. Syst. Sci. Complex. 17 (2004), no. 2, 271–280.
[77] **J. Wang and H. X. Yi**, *Fixed points and hyper-order of differential polynomials generated by solutions of differential equation*, Complex Var. Theory Appl. 48 (2003), no. 1, 83-94.

[78] **J. Wang and I. Laine**, *Growth of solutions of second order linear differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 342 (2008) 39-51.
[79] **H. Wittich**, *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytishe Funktionen*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.
[80] **L. Z. Yang**, *Solutions of a pair of differential equations and their applications*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 80 (2004), no. 1, 1–5.
[81] **C. C. Yang and H. X. Yi**, *Uniqueness theory of meromorphic functions*, Mathematics and its Applications, 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.
[82] **G. Zhang and A. Chen**, *Fixed points of the derivative and k-th power of solutions of complex linear differential equations in the unit disc*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2009, No. 48, 1-9.