

جامعة عبد الحميد بن باديس - مستغانم
كلية الحقوق و العلوم التجارية

مذكرة مقدمة لاستكمال متطلبات شهادة الماجستير

التخصص: التقنيات الكمية للتسيير.

بعنوان:

تطبيق نظرية صفوف الانتظار في الموانئ البحرية

دراسة تطبيقية : مؤسسة ميناء مستغانم EPM

تحت إشراف الدكتور:

عشوي نصر الدين

إعداد الطالب :

يخلف عبد الله

أعضاء لجنة المناقشة

الاسم واللقب	الدرجة العلمية	الجامعة الاصلية	الصفة
البروفيسور/عامر عامر	أستاذ محاضر	جامعة مستغانم	رئيسا
الدكتور/عشوي نصر الدين	أستاذ محاضر	جامعة مستغانم	مقررا
الدكتور/العبد محمد	أستاذ محاضر	جامعة مستغانم	عضوا
الدكتور/برينيس عبد القادر	أستاذ محاضر	جامعة مستغانم	عضوا
الدكتور/بن منصور عبدالله	أستاذ محاضر	جامعة تلمسان	عضوا

السنة الجامعية: 1430-1431هـ / 2009-2010م

شكر و عرفان

« رب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي وعلى والدي
وأن أعمل صالحا ترضاه وادخني برحمتك في عبادة الصالحين »
- الآية 19 من سورة النمل -

أشكر الله تعالى الذي وفقني لإتمام هذا العمل المتواضع
أتقدم بخالص الثناء للدكتور محشوي نصر الدين
الذي شرفني بإشرافه على بحثي وتوجيهاته السديدة التي لم
يبخلني بها.

أتقدم بالشكر الجزيل إلى كل الأساتذة
على ما قدموه إلينا خلال مشوارنا التعليمي
إلى جميع إدارات و عمال و موظفي المؤسسة هيئة مستغانم
واخص بالذكر كل من

ولد عبد الرحمن محمد و بن حمودة عبد الحليم
و إلى كل عمال مكتبة كلية الحقوق و العلوم التجارية
و أيضا عمال مكتبة المركزية لجامعة مستغانم
على تفهمهم ومعاولتهم الطيبة.
إلى كل من ساعدنا من قريب أو من بعيد، ولو بكلمة.

الإهداء

إلى أبي رحمه الله، اهدي هذا العمل المتواضع.
إلى أمي التي تعبت كثيرا من أجل راحتي و أفنت
حياتها من أجل تعليمي وبفضل دعواتها مهدت لي طريق
النجاح والتوفيق أظل الله في عمرها،

الفهرس

الفهرس الأشكال و الجداول

قائمة الأشكال البيانية:

الصفحة	عنوان الشكل	رقم الشكل
ii	مخطط يمثل صف انتظار بسيط	الشكل رقم (1)
09	مثال عن انجاز عملية عشوائية مستمرة	الشكل رقم (1-1)
11	دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بواسون	الشكل رقم (2-1)
12	دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع جاوس	الشكل رقم (3-1)
14	دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ايرلانج	الشكل رقم (4-1)
26	مخطط عملية الولادة	الشكل رقم (5-1)
29	مخطط عملية الولادة و الوفاة	الشكل رقم (6-1)
31	التمثيل البياني لعملية الولادة الجماعية	الشكل رقم (7-1)
36	التمثيل البياني لعملية الوفاة الجماعية	الشكل رقم (8-1)
42	مخطط يبين خصائص صفوف الانتظار	الشكل رقم (9-1)
47	الهياكل الأساسية لصفوف الانتظار	الشكل رقم (10-1)
48	نمط وقت الخدمة	الشكل رقم (11-1)
54	منحنى يمثل عملية الوصول و عملية المغادرة و عملية التعداد.	الشكل رقم (12-1)
61	منحنى مستوى الخدمة بدلالة تكاليف الخدمة	الشكل رقم (13-1)
66	مخطط يمثل صف الانتظار M/M/1	الشكل رقم (1-2)
73	مخطط يمثل صف الانتظار M/M/s	الشكل رقم (2-2)
80	قانون زمن الانتظار	الشكل رقم (3-2)
83	مخطط يمثل صف انتظار M/M/s/k	الشكل رقم (4-2)
94	مخطط مبسط لشبكة مفتوحة	الشكل رقم (5-2)
95	مثالان عن شبكة صفوف الانتظار : مفتوحة و مغلقة	الشكل رقم (6-2)
97	شبكة جاكسون	الشكل رقم (7-2)

101	مثال عن شبكة جاكسون	الشكل رقم (2-8)
110	تمثيل بياني لأنواع النماذج	الشكل رقم (3-1)
111	المراحل المتبعة لإجراء عملية المحاكاة	الشكل رقم (3-2)
112	منهجية إعداد المحاكاة	الشكل رقم (3-3)
113	خطوات عملية المحاكاة	الشكل رقم (3-4)
114	مخطط انسيابي لإعداد دراسة بواسطة المحاكاة	الشكل رقم (3-5)
117	مخطط يمثل طريقة مونت كارلو	الشكل رقم (3-6)
124	الواجهة الأساسية لبرنامج Arena	الشكل رقم (3-7)
134	موقع الرصيف الشمالي الشرقي	الشكل رقم (4-1)
134	موقع الحوض الجديد في طور الإنجاز	الشكل رقم (4-2)
136	منحنى يبين تطور فترات انتظار السفن عند الرسو خلال 10 سنوات	الشكل رقم (4-3)
137	منحنى يبين تطور فترات بقاء السفن في الرصيف خلال 10 سنوات	الشكل رقم (4-4)
139	المتوسط الشهري لعدد السفن في الرصيف	الشكل رقم (4-5)
	مخطط يمثل ظاهرة الانتظار في الرصيف	الشكل رقم (4-6)
143	تمثيل مبسط لهيكل الانتظار في مركز خدمة الرصيف	الشكل رقم (4-7)
149	تكرارات وصول السفن الى الرصيف	الشكل رقم (4-8)
151	تكرارات زمن الخدمة الرصيف	الشكل رقم (4-9)
158	مخطط سير العمليات داخل الرصيف	الشكل رقم (4-10)

قائمة الجداول:

الصفحة	عنوان الجدول	رقم الجدول
06	الأنواع الأربعة للعمليات العشوائية	الجدول رقم (1-1)
41	بعض حالات صفوف الانتظار	الجدول رقم (1-2)
57	وصف لبعض نماذج صفوف الانتظار	الجدول رقم (1-3)

76	قيم P_0 بدلالة $S(\omega) = \gamma/\mu$ في نظام M/M/s	الجدول رقم (1-2)
108	بعض الأنظمة الشائعة و مكوناتها	الجدول رقم (1-3)
126	رموز العمليات الأساسية في حزمة Arena	الجدول رقم (2-3)
132	قدرة الرصيف على الاستقبال و المعالجة	الجدول رقم (1-4)
133	تقسيم حركة المرور في الرصيف	الجدول رقم (2-4)
135	مميزات الرصيف الشمالي الشرقي	الجدول رقم (3-4)
136	الزمن المتوسط لانتظار السفن عند الرسو	الجدول رقم (4-4)
137	الفترة المتوسطة لبقاء السفن في الرصيف	الجدول رقم (5-4)
139	عدد السفن ، فترة الانتظار عند الرسو، فترة الانتظار في الرصيف خلال سنة 2009/2008 حسب نوع الشحن	الجدول رقم (6-4)
139	العدد الشهري للسفن في الرصيف خلال السنة قيد الدراسة 2009	الجدول رقم (7-4)
145	اختبار دانيال لتحليل الاتجاه العام للطلب على خدمة الرصيف	الجدول رقم (8-4)
146	حجم فترات المشاهدة	الجدول رقم (9-4)
147	قيمة المتغير N، عدد السفن	الجدول رقم (10-4)
147	توزيع وصول السفن خلال فترة المشاهدة	الجدول رقم (11-4)
148	جدول حساب مجموع الفروق التربيعية كاي تربيع لوصول العملاء	الجدول رقم (12-4)
150	جدول حساب مجموع الفروق التربيعية كاي تربيع لاوقات الخدمة	الجدول رقم (13-4)

الفهرس الملاحق

<u>الصفحة</u>	<u>الملحق</u>	<u>الرقم</u>
181	نتائج تقرير برنامج Arena محاكاة صف الانتظار في الرصيف	الملحق رقم 1
193	القيم النموذجية للرصيف خلال الأعوام 2006-2009	الملحق رقم 2
202	حركة النقل في الرصيف خلال سنة 2009	الملحق رقم 3
203	موقع الرصيف	الملحق رقم 4
204	توزيع كاي تربيع	الملحق رقم 5
205	توزيع ارلانج	الملحق رقم 6
211	توزيع بواسون	الملحق رقم 7

الفهرس المحتويات

قائمة المحتويات

III	كلمة شكر و عرفان
IV	الإهداء
VI	الفهرس
IX	قائمة الجداول
XI	قائمة الأشكال البيانية
XI	قائمة الملاحق
XI	ملخص
i	مقدمة

الفصل الأول: مفهوم صفوف الانتظار و الأسس النظرية

02	تمهيد
03	1.I بعض المفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمالات
03	1.1.I مفهوم العملية العشوائية
06	2.1.I أنواع العمليات العشوائية
07	3.1.I خواص العمليات العشوائية
09	4.1.I بعض العمليات العشوائية الشائعة
15	2.I عموميات حول سلاسل ماركوف
16	1.2.I مفهوم سلاسل ماركوف
19	2.2.I المواقف و احتمالات حدوثها
21	3.2.I مصفوفة احتمالات التغيير
25	4.2.I مفهوم عمليات الولادة، عملية بواسون، عملية الولادة و الوفاة...

30	5.2.I عمليات اللاولادة و اللاوفاة.....
40	3.I مفهوم صفوف الانتظار.....
41	1.3.I تعريف صفوف الانتظار.....
42	2.3.I خصائص نظام صفوف الانتظار.....
48	3.3.I أسس نظرية صفوف الانتظار.....
52	4.3.I ترميز كندل.....
53	5.3.I صيغة ليتل.....
56	6.3.I النماذج المختلفة لصفوف الانتظار.....
59	7.3.I تحليل الاثار الاقتصادية لصفوف الانتظار.....

الفصل الثاني: نماذج صفوف الانتظار

64	تمهيد.....
65	1.II صفوف الانتظار الماركوفية.....
65	1.1.II نظام M/M/1.....
68	1.1.1.II القيم النموذجية لنظام الانتظار M/M/1.....
68	2.1.1.II احتمال الانتظار الصفري
69	3.1.1.II احتمال الانتظار أكبر من x
69	4.1.1.II العدد المتوسط للزبائن في النظام.....
70	5.1.1.II العدد المتوسط للزبائن في الصف.....
71	6.1.1.II الزمن المتوسط للبقاء في النظام.....
72	7.1.1.II احتمال تجاوز عدد k زبون في النظام.....
73	2.1.II نظام M/M/s (تعميم على s مركز خدمة).....

76	1.2.1.II	القيم المميزة لنظام الانتظار M/M/s
76	2.2.1.II	العدد المتوسط للزبائن
77	3.2.1.II	العدد المتوسط لمراكز الخدمة المشغولة
77	4.2.1.II	العدد المتوسط للزبائن المتواجدين في النظام
77	5.2.1.II	الزمن المتوسط للبقاء في النظام
78	6.2.1.II	الزمن المتوسط للانتظار
78	7.2.1.II	احتمال الانتظار الغير الصفري
79	8.2.1.II	احتمال الانتظار أكثر من الفترة x
81	3.1.II	نظام الانتظار M/M/∞ و M/G/∞
82	4.1.II	نظام الانتظار M/M/s/k
85	2.II	صفوف الانتظار الغير الماركوفية
85	1.2.II	نظام M/G/1
86	2.2.II	علاقة Pollaczek-khinchin
87	3.2.II	نظام G/M/1
88	4.2.II	نظام G/G/1
89	5.2.II	معادلة ليندلي
93	3.II	شبكات صفوف الانتظار
93	1.3.II	مفهوم شبكة صفوف الانتظار
95	2.3.II	شبكة العقد الماركوفية
97	3.3.II	شبكات جاكسون
98	4.3.II	شبكات جاكسون المفتوحة
102	5.3.II	شبكات جاكسون المغلقة

الفصل الثالث: استخدام المحاكاة لحل مشكل صفوف الانتظار

106	تمهيد.....
107	1.III مفهوم المحاكاة.....
107	1.1.III تعاريف أولية.....
110	2.1.III الهدف الأساسي للمحاكاة.....
111	3.1.III الخطوات المتبعة لإجراء المحاكاة.....
115	4.1.III استخدام المحاكاة.....
116	5.1.III مزايا و عيوب المحاكاة.....
117	2.III طريقة مونت كارلو في المحاكاة.....
117	1.2.III تعريف طريقة مونت كارلو.....
118	2.2.III الخطوات المتبعة لاجراء المحاكاة.....
119	3.2.III استخدام المحاكاة على صف انتظار G/G/1.....
121	3.III المحاكاة بالحاسوب و بواسطة الحزمة البرمجية ARENA.....
121	1.3.III دور الحاسبات الالكترونية في المحاكاة.....
122	2.3.III مفهوم الحزمة البرمجية ARENA.....
123	3.3.III أسباب استخدام حزمة ARENA.....
124	4.3.III مكونات ARENA.....

الفصل الرابع : الجزء التطبيقي

130	تمهيد.....
130	1.IV التعريف بمؤسسة ميناء مستغام.....
131	1.1.IV نشاطات الميناء.....
132	2.1.IV القدرة على الاستقبال و المعالجة.....

133 3.1.IV تقسيم حركة المرور
133 2.IV مشكل خطوط الانتظار في الميناء
133 1.2.IV معوقات الميناء
134 2.2.IV موقع الرصيف
135 3.2.IV مميزات الرصيف
135 4.2.IV مراقبة حركة النقل داخل الميناء
140 3.IV توصيف المفاهيم الأساسية لنظام صفوف الانتظار في الرصيف....
140 1.3.IV الهدف من نموذج صف الانتظار في الميناء
140 2.3.IV المقاربة التحليلية
141 3.3.IV نمذجة ظاهرة الانتظار
144 4.3.IV الدراسة الإحصائية لهيكل الانتظار في الرصيف
154 5.3.IV النموذج الرياضي للتكاليف
156 6.3.IV المقاربة عن طرق المحاكاة
167 4.IV تحليل النتائج
169 الخاتمة
172 المراجع
180 الملاحق

العلماء العلماء

توطئة:

إن مشكل صفوف الانتظار تعتبر من الظواهر المألوفة في حياتنا اليومية ، أمام المحلات العامة أو مراكز البريد أو البنوك ، في المستشفيات أو دور السينما في محطات القطارات ، اصطفااف الطائرات على مدارج المطارات للإقلاع أو مازالت في الجو تنتظر أوامر الهبوط، الانتظار في تفريغ حمولة البواخر في الموانئ أو تحميلها... الخ.

إن ظاهرة الانتظار مع تشكيل الصفوف تعتبر أيضا جزء من عمليات الصناعية أو اللوجستية ، لهذا تم التطرق إليها من طرف الكثير من العلماء الإداريين خاصة في مجال بحوث العمليات.

و تعتبر نظرية صفوف الانتظار أو نظرية الطوابير أنها نظرية رياضية في ميدان الاحتمال تتضمن دراسة الحلول المثلى لإدارة صفوف الانتظار أو الطوابير ، و من النماذج الرياضية الأولى في صفوف الانتظار ، التي اقترحت من طرف المهندس الدانمركي ERLANG عام 1910 و ذلك لتفسير ظواهر الازدحام و الانتظار في الاتصالات الهاتفية ، و بعد ذلك استعملت نظرية صفوف الانتظار في نمذجة الأنظمة الإنتاجية و الأنظمة المعلوماتية حيث كانت هذه الاستخدامات الأولية جد محدودة لأنها تتطلب قوة حسابات غير متوفرة في تلك الفترة .

لهذا ، و لمدة طويلة ، اقتصرت التطورات في هذا الميدان على الجانب النظري فقط ، ورغم ذلك فقد جلب هذا الموضوع و مازال يلهم اهتمام الكثير من الباحثين حيث أن أكثر من 5000 منشور ظهر حتى هذا اليوم في هذا المجال .

و مع أتمت الأنظمة و تطور الإعلام الآلي و نشوء ما يسمى أنظمة الإنتاج المرنة و النواقل الأوتوماتيكية... الخ ، ازداد الطلب على هذه النظرية .

إن نظرية صفوف الانتظار أو الطوابير و شبكات هذه الصفوف تعتبر من أقوى الأدوات التحليلية لنمذجة الأنظمة اللوجستية و الاتصالات.

باختصار، هذه النظرية تخصص في دراسة الأنظمة أو الأفراد و التي تسمى: زبائن حيث تسعى إلى الوصول إلى موارد تكون عادة محدودة و ذلك للحصول على خدمة.

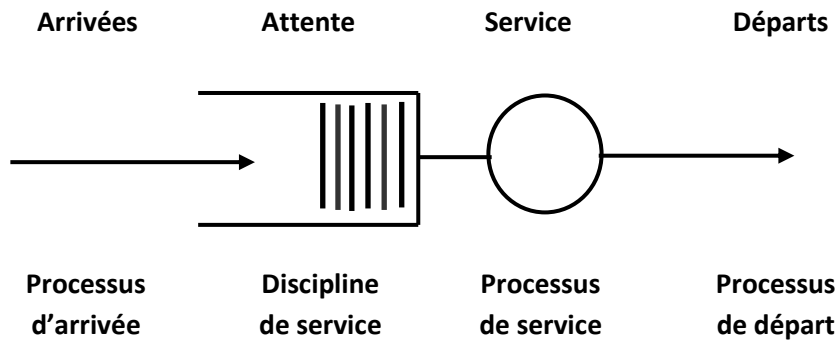
إن الطلب التنافسي لنفس المورد من طرف عدة زبائن يولد عدة تفاصيل أثناء أداء الخدمة و يؤدي إلى تشكيل صفوف في الزبائن الراغبين في المورد الغير متاح.

إن التحليل النظري لهذا النوع من الأنظمة يسمح مقدما بتحديد سلوك النظام ككل و التعرف على العناصر الحرجة أو فهم و تفسير التأثيرات الناتجة عن التغيير في شروط و حالات سير العمل.

إن عملية الانتظار، أو تشكل الصف يبدأ بالظهور عندما يصبح معدل الوصول يتجاوز معدل الخدمة (حيث أن "معدل" نعني به متوسط عدد الزبائن الذين يصلون إلى النظام، أو الذين قدمت لهم الخدمة و ذلك خلال وحدة زمنية معينة).

تعتبر عملية الانتظار عملية تصادفية، حيث لا يمكن مسبقا معرفة وقت وصول الزبون أو مدة الخدمة التي يطلبها.

يمكن تمثيل نظام صفوف الانتظار في المخطط التالي:



الشكل -1- مخطط يمثل صف انتظار بسيط

Source : J-F.Heche,T. M.Liebling, D.de Werra, **recherche operationnelle pour ingénieur** tom 2, presses polytechnique et universitaire romandes, lausanne france,2003,p :105

سنقوم من خلال هذه الدراسة باستعمال نظرية صفوف الانتظار لتسيير الموانئ و اتخاذ القرارات لتخفيض تكلفة الخدمات المينائية ، الزبائن (أي البواخر) تنتمي إلى طبقتين منفصلتين ، تكون إحدهما ذات أولوية ، الخدمة تقدم حسب ترتيب الزبائن الذين يصلون إلى أي طبقة و في أقرب وقت ممكن .

بعد تمهيد مختصر لإشكالية عمليات لانتظار و وجودها المطلق سواء في العمليات الصناعية أو في الحيات اليومية، سنقوم من خلال الفصل الأول بوضع تعريف موجز لمفهوم نظرية صفوف الانتظار انطلاقا من الأسس النظرية التي تركز عليها ، و ذلك من خلال التطرق إلى مفهوم العملية العشوائية ، مفهوم سلاسل ماركوف..الخ،

أما في الفصل الثاني، فسنتناول بعض النماذج الشائعة لنظرية صفوف الانتظار حيث قمنا بتقسيمها إلى فئتين : صفوف انتظار ماركوفية ، و صفوف انتظار غير ماركوفية، كما سنتطرق كذلك إلى شبكات صفوف الانتظار باعتبارها نموذج مركب لنظرية الصفوف.

ثم سنقوم من خلال الفصل الثالث باستعراض الطرق المستعملة في تحليل و حل مشاكل صفوف الانتظار ، حيث نخص بالذكر أسلوب المحاكاة الذي يعتبر من أحدث الأساليب المستعملة حاليا و الذي يعتمد بصفة كلية على برامج المعلوماتية بالاستعمال الحواسيب، و من بين هذه البرامج الحزمة البرمجية **Arena** المتخصصة في تحليل و نمذجة ومحاكاة العمليات **Modeling Process Analysis and Simulation** لدعم قرارات الأعمال **Business Decision Support**، حيث سنقوم بإعطاء لمحة على كيفية استخدامها عند تحليل نظرية صفوف الانتظار.

أما فيما يخص الجانب التطبيقي ، فسنباحول تطبيق النظرية صفوف الانتظار على مؤسسة ميناء مستغانم و محاولة إيجاد النموذج الأمثل عن طريق بناء نموذج رياضي خاص بصفوف الانتظار للرصيف من أجل إيجاد عدد مراكز الخدمة المناسب الذي يمثل لنا دالة الهدف لهذا النظام، حيث أن الهدف من الدراسة هو تقليص زمن الانتظار للسفن (و بالتالي تقليل أو تفادي غرامات التأخير) و هذا عن طريق مختلف سياسات التسيير لصفوف الانتظار .

I. أهمية البحث:

إن الهدف الأساسي من هذه الدراسة هو تقديم و تحليل بعض نماذج صفوف الانتظار التي تختلف من حيث طبيعتها حسب عمليات الوصول أو الذهاب البواخر ، سوف نري أهمية هذه النماذج لما تكون عملية الوصول تتبع توزيع بواسون (الوقت الانتظار بين باحرتين متتاليتين يتبع توزيع آسي).

لذلك فمن المهم طرح السؤال حول مساهمة نظرية سلاسل ماركوف و كيف نستفيد من معرفتنا حول هذه النظرية لمساعدتنا في تحليل ظاهرة الانتظار .سنقوم بدراسة الفرضيات الأساسية لكل نموذج و وضع النتائج الرئيسية.

سنلاحظ أيضا أن نظريات الحد هذه تسمح لنا بمحاكاة أنظمة صفوف الانتظار لقنوات جد معقدة كقنوات Jackson أو القنوات المغلقة مع التغذية العكسية (feed-back) أين تكون شروط قابلية التكامل غير واضحة لاستنتاج النظريات الحديثة .

إن فعالية أي ميناء بحري لا تتعلق فقط بالبنية التحتية ، فالإدارة يجب أن تقدم قدرة على الاستقبال كافية قابلة لمواجهة النمو المستمر لحركة النقل البحري و تقديم المساعدة للسفن التي تمر بالقرب من الإقليم الوطني.

وكأي مؤسسة ، فالإدارة يجب أن تركز على تعظيم مردودية استثماراتها و تخفيض تكاليفها و البحث على الميزات التنافسية لديها و أيضا عن محيط اجتماعي مناسب لمواجهة المنافسة الأجنبية .

II. مبررات اختيار البحث:

مند التسعينيات ، اعتمدت عدة دول استراتيجية تدعم النمو متكاملة مع اقتصادها الكلي حيث قامت بخفض التعريفات الجمركية و الغير جمركية التي تعيق التبادل. هذا التخفيض الاصطناعي في التعريفات الجمركية في التبادلات التجارية أثار أهمية تكاليف النقل كعقبة للتبادل، لهذا فأى إستراتيجية تهدف إلى تحقيق نمو متكامل للدولة في القطاع التجاري يجب أن تأخذ بعين الاعتبار تكاليف النقل.

إن تكاليف النقل يمكن أن تكون عقبة مهمة في التبادل التجاري و يكون لها اثر سلبي هام على الدخل الوطني، لكن لماذا نجد بعض الدول لها تكاليف نقل مرتفعة على دول أخرى ؟ ما هي الأسباب الرئيسية المحددة لتكاليف النقل هذه؟هل يمكن لسياسات الحكومة التأثير على هذه التكاليف؟

و في ظل دخول الجزائر إلى المنظمة العالمية للتجارة و تزايد واردات الجزائر أصبح للنقل البحري أهمية بالغة في شريان الاقتصاد الوطني و الواجهة الأولى لكفاءة النقل الوطني بالنسبة للبلدان الأجنبية، لهذا وجب عليها التحكم في هذه التكاليف و تحسين أداء النظام عن طريق حل أمثل للمعالم كمعدل الخدمة، عدد المراكز الخدمة و القدرة القصوى للنظام .

بالنسبة لوجهة نظر متخذ القرار ، هناك عدة اعتبارات مختلفة قد تتدخل عند اختيار المعالم المثلى : و من المعايير الأكثر استعمالا هي تقليل (**Minimisation**) مجموع التكاليف الخدمة و أيضا مدة الانتظار (وحدة القياس هنا هي الوقت) .

و كما قلنا سابقا فالهدف الأول من دراسة صفوف الانتظار هو إيجاد الحل الأمثل للتكاليف الكلية.

III. إشكالية البحث:

إن المشكلة الرئيسية في هذه الدراسة تتعلق بمدى إمكانية مؤسسة مينائية في تخفيض تكاليف النقل و تقليص مدة إرساء السفن بالاعتماد على نظرية صفوف الانتظار، لهذا فمشكل الانتظار بأولوية يظهر في هذه الدراسة من خلال السفن المسافرين و سفن النقل للمواد الخطيرة و السفن الحربية ، إذ يجب الأخذ بعين الاعتبار :

◀ قدرة الرصيف المحدودة؛

◀ ضعف عملية الشحن و التفريغ الغير متطورة.

و هذا ما ينتج عنه طرح التساؤل التالي:

السؤال الأساسي:

◀ كيف يمكن تطبيق نظرية صفوف الانتظار عند اتخاذ القرارات عند تسيير الموانئ؟

و ينتج عن ذلك عدة اسئلة فرعية منها :

◀ كيف نستطيع تقليص وقت مكوث البواخر أثناء عملية الشحن و التفريغ؟

◀ كيف يمكن تخفيض الكلفة الناتجة من جراء مكوث السفن لوقت أطول ؟

◀ هل إضافة رصيف آخر سيؤدي إلى تخفيض هذه التكاليف أو زيادتها؟

IV. الفرضيات:

إن استخدام نظرية صفوف الانتظار تمكنا من تقليص مدة انتظار البواخر في الموانئ البحرية، و تخفيض مدة الخدمة التي تتلقاها مع زيادة جودتها، و بالتالي تقليص التكاليف الانتظار التي عادة ما تكون على شكل غرامات التأخير، وأيضا مضاعفة مرودية الرصيف و التي تتمثل في كمية البواخر التي يعالجها.

◀ تكون دراسة صفوف الانتظار بشكل عام مع مقدم خدمة واحد و/أو أكثر من مقدم خدمة؛

◀ تكون الخدمة على شكل : الذي يصل أولا يحصل على الخدمة أولا (PAPS ou FIFO).

◀ نفرض أن معدل الوصول يتبع قانون بواسون؛

◀ نفرض أيضا لتبرير الفرضية السابقة أن الخدمة تتبع القانون الآسي وذلك لتحديد بدقة معلمات

النموذج.

◀ في الميناء، نفرض أن أولية الخدمة يتم تنفيذها كالتالي :

باخرة عادية لا يمكن خدمتها إلا في حالة عدم وجود باخرة أخرى قبلها، و تبدأ خدمتها بمجرد انتهاء من خدمة الباخرة السابقة لها حيث تقدم لها الخدمة على الفور.

لا يمكن لأي باخرة مغادرة النظام و يجب عليها الانتظار حتى الانتهاء من خدمة الباخرة السابقة لها.

لا تغادر الباخرة النظام إلا بعد انتهاء من خدمتها كليا.

V. المنهج المستخدم في البحث

سنقوم باستخدام المنهج الوصفي في الجزء النظري للبحث، و ذلك للتعريف بالنظرية صفوف الانتظار انطلاقا من إعطاء لمحة حول أساسيات التوزيعات الاحتمالية و سلاسل ماركوف .

أما في الجزء التطبيقي فسنستعمل المنهج التجريبي الاستقرائي انطلاقا من الكل إلى الجزء ، حيث سنطبق نظرية صفوف الانتظار على أرصفة مؤسسة ميناء مستغانم و نحاول دراسة إمكانية زيادة رصيف آخر و مدى تأثيره على مردودية المؤسسة.

VI. الأدوات المستخدمة:

للتحقق من صحة نموذج ينبغي أن تنفذ العديد من عمليات المحاكاة، ومع ذلك، محاكاة طابور M/M/1 يتطلب العديد من العمليات الحسابية لتحديد وقت الوصول و الخدمة واستنتاج القيم المختلفة التي تقدمها هذه النظرية.

حتى تكون هذه الحسابات صحيحة وقابلة للتكرار يجب أتمتة هذه المحاكاة، لهذا فجهاز محاكاة المشكل بالتالي سيكون قادرا على إجراء محاكاة لأية الثلاثية من القيم λ ، μ ، و p (حيث p تمثل عدد العمليات).

اخترنا لتطوير هذا التطبيق استخدام برنامج **Arena**، فهي تعتبر متعددة المنصات **multi plateformes** حيث أنها قارة على الاشتغال في أي بيئة معلوماتية، وعلى الرغم من بطئها فالتعقيد الحسابي لهذا النوع من صفوف الانتظار هو منخفض نوعا ما و لا يؤثر سرعة تنفيذ التطبيق .

Arena تسمح أيضا بتحقيق رسومات بيانية بصورة دقيقة و سهلة نسبيا بفضل التطبيقات التابعة لها.

كما قمنا أيضا بالاعتماد على برنامج **SPSS** و ذلك لإجراء مختلف الاختبارات الاحصائية.

.VII .الدراسات السابقة :

هناك عدة دراسات تمت في هذا المجال ، و من بين هذه الدراسات :

1. " **Etude de l'Attente Prioritaire Dans Les Ports** " من طرف الباحثين

:هودة مهري و توفيق جمال بمعهد العالي للتسيير الصناعي ، سفاقص تونس ، 2009، "

2. « **AUTOMATISATION INTEGRALE DE LA LIGNE 1 : ETUDE ET MODELISATION DU**

« **TRAFIC MIXTE** » Mylène Ghantous-Mouawad Belmonte

Walter Schön, Jean-Louis ،Gérald Churchill ;France 2008

Boulangier

3. « **Monographies de la CNUCED sure la gestion portuaire –**

Mesure et évaluation du rendement et de la productivité des ports »; G. de MONIE (directeur Antwerp port engineering and consulting ; nation unies ; NEW-YORK 1988

.VIII .حدود الدراسة :

التحديد الزمني: بسبب حساسية المعلومات التي تقدم من طرف إدارة الميناء حول عدد و

توقيت السفن و كذا التكاليف المترتبة فان هذه التحديد الزمني لهذه الدراسة سيحدد

2009/2000

التحديد المكاني : من ناحية التحديد الجغرافي للبحث ، فقد اخترنا مؤسسة ميناء مستغمام

لتطبيق هذه الدراسة خاصة بعد النشاط الأخير الذي يشهده هذا الميناء.

الفصل الأول

مفهوم صفوف الانتظار
و الأسس النظرية

تمهيد:

إن دراسة حالة الانتظار تلزمنا دائما ربطه بنظام معرف بعملية عشوائية، رغم أن أسس نظرية صفوف الانتظار - من الناحية التاريخية- طورت من طرف **A.K EURLANG** منذ العشرينات الأولى للقرن الماضي¹، أي قبل الثلاثينات من القرن الماضي عندما قام **FELLER** بإدخال مفهوم "عمليات الولادة و الوفاة"...

إن تحديد نموذج رياضي يمثل ظاهرة الانتظار عند رصيف الميناء يفرض علينا توضيح نقطة مهمة جدا و هي مدى استقرارية عمليات الوصول البواخر و عمليات تقديم الخدمة .

تشير دراسة الاحتمال إلى تجربة مكونة من إجراء وملاحظات. خلال دراسة المتغيرات العشوائية فإن كل مشاهدة تناظر عددا أو أكثر. أما عند دراسة العمليات العشوائية فإن كل مشاهدة يقابلها دالة في الزمن. كلمة عشوائية تعني الاحتمالية أما كلمة عملية فتعني دالة في الزمن. ومن ثم عندما ندرس العمليات العشوائية فإننا ندرس دوال عشوائية في الزمن. غالبا ما تتضمن جميع تطبيقات الاحتمالات مشاهدات متعددة مأخوذة على فترة زمنية. فعلى سبيل المثال، عند دراسة احتمال وقوع حدث ما، فإننا نهتم بتكرارات وقوع هذا الحدث عند إعادة إجراء التجربة عددا كبيرا من المرات. نهتم أيضا بمتابعة زمنية من الحوادث عند دراسة العمليات العشوائية.

يعتبر هذا المبحث مقدمة قصيرة عن العمليات العشوائية لتقديم فكرة عامة حول ما تعنيه العملية العشوائية وعلاقتها مع نظرية صفوف الانتظار وسيتم تدعيم هذه المفاهيم بالأمثلة. كما سنعرض أيضا في هذا الفصل بعض أنواع العمليات العشوائية وخواصها.

¹ R.FAURE, *Précis De Recherche Opérationnelle*, 4eme édition, Dunod, Paris, 1979, p1

1-1-1 - بعض المفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمالات:

عند بناء نموذج مناسب لنظام صفوف الانتظار ، فإننا نبدأ بهذه العناصر، حيث أن عدد مراكز الخدمة ، قدرة النظام و كيفية الخدمة تكون دائما محددة للنظام (إلا إذا كان عدد مراكز الخدمة المتوفرة أصبح متغير عشوائي ، و الذي يعتبر ممكنا في بعض الحالات ¹- لكن هناك حالة عدم اليقين متعلقة بعملية الوصول و تقديم الخدمة مما يؤدي إلى عملية تابعة تكون عشوائية. يمكن إبراز التشابه بين عملية الوصول و تقديم الخدمة بتحديد المكونات المتشابهة مثل الفترات الفاصلة بين زمن الخدمة، أو فترة الوصول و فترة المغادرة.

1-1-1. مفهوم العمليات العشوائية :

عندما نقوم بتنفيذ تجربة عشوائية، فإننا لا نهتم عادة بكل التفاصيل المحيطة بالنتيجة التجريبية، و لكن فقط ببعض القيم الكمية و الرقمية التي تحدد هذه النتيجة. تعرف هذه القيم بالمتغيرات العشوائية² نقدم فيما يلي تعريف العملية العشوائية وبعض التعاريف المتعلقة بها.

❖ المتغير العشوائي³:

المتغيرات العشوائية التي يرمز لها عادة بالحروف X, Y, \dots الخ ، القيمة المتوقعة أو المتوسط للقيمة X

يرمز له بالشكل $E(X)$ و التباين بالرمز $\sigma^2(x)$ ، حيث $\sigma(x)$ الانحراف المعياري لـ X

يعرف جزء كبير من معامل التباين للمتغير العشوائي الموجب X بالعلاقة :

$$C_X = \frac{\sigma(X)}{E(X)} \dots \dots \dots (1.1)$$

1 U. Narayan Bhat, *An Introduction to Queueing Theory*, Birkhauser, Boston Basel, Berlin, 2008, p.13
2 Sheldon M. Ross, *INTRODUCTION TO, PROBABILITY AND STATISTICS FOR ENGINEERS AND SCIENTISTS* Third Edition, Elsevier Academic Press, USA, 2004, p.89
3 Ivo Adan and Jacques Resing, *Queueing Theory*, Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology, The Netherlands , 2002

❖ تعريف العملية العشوائية:

يمكن تعريف العملية العشوائية " كمجموعة من الظواهر تحدث في الزمن " و تتصف بالصدفة، فكلمة تصادفية تعني ناتج الصدفة الذي يشتمل ادن على " وجود متغير عشوائي"¹ "كمجموعة من الظواهر تحدث بالصدفة في الزمن حيث يمكن وصف تطورها عن طريق متغيرات عشوائية.

❖ عملية: مجموعة من الظواهر التي تحدث عبر الزمن

❖ عشوائية(تصادفية): التي تنتج من الصدفة (hazard) ، التي تحوي على متغير عشوائي².

• تعريف (1، 1)³:

العملية العشوائية stochastic process هي عبارة عن سلسلة من المتغيرات العشوائية $\{X(t): t \in T\}$ تكون مرتبطة عن طريق معلمة parameter t .

• تعريف (2، 1):

تسمى مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X(t)$ بحالات states العملية العشوائية، كما يمكن أن تسمى بمواقع positions العملية العشوائية. فإذا كان $X(t) = i$ فإنه يقال بأن العملية تكون في الحالة i عند اللحظة t .

يمكن أن تكون حالات العملية العشوائية عبارة عن كميات عددية أو غير عددية (وصفية) وذلك بناء على طبيعة العملية العشوائية. ففي نظرية الطوابير، على سبيل المثال، غالبا ما تكون الحالات عبارة عن عدد الزبائن الذين ينتظرون تقديم الخدمة. أما إذا كنا نهتم بوضع نموذج لدراسة حركة توصيل الأمتعة في نظام لشركة طيران، فإن الحالات في هذا النموذج ممكن أن تكون عبارة عن موضع الأمتعة عند أي لحظة، وهذا يكون عبارة عن مثالا لحالات غير عددية. نقوم بتخصيص قيما عددية اختيارية للحالات غير العددية ومن ثم يمكن أن نفكر في أن حالات النظام عند أي لحظة عبارة عن متغير عشوائي عددي.

1 P.QUITTARD, *Elements De Statistiques, Processus Stochastique Et File D'attente*, OPU , Algerie,1983,p.3

2 MURRAY R. SPIEGEL, Ph.D. ,Theory and Problems of STATISTICS ,Third Edition,Schaum's Outline Series,usa,1998,p148

3 U. Narayan Bhat, *op.cit* ,p 23

• تعريف (1، 3):

فترة جميع القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X(t)$ تسمى بفضاء حالة العملية العشوائية $\{X(t):t \geq 0\}$ state space ويرمز له بالرمز S .

إذا كانت المجموعة S عبارة عن مجموعة منفصلة فإن العملية العشوائية $\{X(t):t \geq 0\}$ تسمى عملية عشوائية ذات فضاء حالة منفصل.

إذا كانت المجموعة S عبارة عن مجموعة متصلة ، أي أن $S \subset (-\infty, \infty)$ ، فإن العملية العشوائية $\{X(t):t \geq 0\}$ تسمى عملية عشوائية ذات فضاء حالة متصل.

تعريف (1، 4)¹:

إن نظام احتمالي مكون من فضاء عيني ، و مجموعة من الدوال الحقيقية للزمن ، و مقياس احتمالي ، يسمى عملية عشوائية أو عملية تصادفية ، ويرمز له بالرمز $X(t)$ فالعملية العشوائية تعتبر مجموعة من المتغيرات العشوائية $\{X(t):t \in T\}$ (مجموعة من الرموز) التي عرفناها سابقا.

إذا كان الفضاء العيني T منفصل ، نقول أنها سلسلة عشوائية تكتب على شكل X_t ، و في الحالة المعاكسة ، نقول أنها عملية عشوائية.

إذا اخذ $X(t)$ رقم ثابت أو قيم قابلة للعد ، فالعملية تكون ذات فضاء عيني منفصل ، في حالة العكس ، حيث القيم تكون مستمرة نقول أنها عملية ذات فضاء عيني متصل.

إذا كانت المجموعة T منفصلة فإن العملية العشوائية $\{X(t):t \geq 0\}$ تسمى بعملية عشوائية منفصلة الزمن discrete time stochastic process وفي هذه الحالة يمكن استخدام الرمز n بدلا من الرمز t ، ويكتب $X(n)$ أو X_n بدلا من $X(t)$ أو X_t .

إذا كانت المجموعة T متصلة ، بمعنى $T = \{t:t \geq 0\} \subseteq [0, \infty)$ ، فإن العملية العشوائية $\{X(t):t \geq 0\}$ تسمى بعملية عشوائية متصلة الزمن continuous time stochastic process وفي هذه الحالة

¹ Mlika Babes, *Statistique, files d'attente et simulation*, OPU, algerie, 1995, p65

يمكن كتابة $X(t)$ على الصورة X_t .

2-1-1. أنواع العمليات العشوائية¹ Types of stochastic processes

يتضح مما تقدم أنه يوجد لكل عملية عشوائية فضاء حالة S وفضاء معلمة T . إذا كان فضاء الحالة قابل للعد فإن العملية العشوائية تسمى سلسلة Chain. علاوة على ذلك، إذا كانت السلسلة لها عدد منتهى من الحالات فإنها تكون محدودة. وهذا يقود إلى التصنيف التالي:

1. سلسلة منفصلة الزمن Discrete-time chain: كل من S ، T منفصل، كمثال لهذا النوع

هو $\{X(n): n=0,1,\dots\}$ حيث أن $X(n)$ يكون عبارة عن عدد أعواد الكبريت في الصندوق رقم n المنتج بواسطة عملية الإنتاج. إذا كانت السعة العظمى للصندوق هي 100 عود، فإن هذه السلسلة تكون محدودة وفضاء حالتها $S = \{0,1,\dots,100\}$.

2. عملية منفصلة الزمن Discrete-time process: S متصل، T منفصل، فإذا كان مثلاً W_n

عبارة عن الزمن الذي يجب انتظاره قبل تنفيذ البرنامج رقم n على جهاز كمبيوتر. فإن $\{W_n: n=0,1,2,\dots\}$ تكون عملية عشوائية منفصلة الزمن متصلة الحالة.

3. سلسلة متصلة الزمن Continuous-time chain: S منفصل، T متصل.

4. عملية متصلة الزمن Continuous-time process: كل من S ، T متصل.

يمكن تلخيص هذه الأنواع الأربعة في الجدول التالي :

جدول (1، 1): الأنواع الأربعة للعمليات العشوائية.

فضاء المعلمة T متصل (زمن)	فضاء المعلمة T منفصل (خطوة)	فضاء الحالة S منفصل (سلسلة)
سلسلة متصلة الزمن (محدودة / غير محدودة)	سلسلة منفصلة الزمن (محدودة / غير محدودة)	
$\{N(t) : t \in [0, \infty]\}$	$\{X_n : n = 0,1,2,\dots\}$	

¹ عمار محمود سرحان، لطفي تاج، مقدمة في العمليات العشوائية، جامعة الملك سعود، الرياض، 2002، ص5

عملية متصلة الزمن $\{L(t) : t \in [0, \infty)\}$	عملية منفصلة الزمن $\{W_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$	فضاء الحالة S متصل
---	--	--------------------

المصدر: عمار محمود سرحان، لطفى تاج، مرجع سبق ذكره، ص 5

عموماً، إذا كان فضاء الحالة منفصل و فضاء المعلمة منفصل سنكتب $\{X_n : n \in T\}$ بدلا من $\{X(t) : t \in T\}$.

3-1-1. خواص العمليات العشوائية Properties of stochastic processes

❖ التوزيع الاحتمالي¹: لتكن العملية العشوائية $X(t)$ من أجل الزمن الثابت t_i ؛ $X(t_i) = X_i$

هو عبارة عن متغير عشوائي ، و التوزيع الاحتمالي يعرف بـ:

$$F_x(x_i; t_i) = P \{X(t_i) \leq x_i\} \dots \dots \dots (1-2)$$

يعرف الدالة $F_x(x_i; t_i)$ بالتوزيع من الدرجة الأولى لـ $X(t)$

يمكن إلقاء بعض الضوء حول العمليات العشوائية بدون الخوض في خواصها البنائية. غالباً ما يهتم الباحثون بدراسة بناء نموذج للعلاقة بين قيم $X(n)$ أو $X(t)$ عندما تتحرك (تتغير) العملية مع الزمن. في أبسط الأنظمة تكون المتغيرات العشوائية $X(n)$ مستقلة. وهذا يعني أن الناتج في وقت ما لا يتأثر بالناتج في الأزمنة الأخرى. كمثال على ذلك نتائج عملية تكرار إلقاء زهرة نرد غير متميزة. وفي بعض الأنظمة الأخرى تتأثر نتيجة $X(n)$ عند وقت ما بجميع النتائج السابقة. كمثال على ذلك بفرض أنه يتم سحب أعداد عشوائية واحد بعد الآخر وبدون إحلال من صندوق يحتوي على الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100. فمن الواضح أن العدد الذي سيتم سحبه في المستقبل يعتمد على جميع الأعداد التي سحبت من قبل.

فيما يلي بعض الخواص الهامة الأخرى للعمليات العشوائية².

¹ Hwei P. Hsu, Ph.D, *Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes*, Schaum's Outline, McGraw-Hill Companies, usa, 1997, p161

² عمار محمود سرحان، لطفى تاج، مرجع سبق ذكره، ص 9

1. العملية العشوائية ذات زيادات مستقلة Independent Increments : تسمى العملية

العشوائية $\{X(t):t \in T\}$ بعملية عشوائية ذات زيادات مستقلة إذا كانت المتغيرات العشوائية $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ مستقلة لجميع اختيارات الأزمنة t_1, t_2, \dots, t_n والتي تحقق $t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

بمعنى آخر : في العملية العشوائية ذات الزيادات المستقلة تكون كميات التغيير في حالة العملية العشوائية على فترات غير متداخلة مستقلة.

2. العملية العشوائية ذات زيادات مستقرة (ثابتة) Stationary Increments : تسمى العملية

العشوائية $\{X(t):t \in T\}$ بعملية عشوائية ذات زيادات مستقرة إذا كان توزيع المتغير العشوائي $X(t+s) - X(t)$ مستقل عن t . وهذا يعني أن التوزيع الاحتمالي لكمية تغير حالة العملية العشوائية خلال فترة معينة $[t, t+s]$ يعتمد فقط على طول الفترة s ولا يعتمد على بدايتها t .

3. العملية العشوائية ذات خاصية ماركوف Markovian Property : يقال للعملية العشوائية

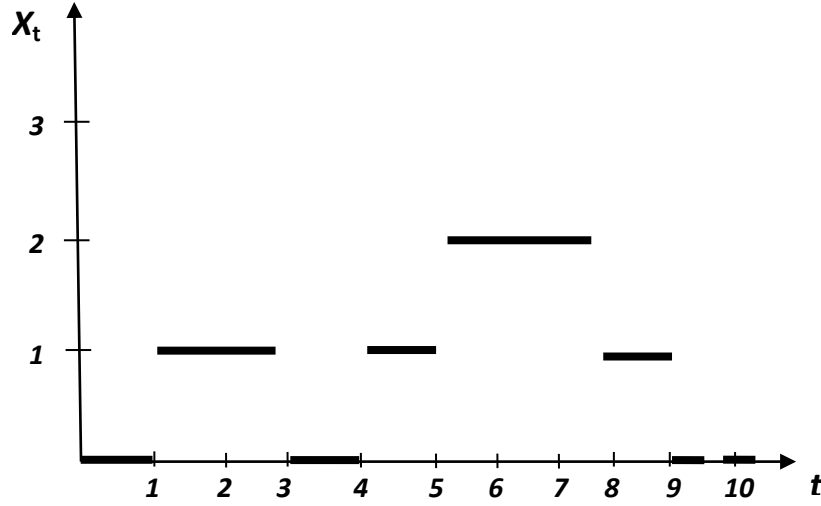
$\{X(t):t \in T\}$ أنها تتمتع بخاصية ماركوف إذا كانت حالتها في المستقبل، بشرط معرفة حالاتها في الماضي والحاضر، لا تتأثر إلا بحالتها الحاضرة فقط، أي أن حالة العملية في الماضي ليس لها أي تأثير على حالتها في المستقبل بشرط معرفة حالتها في الحاضر. وهذا يعني أنه لكل لحظة زمنية u فإن المتغير العشوائي $X(t)$ ، $t > u$ يكون مستقل عن المتغير العشوائي $X(t)$ ، $t < u$ بشرط معرفة المتغير العشوائي $X(u)$. العملية العشوائية التي تتمتع بخاصية ماركوف تسمى عملية ماركوف.

العملية العشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة تحقق خاصية ماركوف إذا تحقق الشرط التالي:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \dots \dots \dots (1-3)$$

لجميع الحالات $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$ ولكل n . يمكن تفسير هذه الخاصية كالآتي: التنبؤ بقيمة X_{n+1} يعتمد فقط على القيمة الحالية لـ X_n ولا يعتمد على قيم الحالات الماضية X_0, X_1, \dots, X_{n-1} .

بمعنى آخر: بإعطاء الحالة الحالية X_n فإن الحالات الماضية X_0, X_1, \dots, X_{n-1} لا تؤثر على الحالات



المنحنى -1- مثال عن انجاز عملية عشوائية مستمرة

المصدر : j.heche, recherche operationnel pour ingenieur 2,p63

Some common stochastic processes

4-1-1. بعض العمليات العشوائية الشائعة¹

فيما يلي نقدم بإيجاز قائمة لبعض العمليات العشوائية الخاصة والتي يكون لكل منها تعريفها الخاص وخواصها وتطبيقاتها.

1) عملية برنولي Bernoulli process

تسمى العملية العشوائية $\{X_n : n = 1, 2, \dots\}$ بعملية برنولي باحتمال النجاح p ($0 \leq p \leq 1$) إذا تحققت الشرطان:

(أ) تكون المتغيرات العشوائية X_1, X_2, \dots مستقلة.

(ب) $P(X_n = 1) = p$ ، $P(X_n = 0) = q = 1 - p$ لكل $n = 1, 2, \dots$

فضاء المعلمة لعملية برنولي $\{X_n : n = 1, 2, \dots\}$ عبارة عن فضاء منفصل ويعطى على الصورة $T = \{1, 2, \dots\}$ ، وفضاء الحالة أيضا يكون فضاء متقطع ويعطى بـ $S = \{0, 1\}$.

¹ عمار محمود سرحان، لطفى تاج، مرجع سبق ذكره، ص 13

(2) عملية ذي الحدين¹ Binomial process

ينمذج عدد مرات النجاح في n محاولة شرط أن تكون المحاولات مستقلة و لها نفس الاحتمال ، ونقول أن المتغير العشوائي المنفصل X له توزيع ذو الحدين إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية له هي :

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, 2, \dots, n; \quad 0 \leq p \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \dots\dots\dots(1-4)$$

معالم التوزيع هي n, p و له قيمة متوقعة (متوسط) و تباين:

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p)$$

(3) عملية بواسون Poisson process

المتغير العشوائي لبواسون X معلمة λ له التوزيع الاحتمالي التالي² :

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \dots\dots(1-5)$$

بالنسبة لتوزيع بواسون ، نعتبر ما يلي :

$$P_x(Z) = e^{-\lambda(1-z)}, \quad E(x) = \sigma^2(x) = \lambda, \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{\lambda}$$

عملية بواسون بمعدل λ تكون عبارة عن عملية عشوائية، مثلا $\{N_t : t \geq 0\}$ ، ذات قيمة صحيحة

وتحقق الخواص التالية:

1. $N_0 = 0$

2. المتغيرات العشوائية $N_{t+s} - N_t$ تتبع توزيع بواسون بمعدل λs ، وذلك لجميع $t > 0$ ، $s > 0$.

3. المتغير العشوائي N_t يكون له زيادات مستقلة.

فضاء الحالة لعملية بواسون $\{N_t : t \geq 0\}$ يكون منفصل حيث $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ أما فضاء المعلمة فهو

¹ عدنان ماجد عبدالرحمن بري، النمذجة و المحاكاة، قسم الاحصاء و بحوث العمليات، جامعة الملك سعود، السعودية، 2002، ص: 117

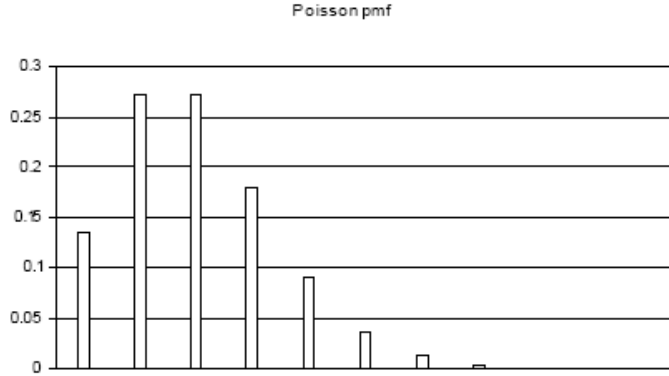
² Ivo Adan and Jacques Resing, *Queueing Theory*, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 2002, P13

متصل حيث $T = \{t: t \geq 0\}$. تنتشر تطبيقات عملية بواسون في العديد من المجالات، علي سبيل المثال : نموذج لعملية وصول الزبائن لمتجر ما، نموذج لعدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى محول المكالمات، نموذج وصول الجسيمات المشعة لعداد جيجر، ... الخ.

دالة الكثافة الاحتمالية لعملية بواسون هي ¹ :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & x = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \dots\dots\dots(1-6)$$

و دالة الكثافة الاحتمالية لها الشكل التالي :



الشكل 1-2: دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بواسون
المصدر: عدنان ماجد عبدالرحمن بري، مرجع سبق ذكره ص : 119

4) عملية جاوس Gaussian process

تسمى العملية العشوائية $\{X_t: t \geq 0\}$ بعملية جاوس إذا كان متجه المتغيرات العشوائية $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ يسلك التوزيع الطبيعي المتعدد لجميع القيم $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, \infty)$ ولكل $n \geq 1$.
فضاء الحالة وفضاء المعلمة لعملية جاوس يكونا متصلين. تظهر عملية جاوس في العديد من التطبيقات في مجالات الهندسة الكهربائية، علي سبيل المثال : كنموذج لتأثير تغير الجهد الكهربائي على المقاومات، نموذج تأثير الضوضاء الحاصلة على جهاز الاستقبال على عملية الاتصالات الإلكترونية.

نقول أن المتغير العشوائي المتصل X له توزيع طبيعي إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له هي:

¹ عدنان ماجد عبدالرحمن بري، مرجع سبق ذكره ص : 119

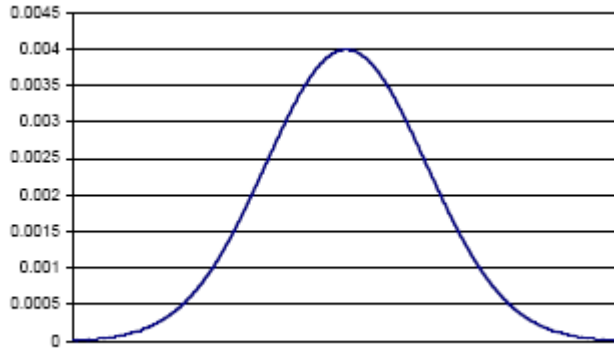
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, -\infty < x < \infty, \sigma^2 > 0 \dots\dots\dots(1-7)$$

معالم التوزيع هما $\sigma^2 > 0$ ، وله توقع و تباين :

$$E(x) = \mu, \quad V(x) = \sigma^2$$

حالة خاصة هي التوزيع الطبيعي القياسي عندما تكون $\sigma^2 = 1$ ، $\mu = 0$ ،

و دالة الكثافة الاحتمالية لها الشكل:



الشكل 3-1: دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع جاوس
المصدر: عدنان ماجد عبدالرحمن بري، مرجع سبق ذكره ص : 120

5) عملية ونر¹ Wiener process

تسمى العملية العشوائية $\{W_t : t \geq 0\}$ بعملية ونر إذا حققت الشروط التالية:

1. $W_0 = 0$

2. $\{W_t : t \geq 0\}$ تكون ذات زيادات مستقرة ومستقلة.

3. لكل $t > 0$ ، فإن المتغير العشوائي W_t يتبع التوزيع الطبيعي بالمتوسط 0 والتباين $c^2 t$ ، حيث c كمية حقيقية.

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لعملية جاوس يكونا متصلين. تسمى عملية ونر أحيانا بعملية حركة

براون **Brownian motion process**. تظهر عملية ونر في العديد من التطبيقات في مجالات

ميكانيكا الكم ، والظواهر المتداخلة والاقتصاد وغيرها من التطبيقات.

¹ عمار محمود سرحان، لطفى تاج، مرجع سبق ذكره، ص14

6) عملية أورنستين-أوهلنبيك¹ The Ornstein-Uhlenbeck process

لتكن $\{W_t : t \geq 0\}$ عبارة عن عملية ونر، وبتعريف المتغير العشوائي U_t ، لبعض قيم $\alpha > 0$ ، على

الصورة:

$$U_t = e^{-\frac{\alpha t}{2}} W_{e^{\alpha t}}, t \geq 0 \dots \dots \dots (1-8)$$

إذن العملية العشوائية $\{W_t : t \geq 0\}$ تسمى عملية أورنستين-أوهلنبيك.

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لهذه العملية يكونا متصلين. ظهرت هذه العملية عند دراسة نموذج لوصف سرعة جسيم مغمور في سائل أو غاز، والتي تفيد في الميكانيكا الإحصائية.

7) توزيع إرلانج² Erlang :

يمكن اعتبار هذه العملية كمجموعة لعدة عمليات كل منها له توزيع أسّي، المتغير العشوائي المتصل

x له توزيع إرلانج من الدرجة k حيث $k = 1, 2, \dots$ إذا كانت الكثافة الاحتمالية له هي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k \theta}{(k-1)!} (k \theta x)^{k-1} e^{-k \theta x}, & x > 0; \quad k = 1, 2, \dots, \quad \theta > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \dots \dots \dots (1-9)$$

عندما يكون $k = 1$ فإن هذا التوزيع يصبح أسّي بمتوسط $\frac{1}{\theta}$ وهذا يعني أن توزيع إرلانج يمكن

اعتباره توزيعاً لمتغير عشوائي هو عبارة عن مجموع k من المتغيرات العشوائية المستقلة التي لكل واحد منها توزيع أسّي.

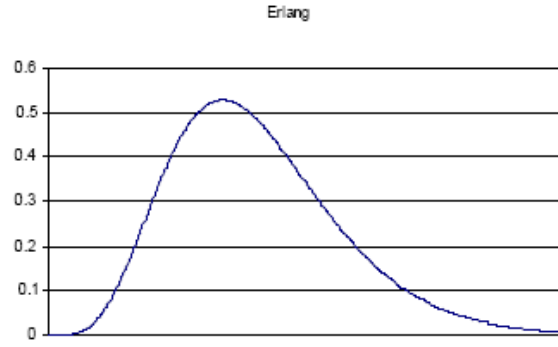
معالم توزيع إرلانج هما: k و θ والتوقع والتباين هما :

$$E(x) = \frac{1}{\theta}, \quad V(x) = \frac{1}{k \theta^2}$$

¹ عمار محمود سرحان، لطفي تاج، مرجع سبق ذكره، ص 14

² عدنان ماجد عبدالرحمن بري، مرجع سبق ذكره ص : 123

و دالة الكثافة الاحتمالية له لها الشكل التالي :



الشكل 1-4: دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ارلانج
المصدر: عدنان ماجد عبدالرحمن بري، مرجع سبق ذكره ص : 120

1-2. عموميات حول سلاسل ماركوف

قدم العالم الرياضي الروسي ماركوف **MARKOV** سلاسل ماركوف بأسلوب رياضي عرف باسمه في أوائل القرن العشرين ، و يعتمد هذا الأسلوب على رصد لامح الواقع وذلك باعتبار أن ما سيحدث في المستقبل هو صورة لما حدث في الماضي القريب¹.

يقوم تحليل سلاسل ماركوف على بعض الخطوات المحددة وهي:

- (1) حساب النسب أو الأنصبة في فترة الأساس؛
- (2) إيجاد مصفوفة الاحتمالات الانتقالية ونلك بقسمة كل رقم في كل صف (من مصفوفة التوزيع) على مجموعة ذلك الصف؛
- (3) إيجاد المستوى الأول لتحليل سلاسل ماركوف وهو يساوي النسب الناتجة في فترة الأساس ضرب مصفوفة الاحتمالات الانتقالية .

نسب فترة الأساس \times مصفوفة الاحتمالات الانتقالية

(4) إيجاد المستوى الثاني وذلك من جراء نتائج المستوى الأول والمصفوفة الانتقالية

نسب المستوى الأول \times مصفوفة الاحتمالات الانتقالية

(5) إيجاد المستوى الثالث لتحليل سلاسل ماركوف من جراء نتائج المستوى الثاني ومصفوفة الاحتمالات الانتقالية :

نسب المستوى الثاني \times مصفوفة الاحتمالات الانتقالية

وهكذا يتم حساب المستويات مستوى تلو الآخر حيث تحسب نتائج كل مستوى من جراء نتائج المستوى السابق والمصفوفة الاحتمالية الانتقالية. كما يمكن حساب نتائج أي مستوى من المستويات وفق القانون التالي:

$$\text{نسب المستوى } N = \text{نسب فترة الأساس} \times (\text{مصفوفة الاحتمالات الانتقالية})^N$$

¹ بلال احمد إسماعيل، بحوث العمليات، استخدام الأساليب الكمية في صنع القرار، دار الجامعية الجديدة، مصر، 2005

² عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، نجم عبدالله الحميدي، الأساليب الكمية التطبيقية في إدارة الأعمال، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان 2008، ص. 167

1-2-1. مفهوم سلاسل ماركوف

نسمي سلسلة ماركوف كل نموذج ماركوف منفصل ملاحظ في سلسلة زمنية متقاربة¹

« **Nous appelons un modèle de Markov discret observée à temps équadistants une chaîne de Markov** »

العملية العشوائية $\{X_t, t \geq 0\}$ المعرفة على فضاء العينة S تستوفي خصائص ماركوف إذا كان ، من اجل أي فترة $t \geq 0$ و أي فرع من فضاء العينة $I \subseteq S$ ، فصحیح أن :

$$P[X_{t+\Delta} \in I / X_u, 0 \leq u \leq t] = P[X_{t+\Delta} \in I / X_t,], \quad \forall \Delta \geq 0 \dots \dots (1.10)$$

العملية العشوائية التي تحقق الخصائص السابقة تسمى عملية ماركوف أو عملية ماركوفية²

إن تطور حالة أي نظام يمكن نمذجته بعملية ماركوفية ، إذا كان ، و من أجل أي فترة t ، الوضع الحالي X_t تلخص بنفسها فقط ، كل تاريخ النظام الذي يمكن أن يؤثر على تطوره المستقبلي . كمثال نواة (particule) تنتقل بصفة عشوائية فإن تطور هذه النواة تستوفي خصائص ماركوف إذا و فقط إذا كانت ، في أي فترة t ، تنسى كيف وصلت إلى المكان الحالي X_t ؛ مسارها المستقبلي يتبع إذن نفس القوانين لنواة تبدأ تطورها في الفترة t في حالة X_t .

بمعنى آخر ، فان الخاصية (1.10) تتطلب بأن يكون التنبؤ لتطور النظام ، متى تم معرفة حالته الراهنة ،

لا يمكن تحسينه عن طريق الحصول على معلومات إضافية حول ماضي النظام.³

ومنه فان $\{X(t)\}$ يعتبر عملية ماركوف متى كانت t و فضاء العينة تتبع قانون منفصل ، و يمكن

صياغة التعريف كالتالي :

$$P(X_n = j | X_{n1} = i_1, X_{n2} = i_2, \dots, X_{nk} = i_k) = P(X_n = j | X_{nk} = i_k) \\ = P_{i_k, j}^{(n_k, n)} \dots \dots \dots (1.11)$$

و منه فان العملية : $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ تعرف بسلاسل ماركوف¹

¹ A. C. Davison, *Statistical models*, Cambridge University Press ,New York, 2008 p 229

² J-F.Heche,T. M.Liebling, D.de Werra, op.cit,p :6

³ J-F.Heche,T. M.Liebling, D.de Werra, ib.id,p :7

بالنسبة لاحتمالات انتقال عمليات ماركوف، فإننا نستعمل العلاقة التالية مع أخذ بعين الاعتبار طبيعة فضاء العينة و المحددات:

1. عينة منفصلة ، محددات منفصلة : Discrete state, discrete parameter

$$P_{ij}^{m,n} = P(X_n = j | X_m = i), m < n \dots \dots \dots (1-12)$$

2. عينة منفصلة ، محددات متصلة : Discrete state, continuous parameter

$$P_{ij}(s, t) = P[X(t) = j | X(s) = i], s < t \dots \dots (1-13)$$

3. عينة متصلة ، محددات منفصلة : Continuous state, discrete parameter

$$F(x_m, x; m, n) = P(X_n \leq x | X_m = x_m), m < n \dots \dots \dots (1-14)$$

4. عينة متصلة ، محددات متصلة Continuous state, continuous parameter

$$F(x_n, x; t_n, t) = P[X(t) \leq x | X(t_n) = x_n], t_n < t \dots \dots \dots (1-15)$$

إن الخاصية الأساسية لعمليات ماركوف مبينة في علاقة Chapman-Kolmogorov، و التي توافق الحالات الأربعة المبينة كالتالي :

$$P_{ij}^{(m,n)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(m,r)} P_{kj}(r, n), \quad m < r < n; \dots \dots \dots (1-16) \quad .i$$

$$P_{ij}(s, t) = \sum_{k \in S} P_{ik}(s, u) P_{kj}(u, t), \quad s < u < t; \dots \dots \dots (1-17) \quad .ii$$

$$F(x_m, x; m, n) = \int_{y \in S} d_y F(x_m, y; m, r) \cdot F(y, x; r, n), \quad m < r < n; \quad .iii$$

$$F(x_s, x; s, t) = \int_{y \in S} d_y F(x_s, y; s, u) \cdot F(y, x; u, t), \quad s < u < t. \quad .iv$$

يمكن وضع هذه المعادلات بسهولة بالأخذ بعين الاعتبار تحولات **Transitions** العمليات بين فترتين (m, r) و (r, n) عندما تكون معلمات الزمن منفصلة، و (s, u) و (u, t) عندما تكون معلمات الزمن متصلة. و باستعمال التعريف الأولي لعمليات ماركوف.

¹ N. Balakrishnan, *An Introduction to Queueing Theory, Modeling and Analysis in Applications*, Birkhauser, Boston, 2008, p24

كمثال، فعندما تكون العينة و فضاء المعلمات منفصلة فان احتمال التحول من الحالة المبدئية i إلى الحالة k ($k \in S$) في الفترة الزمنية (m, r) هو $P_{ik}^{(m,r)}$ ، و من الحالة k إلى الحالة j في الفترة الزمنية

$$P_{kj}^{(r,n)} \text{ هو } (r, n)$$

إن أسلوب تحليل ماركوف **Markov Analysis** هو أسلوب يتعامل مع احتمالات حدوث حدث معين في المستقبل مستندا إلى تحليل بعض الاحتمالات المعروفة لنا حاليا. ومثل هذا الأسلوب له العديد من التطبيقات في دنيا الأعمال مثل تحليل الشركة في السوق ، أو التنبؤ بوجود بعض الديون السيئة أو التنبؤ بعدد الطلاب المتوقع أن يسجلوا في احد برامج الجامعة، أو تحديد درجة الاعتمادية على. احد الآلات ... الخ

ويبدأ تحليل ماركوف بافتراض أساسي وهو أن أي نظام يبدأ في ظل موقف او حالة مبدئية . على سبيل المثال قد يوجد شركتان متنافستان في السوق وكل منهما حاليا يحصل على 40%، 60% من مبيعات السوق على التوالي. ومثل هذا الموقف أو الحالة هي التي يطلق عليها اسم الموقف المبدئي أو الحالة المبدئية، وقد يحدث أن يتغير حجم السوق الخاص بكل من الشركتين في الشهر القادم ويتغير إلى 45%، 55% على التوالي. والتغير إلى مثل هذا الوضع الجديد يتطلب معرفة احتمالات التغير من الموقف المبدئي إلى الموقف الجديد. وفي الحياة العملية يمكن القيام بجميع هذه الاحتمالات ووضعها في مصفوفة أو جدول . وتعرف هذه المصفوفة باسم مصفوفة التغير وهي التي توضح ما هي الاحتمالات الخاصة بتغير الحدث من الموقف المبدئي إلى الموقف الجديد في المستقبل. ومثل هذه العملية والتي يطلق عليها تحليل ماركوف تمكنا من خلال ذلك بالتنبؤ بما يمكن حدوثه في المستقبل¹ .

وفي عرضنا لتحليل ماركوف سوف نقتصر على عرض هذا التحليل الذي يتبع أربعة افتراضات أساسية وهي:

1. أن هناك عدد محدد ونهائي من المواقف الممكنة .
2. أن احتمالات تغير الموقف من وقت لآخر تظل كما هي ثابتة دون تغيير أي أن احتمالات التغير من الفترة n إلى الفترة $n+1$ ، هي نفس الاحتمالات الخاصة بالتغير من الفترة $n+1$ إلى الفترة $n+2$... الخ .

¹إسماعيل السيد، جلال العبد، الأساليب الكمية في الإدارة، الدار الجامعية، مصر، 2003، ص:135

3. أنه يمكننا التنبؤ بأي موقف في المستقبل من خلال مصفوفة التغير وأيضا من خلال المعرفة بالموقف الحالي.

4. إن حجم النظام الذي نستخدمه في التنبؤ يظل دون تغيير خلال قيامنا بعملية التحليل .

1-2-2. المواقف واحتمالات حدوثها¹:

إن مصطلح المواقف **States** يستخدم لتحديد كافة الظروف الممكنة الخاصة بعملية ما أو نظاما ما. فعلى سبيل المثال يمكن للآلة أن توجد في أحد موقفين في أي وقت من الأوقات. فهي إما أن تكون في حالة عمل صحيح أو أن تكون في حالة لا تعمل فيها بشكل صحيح. وبمكنا القول بأن عمل الآلة بشكل صحيح هو الموقف الأول ، وأن عمل الآلة بشكل غير صحيح هو الموقف الثاني. وبطبيعة الحال يمكننا أن نحدد المواقف المختلفة لأي عملية أو أي نظام. فلو أن هناك - مثلا - ثلاثة متاجر للبقالة في المنطقة فإن المستهلك يمكن أن يكون عميلا يتعامل مع أحد هذه المتاجر في أي وقت من الأوقات . ومن هنا فإن هناك ثلاثة مواقف تخص المتاجر الثلاثة. ولو أن طالبا يستطيع أن يحصل على مقرر واحد من مقررات ثلاثة فإن كل مقرر منهم يمكن اعتباره موقفا.

وفي تحليل ماركوف فإننا أيضا نفترض أن المواقف التي تحددها هي شاملة لكل المواقف الممكنة وأنها لا يمكن أن تتقاطع معا في أي لحظة من اللحظات . ويفترض تحليل ماركوف - كما ذكرنا من قبل- أننا نستطيع أن نجد كل المواقف المختلفة لأي عملية أو نظام حيث أن هذه المواقف محددة ونهائية . أما عدم تقاطع المواقف يعني أن النظام لا يمكن أن يكون إلا في موقف واحد في نفس الوقت . فلا يمكن للنظام أن يكون في أكثر من موقف في نفس الوقت. فالطالب لا يمكن أن يكون متخصصا في أكثر من مجال معرفة في نفس الوقت، والمستهلك يمكن أن يكون مستهلكا لمتجر معين في وقت معين ولكن ليس مستهلكا لعدة متاجر في نفس الوقت.. وهكذا.

وبعد القيام بتحديد المواقف المحتملة تكون الخطوة التالية هي تحديد احتمالات وجود النظام في كل موقف من هذه المواقف. ويتم وضع هذه الاحتمالات فيما يعرف باسم مصفوفة احتمالات المواقف بالصورة التالية:

¹ إسماعيل السيد، جلال العبد، مرجع سبق ذكره، ص: 136

$$\Pi_t = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n) \dots (1-20)$$

حيث أن :

$$\Pi_t = \text{مصفوفة احتمالات المواقف في الزمن } t$$

$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n) =$ هي احتمالات وجود النظام في الموقف 1، أو الموقف 2، أو الموقف 3، ...، إلى الموقف n .

وفي بعض الحالات، حيث نكون في حالة تعامل مع شيء واحد، مثل آلة واحدة، فإنه يكون من السهل أن نحدد بدرجة تأكيد تام في أي موقف سيكون هذا الشيء. فعلى سبيل المثال، لو أننا نتعامل مع آلة واحدة، فإننا نعرف ما إذا كانت هذه الآلة تعمل بشكل صحيح أم لا. فإذا عرفنا أن الآلة تعمل بشكل صحيح الآن فإن مصفوفة الموقف تصبح:

$$\pi_1 = (1,0)$$

حيث أن :

$$\pi_1 = \text{مصفوفة الموقف الخاصة بالآلة في الفترة الزمنية 1.}$$

$\pi_1 = 1$: احتمالات وجود الآلة في الموقف الأول (الآلة تعمل بشكل صحيح) $\pi_1 = 0$: احتمالات وجود الآلة في الموقف الثاني (الآلة تعمل بشكل غير صحيح).

ولكن في معظم الحالات نجد أنفسنا نتعامل مع أكثر من شيء أو عنصر في وقت واحد. دعنا ننظر إلى مصفوفة موقف الخاصة بمجموعة من الأفراد يعيشون في منطقة جغرافية معينة والتي يوجد بها ثلاثة متاجر بقالة . ويقدر عدد الأفراد في المنطقة بحوالي 100000 فرد وجميعهم متسوقون ما يحتاجون إليه من مواد غذائية من هذه المتاجر الثلاثة في كل شهر. ويقدر عدد الأفراد الذين يشترون من المتجر الأول بحوالي 40000 وسوف نطلق على هذا اسم الموقف (1) . بينما يقدر عدد الذين يتسوقون من المتجر الثاني بحوالي 30000 وسوف نطلق على هذه الحالة اسم الموقف (2). وأخيرا فإن حوالي 30000 فرد يقومون بالشراء من المتجر الثالث، وسوف نسمى هذه الحالة الموقف (3). ومن البيانات السابقة يمكننا أن نحدد احتمالات قيام فرد ما بالتسوق في واحد من هذه المتاجر الثلاثة كالتالي:

الموقف 1: المتجر الأول: $100000/40000=0.40=40\%$

الموقف 2. المتجر الثاني: $100000/30000=0.3=30\%$

الموقف 3: المتجر الثالث: $100000/30000=0.3=30\%$

ومن الممكن وضع هذه الاحتمالات في صورة مصفوفة احتمالات المواقف كالتالي:

$$\pi_1 = (0.4, 0.3, 0.3)$$

حيث أن:

$\pi_1 =$ هو مصفوفة احتمالات الموقف بالنسبة للمتاجر الثلاثة

$0.4 =$ احتمالات قيام الفرد بالتسوق في المتجر الأول-الموقف 1

$0.3 =$ احتمالات قيام الفرد بالتسوق في المتجر الثاني-الموقف 2

$0.3 =$ احتمالات قيام الفرد بالتسوق في المتجر الثالث -الموقف 3

و يلاحظ أن الاحتمالات التي توجد داخل المصفوفة هي احتمالات تمثل أيضا حصة كل متجر في

السوق. و من هنا فان المتجر الأول يحصل على 40% من السوق ، و المتجر الثاني يحصل على 30% من

السوق و أخيرا يحصل المتجر الثالث على 30% من السوق و ما تم تحديده الآن هو المواقف المبدئية و

احتمالات الموقف، و تكون الخطوة التالية هي تحديد مصفوفة احتمالات التغيير و ذلك حتى يمكن التنبؤ

بالموقف في المستقبل.¹

1-2-3. مصفوفة احتمالات التغيير:

بالنسبة لعملية متجانسة فان الاحتمالات الشرطية (1.3) لا تتغير مع الزمن، لهذا يمكن تبسيط

العلاقات المستعملة و تحديد الاحتمالات²:

$$P_{ij} = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i] \dots \dots (1-21)$$

و ذلك من أجل أي ثنائية (i,j) مستقلة عن n

¹إسماعيل السيد، جلال العبد، مرجع سبق ذكره، ص:139

² J-F.Heche, T. M.Liebling, D.de Werra, op.cit, p :

❖ تعريف: الاحتمال P_{ij} يسمى احتمال التغيير (أو الانتقال) من الحالة i إلى الحالة j في

مرحلة ما يساوي الاحتمال الشرطي عندما يكون النظام موجود في الحالة j في المرحلة التالية،

مع العلم انه موجود حاليا في الحالة i

إذا كانت سلسلة ماركوف تحتوي على $|S| = s$ حالة، فانه يوجد s^2 احتمال تغيير التي يمكن

ترتيبها في مصفوفة مربعة $s \times s$ حيث تكون اسطرها وأعمدتها محددة بعناصر S .

تعريف: المصفوفة $P = (p_{ij})$ ، حيث العنصر (ij) يساوي احتمال التغيير في مرحلة ما من

الحالة i إلى الحالة j تسمى مصفوفة التغيير لسلسلة ماركوف.

تسمى مصفوفة التغيير كذلك بالمصفوفة العشوائية و التي تستوفي الشروط التالية:

1. عناصرها لا تكون سالبة:

$$p_{ij} \geq 0 ; \quad \forall i, j \in S$$

2. مجموع عناصر كل سطر يساوي 1:

$$\forall i \in S \sum_{j \in S} p_{ij} = 1;$$

إن مصفوفة احتمالات تغيير الموقف **Matrix Of Transition Probabilities** هي التي

تمكنا من الانتقال من الموقف الحالي، إلى موقف آخر محتمل في المستقبل. فمثلا تعد مصفوفة احتمالات

التغيير هي الوسيلة التي يمكن من خلالها التنبؤ بتغير حصة الشركة في السوق ومصفوفة احتمالات التغيير

هي عبارة عن مجموعة من الاحتمالات المشروطة لوجود الشيء في موقف ما في المستقبل مع الأخذ في

الاعتبار الموقف الحالي الذي يوجد في هذا الشيء.

ويمكن تعريف مصفوفة احتمالات التغيير كالتالي¹:

¹ إسماعيل السيد، جلال العبد، مرجع سبق ذكره، ص: 140

$$P_{nm} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} & \dots & P_{n1} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} & & \\ \cdot & \cdot & \dots & & \\ P_{1m} & P_{2m} & P_{3m} & & P_{nm} \end{bmatrix}$$

حيث أن :

P_{nm} : هي احتمالات انتقال الشيء إلى الموقف n مع الأخذ في الاعتبار موقفه الآن في الموقف m

ومن هنا فإن P_{11} هي احتمالات بقاء الشيء في نفس الموقف 1 دون تغيير، P_{21} هي احتمالات انتقال الشيء من الموقف 1 إلى الموقف 2 مع الأخذ في الاعتبار أنه الآن في الموقف 1... وهكذا بالنسبة لبقية الاحتمالات الموجودة في المصفوفة . و عادة ما يتم تحديد هذه الاحتمالات من خلال البيانات الفعلية التاريخية والتي حدثت في الماضي. فمثلا قد تفيد البيانات إلى أن 10% من المستهلكين الحاليين الذين يتسوقون في المتجر الأول (موقف 1) سوف يتحولون إلى التسوق في المتجر الثاني (موقف 2) و ذلك في الفترة القادمة. و لذا فإن الاحتمالات الخاصة بانتقال الأفراد من الموقف 1 إلى الموقف 2 في الفترة القادمة تساوي 0.1. أو أن P_{21} تساوي 0.1 ...

دعنا نفترض أننا قد حددنا مصفوفة احتمالات التغيير بالنسبة للمحلات الثلاث وذلك باستخدام

البيانات التاريخية والتي تظهر كما يلي:

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المتجر الأول هو الموقف 1 والمتجر الثاني هو الموقف 2، والمتجر الثالث هو الموقف 3.

ومن هنا فان معنى الاحتمالات الموجودة في المصفوفة السابقة يعني ما يلي:

الصف الأول:

$P_{11}=0.8$ =احتمالات أن يكون الفرد في الموقف 1 بعد أن كان في نفس الموقف في الفترة السابقة.

$P_{21}=0.1$ = احتمالات أن يكون الفرد في الموقف 2 بعد أن كان في الموقف 1 في الفترة السابقة .

$P_{31}=0.1$ احتمالات أن يكون الفرد في الموقف 3 بعد أن كان في الموقف 1 في الفترة السابقة .

الصف الثاني :

$P_{12}=0.1$ احتمالات أن يكون الفرد في الموقف 1 بعد أن كان في الموقف 2 في الفترة السابقة.

$P_{22}=0.7$ احتمالات أن يكون الفرد في الموقف 2 بعد أن كان أيضا في الموقف 2 في الفترة السابقة.

$P_{32}=0.2$ احتمالات أن يكون الفرد في الموقف 3 بعد أن كان في الموقف 2 في الفترة السابقة .

الصف الثالث :

$P_{13}=0.2$ احتمالات أن يكون الفرد في الموقف 1 بعد أن كان في الموقف 3 في الفترة السابقة.

$P_{23}=0.2$ احتمالات أن يكون الفرد في الموقف 2 بعد أن كان في الموقف 3 في الفترة السابقة.

$P_{33}=0.6$ احتمالات أن يكون الفرد في الموقف 3 بعد أن كان في الموقف 3 في الفترة السابقة .

1-2-4. مفهوم عمليات الولادة ، عمليات بواسون ، و عمليات الولادة و الوفاة :

1. عمليات الولادة:

تعريف¹ :

نقول بوجود عملية ولادة عندما يكون هناك ظهور لأفراد في مؤسسة معينة و ذلك حسب قوانين احتمالات معينة .

مع العلم أنها عملية مستمرة ، فإننا نفرض أنها متجانسة ، في هذه الحالة ، فإن احتمال ظهور فرد في فاصل زمني Δt يكون متناسبا مع Δt ، نفرض أنه يوجد n فرد في النظام في اللحظة t ، فلاحتمال يساوي : $\lambda_n \Delta t$ ²

من جهة أخرى لا نهمل احتمال أكثر من ظهور في Δt

ليكن $p_n(t)$ احتمال n فرد في اللحظة t ، نكتب :

$$p_{n'}(t) = 0 \quad : n' < n \text{ من اجل}$$

$$p_n(t) = p_n(t') = p_n(t'') = \dots \text{ (العملية متجانسة)}$$

❖ المعادلات التي تحدد عمليات الولادة :

النظام يبدأ بالحالة $n = 0$ نكتب:

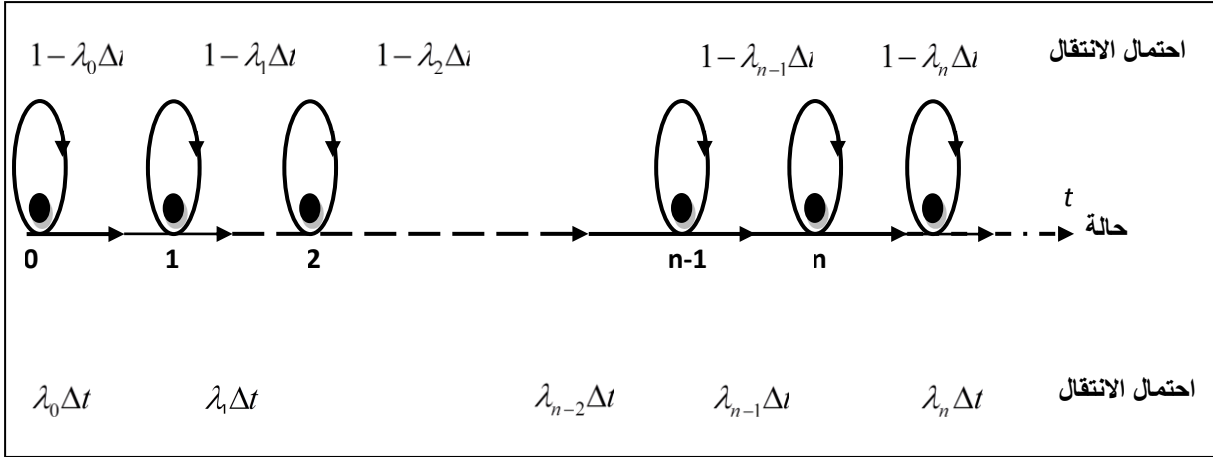
$$p_0(0) = 1 \text{ و } p_n(0) = 0 \text{ و ذلك من اجل } n \geq 1$$

الانتقال (أو التغيير) من حالة إلى أخرى يمكن تمثيلها بالمخطط التالي :

¹ S.BOUABDALLAH, *application de la théorie des files d'attente pour mesurer la qualité de la prestation de service au secteur des postes*, universite mohamed bouiaf m'sila, 2002, p7

² نكتب : $p \{N_{t+\Delta t} - N_t \geq 1\} = \lambda_n \Delta t + \theta(\Delta t)$ ، تمثل احتمال اكثر من ظهور في Δt ، حيث ان :

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta \Delta t}{\Delta t} = 0$ ، اي انها تؤول الى 0 اسرع من Δt ، انظر : N.PISKOUNOV, *calcul différentielle est intégral*, tome 1, 7^{eme} édition, éditions MIR, MOSCOU, 1976, p44



الشكل رقم (1-5) عملية الولادة
المصدر: R.FAURE 1979, op.cit, p.22

الشكل يبين انه من أجل التواجد في الحالة n في الفترة i هناك حالتان:

- النظام كان في الحالة $n-1$ في الفترة $i-1$ (باحتمال: $p_{n-1}(i-1)$ و هناك ظهور فرد في Δt (باحتمال $\lambda_{n-1} \Delta t$),
 - أو أن النظام قد كان في الحالة n في الفترة $i-1$ (بالاحتمال $p_n(i-1)$ و هناك ظهور فرد في الفاصل Δt (باحتمال $1 - \lambda_{n-1} \Delta t$)
- الرسم البياني السابق يتوافق مع مصفوفة التغيير التالية¹:

	0	1	2	3	...	n-1	n	n+	← حالة النظام في اللحظة $t + \Delta t$
0	$1 - \lambda_0 \Delta t$	$\lambda_0 \Delta t$	0	0	...	0	0	0	
1	0	$1 - \lambda_1 \Delta t$	$\lambda_1 \Delta t$	0	...	0	0	0	
2	0	0	$1 - \lambda_2 \Delta t$	$\lambda_2 \Delta t$...	0	0	0	
...	
n-1	0	0	0	0	...	$1 - \lambda_{n-1} \Delta t$	$\lambda_{n-1} \Delta t$	0
n	0	0	0	0	...	0	$1 - \lambda_n \Delta t$	$\lambda_n \Delta t$	
n+	0	0	0	0	...	0	0	$1 - \lambda_{n+1} \Delta t$	
...	

↑ حالة النظام في
اللحظة t

¹ S.BOUABDALLAH, op.cit,p10

2. عملية بواسون :

تعتبر من أهم الأنواع القوانين الاحتمالية ، ويعرف كالتالي¹ :

نقول عن التوزيع الاحتمالي $X(t)$ انه عبارة عن عملية بواسون بمعدل λ ، إذا كان:

$$\bullet \quad x(0) = 0$$

$$\bullet \quad X(t) \text{ له تزايدات مستقلة؛}$$

• عدد الحوادث على طول الفترة t تتبع قانون بواسون بمعدل λt ، وهذا من اجل كل

$$\text{المتغيرات : } s, t \geq 0$$

$$P[X(t+s) - X(s) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

القانون الاحتمال الذي يمثل عدد الأحداث التي تطرأ في فترة محددة t يتم تحديده انطلاقاً من المفاهيم

الابتدائية للاحتمالات.

نضع p احتمال وقوع حدث معين في فترة Δt و q الاحتمال المكمل : $q=1-p$

ليكن L عدد الفواصل الزمنية Δt التي تكون وحدة الزمن $t=1$.

نفرض أن $L=5$ ، ونضع : 1 بالنسبة للولادة و 0 للعكس. نحاول تحديد احتمال 3 أحداث في L ، كحالة

من الحالات الممكنة: 11001 فان لديها الاحتمال: $p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot p = p^3 q^2$. هناك اذن : $C_5^3 = 30$ طريقة

لتحقيق الأحداث الثلاث ، مما يعطينا احتمال : $C_5^3 p^3 q^2$ بالنسبة لهذه النتيجة.

$$p_n(t) = C_L^n \cdot p^n \cdot q^{L-n} = \frac{L!}{n!(L-n)!} p^n \cdot q^{L-n} \dots (1-22)$$

في الحالة العامة أين تكون $L \rightarrow \infty$ ، نضع λ ثابت حيث : $p = \lambda / L$ فيكون لدينا :

¹ Hwei P. Hsu, Ph.D, Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes, Schaum's Outline, The McGraw-Hill Companies, USA, 1997, p169

$$P_n(t) = \frac{L(L-1)(L-2)\dots(L-n+1)}{n!} \left(\frac{\lambda}{L}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{L}\right)^{L-n}$$

$$P_n(t) = \frac{L}{L} \frac{(L-1)}{L} \frac{(L-2)}{L} \dots \frac{(L-n+1)}{L} \lambda^n \left(1 - \frac{\lambda}{L}\right)^{L-n}$$

$$P_n(t) = \frac{1(1-\frac{1}{L})(1-\frac{2}{L})\dots(1-\frac{n-1}{L})}{n!} \lambda^n \left(1 - \frac{\lambda}{L}\right)^{L-n}$$

$$L \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{L} \rightarrow 0, \frac{2}{L} \rightarrow 0, \dots$$

$$P_n(t) = \frac{\lambda^n \left(1 - \frac{\lambda}{L}\right)^{L-n}}{n!}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{L}\right)^{L-n} = \left(1 - \frac{\lambda}{L}\right)^L \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{L}\right)^{-n}, \text{ نضع :}$$

$$\text{باستعمال النهايات: } \lim_{L \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{L}\right)^L = e^\lambda \text{ و } \lim_{L \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{L}\right)^L = e \text{ نجد أن:}$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{L}\right)^L = e^{-\lambda} \dots (1-23)$$

$$\text{من جهة أخرى : } \lim_{L \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{L}\right)^{-n} = 1 \text{ و منه نجد أن }^1:$$

$$P_n(t) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \dots (1-24)$$

و هو قانون الاحتمالات لبواسون من اجل وحدة زمنية $t=1$ ، و على وجه التحديد المتوسط $E(n) = \lambda$

من اجل أي قيمة لـ t : $p = \frac{\lambda t}{L}$ ، بتعويض λ بـ λt النتيجة السابقة تصبح :

$$P_n(t) = \frac{\lambda t^n}{n!} e^{-\lambda t} \dots (1-25)$$

¹ D.salvator, *économétrie et statistique appliquée* trad.g.loudieremc.grew-hill, paris,1985,p73

3. عمليات الولادة و الوفاة:

تعريف:

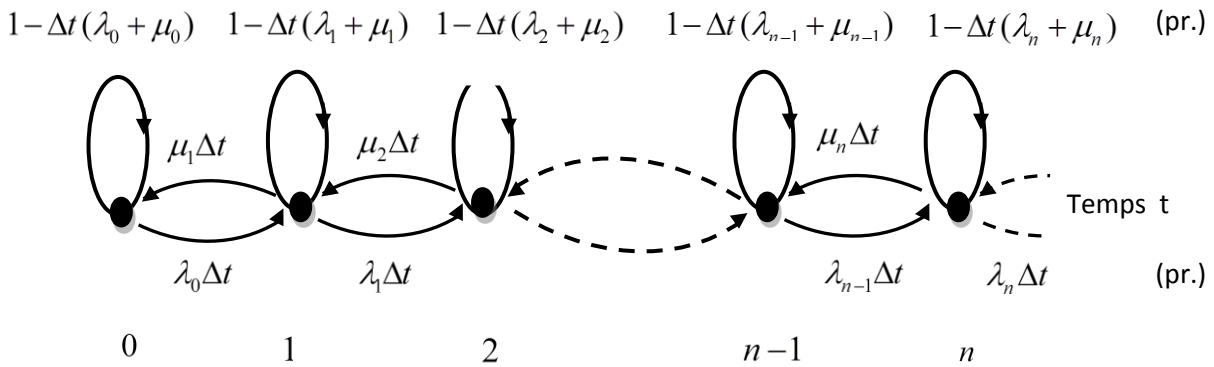
عملية الولادة و الوفاة هي عملية تقوم بتطوير نظام بين لانهائية عددية (infinité dénombrable) و غير عددية للحالات (عملية مستمرة)، بحيث يكون النظام في كل فترة في حالة معينة واحدة.¹ كمثل، صفوف الانتظار أمام شباك، فان "حالات النظام" التي تمثل عدد الزبائن في مكان الخدمة. لتحليل عملية الولادة و الوفاة في فضاء عيني مستقل، فإننا نضع دائما الفرضيات التالية:

الفرضية الأولى: النظام لا ينتقل إلا إلى الحالات المجاورة، فادا كان النظام في الحالة E_n في اللحظة t ، فلا يمكن له الانتقال في اللحظة $t + \Delta t$ إلا إلى الحالة E_{n+1} حيث نسمي هذا المقطع من الانتقال بـ "ولادة"، الحالة E_{n-1} تمثل المقطع "الوفاة" أو حالة عدم التغير E_n .

الفرضية الثانية: احتمالات الانتقال من حالة إلى أخرى تعتمد على حالة الأولية المأخوذة بعين الاعتبار و التي لا تنتمي للفترة t .

الفرضية الثالثة: يمكن لحدث أو أكثر (ولادة أو وفاة) أن يقع في لحظة معينة.

يمكن تمثيل العملية في المخطط التالي :



الشكل رقم (6-1): مخطط عملية الولادة و الوفاة .

¹ P.GUITTARD, 1983, op. cit,p14

5.2.I عمليات لا ولادة ولا وفاة¹ Non-Birth-and-Death Processes

ناقشنا بعض أنواع عمليات ماركوف والتي سميناها عمليات الولادة والوفاة. ففي هذا النوع من العمليات يحدث الانتقال من الحالة الحالية إلى حالة مجاورة: أي من الحالة $i \in S$ إلى الحالة $i+1 \in S$ ($i \geq 0$) أو إلى الحالة $i-1 \in S$ ($i \geq 1$). وسناقش في هذا الفصل بعض عمليات ماركوف والتي لا تكون عمليات ولادة ولا وفاة. في هذا النوع من العمليات يتم الانتقال من حالة إلى حالة أخرى ليس من الضروري أن تكون مجاورة للحالة الحالية: بمعنى أنه يمكن للعملية أن تنتقل من الحالة $i \in S$ إلى الحالة $i+r \in S$ ($i \geq 0, r \geq 1$) أو إلى الحالة $i-k \in S$ ($i \geq k \geq 1$). يستخدم هذا النوع من العمليات العشوائية لنمذجة لأنظمة الطوابير.

1. نموذج الولادة الجماعي Bulk births model

ليكن $X(t)$ عدد أفراد مجتمع ما في منطقة معينة عند اللحظة الزمنية t . وبفرض أن هذا العدد يتزايد أو يتناقص بناء على القواعد التالية:

(أ) يحدث الانتقال من الحالة i إلى الحالة $i-1$ خلال الفترة الزمنية $(t, t+h)$ باحتمال $\mu h + o(h)$.

(ب) يحدث الانتقال من الحالة i إلى الحالة $i+k$ ، $k=1,2,\dots$ خلال الفترة الزمنية

$$(t, t+h) \text{ باحتمال } \lambda a_k h + o(h), \text{ حيث أن } \sum_{k \geq 1} a_k = 1.$$

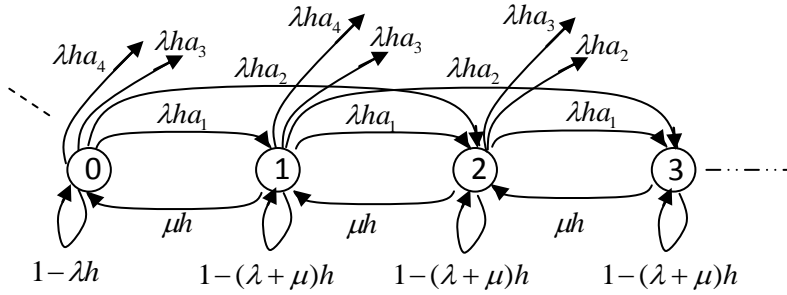
إذا كان $p_{ij}(t)$ يرمز إلى احتمال تغير عدد أفراد المجتمع من i عند اللحظة t إلى j عند اللحظة

$t+h$ ، إذن وبجذف الحدود التي تحتوي $o(h)$ وذلك للتبسيط، فإن م.ح.ن. تأخذ الصورة التالية:

¹ عمار محمود سرحان، لطفي تاج بمقدمة في العمليات العشوائية، جامعة الملك سعود، الرياض، 2002، ص 269

$$P = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1-\lambda h & \lambda h a_1 & \lambda h a_2 & \lambda h a_3 & \dots \\ \mu h & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h a_1 & \lambda h a_2 & \dots \\ 0 & \mu h & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h a_1 & \dots \\ 0 & 0 & \mu h & 1-(\lambda+\mu)h & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mu h & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

نلاحظ مما سبق أن احتمال عدم تغير حجم المجتمع بالزيادة أو النقصان خلال الفترة الزمنية $(t, t+h)$ هو $1-(\lambda+\mu)h+o(h)$. يوضح الشكل (1، 7) الرسم البياني الملازم لهذه العملية العشوائية.



شكل (1-7): التمثيل البياني لعملية الولادة الجماعية.

المصدر، عمار محمود سرحان ،لطفى تاج،مرجع سبق ذكره،ص269

باستخدام نفس الرموز المستخدمة في عملية الولادة والوفاة المقدمة في الفصل السادس، نلاحظ أن

العلاقة:

$$(p_0(t+h), p_1(t+h), \dots, p_n(t+h), \dots) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t), \dots) P \dots \dots \dots (1-26)$$

تكافئ العلاقات التالية:

$$p_0(t+h) = (1-\lambda h)p_0(t) + \mu h p_1(t) ،$$

$$p_n(t+h) = \sum_{k=1}^n \lambda a_k p_{n-k}(t) + [1-(\lambda+\mu)h]p_n(t) + \mu h p_{n+1}(t), \quad n \geq k \geq 1$$

وبالتالي يمكن الحصول على معادلات الفروق التفاضلية التالية لعملية الولادة الجماعية:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= \sum_{k=1}^n \lambda a_k p_{n-k}(t) - (\lambda + \mu) p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad n \geq k \geq 1. \end{aligned}$$

• الحل المستقر (حل الحالة المستقر) Steady-state solution

بفرض أن حل الحالة المستقر موجود، وبالتالي نحصل على :

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ 0 &= \lambda \sum_{k=1}^n a_k p_{n-k}(t) - (\lambda + \mu) p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad n \geq k \geq 1 \dots\dots\dots(1-27) \end{aligned}$$

لحل نظام المعادلات (1، 27) سنستخدم طريقة الدالة المولدة للاحتمال. لأي $|z| \leq 1$ ، نفرض أن $A(z)$ ،
: $P(z)$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \quad A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

هما الدالتين المولدتين لاحتمال كل من $\{p_n\}$ ، $\{a_n\}$ ، على الترتيب. بضرب كل معادلة من معادلات النظام (1، 27) في z^n وجمع الناتج نحصل على العلاقة التالية:

$$0 = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + \frac{\mu}{z} \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n p_{n-k} a_k z^n \dots\dots(1-28)$$

نلاحظ أن $\sum_{k=1}^n p_{n-k} a_k$ هو دالة الكتلة الاحتمالية لمجموع حجم نظام الحالة المستقر وحجم الجماعة، وذلك لأنه عبارة عن التفاف **convolution** لمتغيرين عشوائيين. يمكن توضيح أن الدالة المولدة لاحتمال هذا المجموع تكون عبارة عن حاصل ضرب الدالتين المولدتين للاحتمال لطرفي المجموع، بمعنى أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n p_{n-k} a_k z^n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \sum_{n=k}^{\infty} p_{n-k} z^{n-k} = A(z) P(z)$$

ومن ثم يمكن كتابة المعادلة (1، 28) على الصورة التالية:

$$0 = -\lambda P(z) - \mu[P(z) - p_0] + \frac{\mu}{z}[P(z) - p_0] + \lambda P(z) A(z)$$

وبالتالي:

$$P(z) = \frac{\mu(1-z)p_0}{\mu(1-z) - \lambda z [1-A(z)]} \dots\dots\dots(1-29)$$

يمكن الحصول على p_0 باستخدام الشرط $P(1) = 1$ ، أي أن:

$$1 = \lim_{z \rightarrow 1} P(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{\mu(1-z)p_0}{\mu(1-z) - \lambda z [1-A(z)]} \right\}$$

وحيث أن كل من البسط والمقام يؤول إلى الصفر، فإنه يمكن استخدام قاعدة لوبيتال **Hopital's**

لنحصل على:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} P(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{-\mu p_0}{-\mu - \lambda A(z) + \lambda z dA(z)/dz} \right\} \\ &= \frac{-\mu p_0}{-\mu + \lambda \bar{a}} \end{aligned}$$

حيث أن $\bar{a} = A'(1)$ ، وبالتالي فإن:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda \bar{a}}{\mu} \dots\dots\dots(1-30)$$

وحتى تكون p_0 موجودة ومن ثم يمكن الوصول للحالة المستقرة فإنه يجب أن يتحقق الشرط

$$\rho = \frac{\lambda \bar{a}}{\mu} < 1 . \text{ والآن لأجل دالة معينة مولدة للاحتمال } A(z) \text{ فإنه يمكن استنتاج التوزيع المستقر } \{p_n\}$$

وذلك بمقارنة معاملات مفكوك $P(z)$ والتي يمكن الحصول عليها من العلاقة (1، 29) .

• الحجم المتوقع للمجتمع:

الحجم المتوقع للمجتمع يعطى بالعلاقة التالية

$$E[X] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{dP(z)}{dz} \dots\dots\dots(1-31)$$

بحساب مشتقة $P(z)$ بالنسبة لـ z ثم بالتعويض عن z نحصل على النتيجة $\frac{0}{0}$ ، كما حدث عندما حسبنا $P(1)$. وبالتالي وبالرغم من إمكانية تطبيق قاعدة لوبيتال، إلا أننا نقترح طريقة أخرى كما هو موضح أدناه.

حيث أن متسلسلة القوى تتقارب على كل فترة الوحدة إذن وبناء على نظرية أبل **Abel's theorem** فإن كل من الدالة $P(z)$ و مشتقتها $P'(z)$ تكون متصلة عند $z=1$. يمكن حذف عدم التحديد في $P(z)$ بفك البسط كمتسلسلة قوى حول $z=1$ ثم نحذف المعامل $(1-z)$ من بسط ومقام الدالة $P(z)$.

باعتبار مفكوك تايلور **Taylor** للدالة $f(z)=1-A(z)$ حول $z=1$ نحصل على:

$$f(z) = f(1) + (z-1)f'(1) + \frac{(z-1)^2}{2} f''(1) + \text{higher powers of } (z-1).$$

والآن $f(1)=0$ ، $f'(1)=-A'(1)=-\bar{a}$ ، $f''(1)=-A''(1)=-\sigma^2 + \bar{a}^2 - \bar{a}$ ، حيث أن \bar{a} ، σ هما المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع $\{a_k\}$. وبالتالي فإن:

$$P(z) = \frac{\mu(1-z)(1-\rho)}{\mu(1-z) - \lambda z [(1-z)f'(1) + \frac{(z-1)^2}{2} f''(1) + \dots]} \dots\dots\dots(1-32)$$

أي أن:

$$P(z) = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu + \lambda z f'(1) + \frac{\lambda z (z-1)}{2} f''(1) + \dots} \dots\dots\dots(1-33)$$

ومن ثم نحصل على:

$$P(1) = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu - \lambda \bar{a}} = 1 \dots\dots\dots(1-34)$$

وعلى :

$$\begin{aligned}
 P'(1) &= \frac{\mu(1-\rho)}{(\mu-\lambda\bar{a})^2} [-\lambda f'(1) - \frac{\lambda}{2} f''(1)] \\
 &= \frac{1}{\mu-\lambda\bar{a}} [\lambda A'(1) + \frac{\lambda}{2} A''(1)] \\
 &= \frac{1}{\mu-\lambda\bar{a}} [\lambda\bar{a} + \frac{\lambda}{2}(\sigma^2 + \bar{a}^2 - \bar{a})] \\
 &= \frac{\lambda(\sigma^2 + \bar{a}^2 - \bar{a})}{2(\mu-\lambda\bar{a})}
 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$E[X] = \frac{\lambda(\sigma^2 + \bar{a}^2 - \bar{a})}{2(\mu-\lambda\bar{a})} \dots\dots\dots(1-35)$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على $P''(1)$ ومن ثم نحصل على تباين حجم المجتمع في الحالة المستقرة .

2. نموذج الوفاة الجماعي¹ Bulk deaths model

كما قلنا سابقا، $X(t)$ يمثل عدد أفراد مجتمع في منطقة معينة عند اللحظة الزمنية t ، وبمعلومية أي عدد صحيح $K > 1$ ، فإن $X(t)$ يمكن أن يتزايد أو يتناقص بناء على القواعد التالية:

(أ) يحدث الانتقال من الحالة i إلى الحالة $i+1$ خلال الفترة الزمنية $(t, t+h)$ باحتمال $\lambda h + o(h)$.

(ب) إذا كان $i < K$ ، فإن الانتقال يحدث من الحالة i إلى الحالة $i-k$ ، $(k=1,2,\dots,i)$ ، خلال الفترة الزمنية $(t, t+h)$ باحتمال $\mu h + o(h)$.

(ج) إذا كان $i > K$ ، فإن الانتقال يحدث من الحالة i إلى الحالة $i-K$ ، $(k=1,2,\dots,i)$ ، خلال الفترة الزمنية $(t, t+h)$ باحتمال $\mu h + o(h)$.

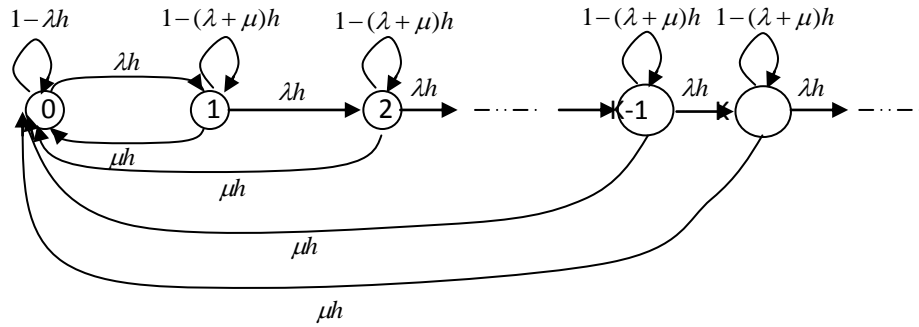
إذا كان $p_{ij}(t)$ يرمز إلى احتمال تغير عدد أفراد المجتمع من i عند اللحظة t إلى j عند اللحظة

¹ المصدر، عمار محمود سرحان، لطفي تاج، مرجع سبق ذكره، ص 275

$t+h$ ، إذن وبجذف الحدود التي تحتوي $o(h)$ وذلك للتبسيط، فإن م.ح.ن. تأخذ الصورة التالية:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & K-1 & K & K+1 & K+2 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ K-1 \\ K \\ K+1 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1-\lambda h & \lambda h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu h & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu h & 0 & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu h & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h & 0 & 0 & \dots \\ \mu h & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h & 0 & \dots \\ 0 & \mu h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

نلاحظ من (أ)، (ب) الموضحين أعلاه أن احتمال عدم تغير حجم المجتمع بالزيادة أو النقصان خلال الفترة الزمنية $(t, t+h)$ هو $1-(\lambda+\mu)h+o(h)$. يوضح الشكل (8,1) الرسم البياني الملازم لهذه العملية العشوائية.



شكل (8-1): التمثيل البياني لعملية الوفاة الجماعية.

باتباع نفس الاجراء المتبع في البند السابق، يمكن الحصول على المعادلات التي تكافئ المعادلات (1، 26) في الصورة التالية:

$$p_0(t+h) = (1-\lambda h)p_0(t) + \mu h \sum_{i=1}^K p_i(t)$$

$$p_n(t+h) = \lambda h p_{n-1}(t) + [1-(\lambda+\mu)h]p_n(t) + \mu h p_{n+K}(t), \quad n \geq 1$$

وباستخدام هذه المعادلات يمكن الحصول على معادلات الفروق التفاضلية التالية لعملية الوفاة الجماعية:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu \sum_{i=1}^K p_i(t) \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) p_n(t) + \mu p_{n+K}(t), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad \dots\dots(1-36)$$

• الحل المستقر (حل الحالة المستقر) **Steady-state solution**

بفرض أن حل الحالة المستقر موجود، وبالتالي نحصل على :

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1 + \dots + \mu p_{K-1} + \mu p_K, \\ 0 &= \mu p_{n+K} - (\lambda + \mu) p_n + \lambda p_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad \dots\dots(1-37)$$

لحل نظام المعادلات (1، 37) سنستخدم طريقة المؤثرات الموضحة فيما يلي:

حيث أن $Dp_n = p_{n+1}, n \geq 0$ ، فإن $D^m p_n = p_{m+n} \forall n, m$ ، إذن يمكن كتابة المعادلة الثانية في النظام (1، 37) في الشكل التالي:

$$(\mu D^{K+1} - (\lambda + \mu)D + \lambda)p_n = 0, \quad n \geq 0$$

ومن ثم فإن المعادلة المميزة تأخذ الصورة التالية:

$$\mu D^{K+1} - (\lambda + \mu)D + \lambda = 0 \dots\dots(1-38)$$

وبحل المعادلة المميزة نحصل على جذورها، ولتكن (r_n, \dots, r_{K+1}) ، وبالتالي فإن :

$$p_n = \sum_{i=1}^{K+1} C_i r_i^n, \quad n \geq 0$$

وحيث أن : $p_n = \sum_{i=1}^{K+1} C_i r_i^n, n \geq 0$ إذن يجب أن يكون جميع r_i أقل من الواحد، أو $C_i = 0$ لكل

r_i ليس أقل من الواحد. يمكن التحقق من أنه في الحقيقة يوجد جذر واحد وواحد فقط لمثل هذا النوع من المعادلات المميزة، وليكن r_0 ، يقع في الفترة (0,1). وبالتالي فإن:

$$p_n = C r_0^n, \quad n \geq 0$$

وباستخدام الشرط $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ نحصل على:

$$C = p_0 = 1 - r_0$$

وبالتالي فإن:

$$p_n = (1 - r_0) r_0^n, n \geq 0.$$

• الحجم المتوقع للمجتمع.

الحجم المتوقع للمجتمع يُعطي بالعلاقة التالية:

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n \dots (1-39)$$

باستخدام علاقات p_n نحصل على :

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{n=0}^{\infty} n(1 - r_0) r_0^n \\ &= (1 - r_0) \sum_{n=0}^{\infty} n r_0^n \end{aligned}$$

يمكن حساب $\sum_{n=0}^{\infty} n r_0^n$ كالآتي:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n r_0^n &= r_0 + 2r_0^2 + 3r_0^3 + \dots \\ &= r_0(1 + 2r_0 + 3r_0^2 + \dots) \\ &= r_0 \sum_{n=1}^{\infty} n r_0^{n-1} \end{aligned}$$

ولكن وببساطة $\sum_{n=1}^{\infty} n r_0^{n-1}$ عبارة عن مشتقة $\sum_{n=0}^{\infty} r_0^n$ بالنسبة لـ r_0 ، وذلك لأنه يمكن تبديل عمليتي الجمع

والاشتقاق. وبما أن $r_0 < 1$ فإن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_0^n = \frac{1}{1 - r_0}$$

ومن ثم فإن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r_0^{n-1} = \frac{1}{(1-r_0)^2}$$

وبالتالي فإن العدد المتوقع لحجم المجتمع في الحالة المستقرة هو:

$$E[X] = \frac{(1-r_0)r_0}{(1-r_0)^2} \dots\dots(1-40)$$

أو ببساطة:

$$E[X] = \frac{r_0}{1-r_0} \dots\dots(1-41)$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)p_n$ ومن ثم نحصل على تباين حجم المجتمع في

الحالة المستقرة.

1-3- مفهوم صفوف الانتظار:

الانتظار حالة يمر بها معظم الناس ويلاحظها، والتي تصادفنا خلال حياتنا اليومية وبشكل واضح في قطاع الخدمات مثلا، فتراهم في مواقف الباصات أو أمام شبائك الحجز وكذلك الصفوف عند الصراف الآلي في بنك أو صفوف السيارات عند الإشارة الضوئية أو انتظار المسافرين في المطار والموانئ ومحطات القطار وكذلك الطائرات وهي تحوم في الجو انتظارا للهبوط . وكذلك في مراكز توزيع البريد حيث الرزم والرسائل المكدسة¹

و يطلق على المعرفة الخاصة بخطوط الانتظار **Waiting Lines** اسم نظرية الصفوف **Queuing Theory** والتي تمثل أحد الأدوات الهامة في تخطيط ومراقبة العمليات الإنتاجية والمستخدمه على نطاق واسع في هذا المجال ومن الأمثلة على المشكلات التي يحتاج فيها متخذ القرار إلى الاستعانة بنظرية الصفوف مشكلة انتظار السيارات للإصلاح والصيانة في محطة الخدمة، مشكلة المكتب الذي ينتظر دورها في الطباعة في المطبعة .. إلخ ، مشكلة الآلات التي تنتظر دورها في الصيانة الوقائية أو الإجراءات في مصنع ما².

إذن نظرية صفوف الانتظار تعتبر ذات أهمية خاصة في تحليل أوقات الانتظار الغير مرغوب فيه بالنسبة إلى الزبون ، لأنه يرغب بإنجاز عمله والمغادرة سريعا، وكذلك النظر إلى الجانب الآخر (الكلف) أي التكاليف الناجمة عن الانتظار والتشغيل، مثلا إذا كان عدد الزبائن في صفوف طويلة في بنك ما، فان المدير يعالجه بفتح خط إضافي (شباك) لتقدم خدمة جديدة ولكن ذلك يؤدي لتكاليف إضافية ، إذا على المدير الموازنة بين الجانبين عند المعالجة .

تهدف نظرية صفوف الانتظار والتي يكون فيها الانتظار على شكل صف إلى تحديد الفترة الزمنية للانتظار على المدى البعيد وجعل الفترة أقل ما يمكن. وكذلك تحويل فترة الانتظار إلى مقياس مادي وهي تكلفة الانتظار ودراسة أسلوب الموازنة بين تكلفة الانتظار وتكلفة اتخاذ القرار لتقليل وقت الانتظار.

يتضمن الحل لمسألة صفوف الانتظار وبشكل عام الأمور التالية :

1- تحليل مسبق للمنظومة ؛

2- فحص نماذج الوصول و أوقات الخدمة ؛

¹ سهيلة عبدالله سعيد، الجديدي في الأساليب الكمية و بحوث العمليات، دار الراجية للنشر و التوزيع، عمان 2007، ص:337

² اسماعيل السيد، الأساليب الكمية في الإدارة، الدار لجامعة، الإسكندرية، 2003، ص425

3- وضع مقاييس لأداء وكفاءة المنظومة .

ويمكن حل بعض الحالات باستخدام مجموعة من المعادلات التي تتحكم بحركة المنظومة والحصول كلى حلول واضحة ومحددة ولكن تظهر أحيانا بعض الحالات المعقدة يتطلب حلها إجراء دراسة محاكاة لها.

1-3-1. تعريف صفوف الانتظار:

يعود أصل نظرية صفوف الانتظار إلى عام 1909 حيث قام **A.K.Erlang** بإجراء تجارب على مشكلة كثرة المكالمات الهاتفية ، وتعرض طالبي هذه المكالمات إلى التأخير لعجز عاملات الهاتف عن تنفيذ الطلبات الواردة بالسرعة المطلوبة.

وتبرز أهمية دراسة الحالات في صفوف الانتظار عندما:

1. يكون هناك طلب كبير على الخدمة المقدمة، وأن عدد قنوات الخدمة أقل من المطلوب؛

2. يكون الطلب قليل على الخدمة المقدمة، و أن عدد قنوات الخدمة أقل من المطلوب.

ففي الحالة الأولى، تتم دراسة تحديد عدد قنوات الخدمة الملائم بحيث يتم تقليل الزمن المرتبط بتأخير الوحدات الطالبة للخدمة.

أما في الحالة الثانية، فتتم معالجة المشكلة لغرض تقليل عدد قنوات الخدمة لتفادي الوضع الضائع.

و بالتالي فان هدف نظرية صفوف الانتظار هو جعل:

(تكلفة الطاقة العاملة +تكلفة الانتظار) أقل ما يمكن.

ومن الأمثلة على حالات الانتظار في الخدمات المختلفة :

طبيعة الخدمة	الوحدات الطالبة للخدمة	مراكز تأدية الخدمة
بيع البترين	السيارات	عدد المحطات
هبوط الطائرات	الطائرات	الممرات الأرضية في المطارات
علاج المرضى	المرضى	عدد الأسرة في المشافي

جدول 1-2: بعض حالات صفوف الانتظار

المصدر: عبد المجيد البلداوي، عبد الله الحميدي، مرجع سبق ذكره، ص 131

ومما تقدم يمكن تعريف نظرية صفوف الانتظار على أنها :

"دراسة العمليات التي تتميز بالوصول العشوائي **Random Arrival**، و أن الخدمة هي بدورها عملية عشوائية تتم بموجب فواصل زمنية عشوائية"¹.

1-3-2. خصائص نظام صفوف الانتظار²

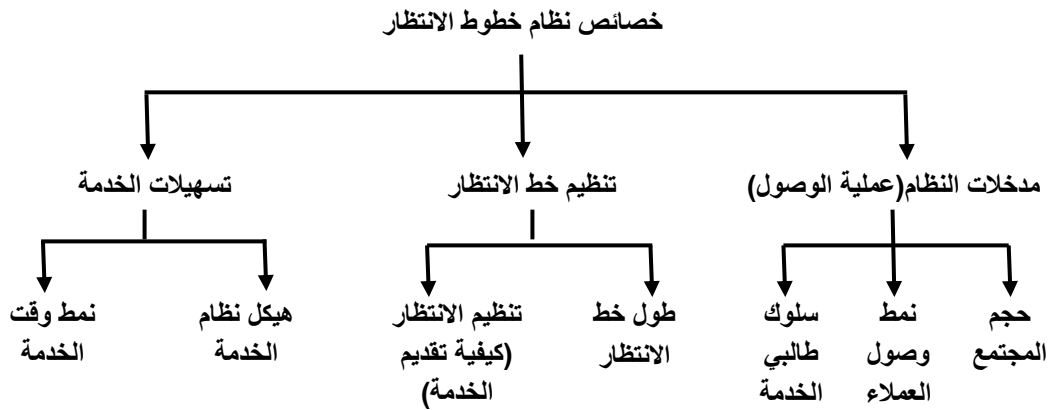
يتطلب عرض خصائص نظام خطوط الانتظار ، التركيز على ثلاثة أجزاء أو مكونات لخط الانتظار وهي:

1. مدخلات النظام أو ما يطلق عليه عملية الوصول **Arrival**؛

2. خط الانتظار، أو ما يطلق عليه تنظيم الصفوف **Queue Dicipline**؛

3. تسهيلات الخدمة.

حيث ينبغي في البداية عرض الخصائص المحددة لكل مكون من المكونات الثلاثة السابقة، قبل تطوير أي نماذج رياضية لخطوط الانتظار.



الشكل (1-9) : مخطط يبين خصائص صفوف الانتظار

المصدر: جلال إبراهيم العبد، استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، دار الجامعة للنشر، الإسكندرية، 2004، ص 432

¹ عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، نجم عبدالله الحميدي، الأساليب الكمية التطبيقية في إدارة الأعمال، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، 2008، ص 132

² اسماعيل السيد، الأساليب الكمية في الإدارة، الدار لجامعة، الإسكندرية، 2003، ص 425

1. خصائص عملية الوصول¹:

- يقصد بالوصول ورود الوحدات (العملاء) التي تطلب الخدمة إلى مقدم الخدمة، وفي هذا الشأن يوجد ثلاثة خصائص لعملية الورد وهي:
- حجم المجتمع الذي يطلب الخدمة ؛
 - شكل أو نمط وصول العملاء (طالبي الخدمة)؛
 - وأخيرا سلوك طالبي الخدمة للحصول على الخدمة أو الخدمات .

أ- حجم المجتمع الذي يطلب الخدمة

إما أن يكون المجتمع الذي يطلب الخدمة غير محدود (لا نهائي **infinite**) أو محدود **finite**، وعندما يكون عدد العملاء (طالبي الخدمة) في لحظة معينة يمثل جزءا صغيرا من طالبي الخدمة. فإنه يطلق على حجم المجتمع في هذه الحالة بأنه مجتمع غير محدود. مثال عن ذلك يمثل عدد السيارات في لحظة معينة والتي تتطلب التزود بالبترين في محطة على الطريق السريع جزءا من مجتمع غير محدود. وتبني معظم نماذج الصفوف على هذه الخاصية (خاصية المجتمع الغير محدود). و من الأمثلة على المجتمع المحدود مكتب لكتابه الرسائل العلمية به ثلاث أجهزة كمبيوتر، فعندما تحدث بعض الأعطال لجهاز من هذه الأجهزة، فإن رجل الصيانة (مقدم الخدمة) أو مندوب الصيانة ينظر إلى مكتب على أنه مجتمع محدود.

ب- نمط وصول العملاء

قد يكون وصول العملاء(طالبي الخدمة) إلى محطة الخدمة وفقا لجدول زمني معرف ومحدد، و يعتبر وصول العملاء¹(متلقي الخدمة) عشوائيا عندما يكون كل عميل مستقل عن العملاء الآخرين، كما لا يمكن التنبؤ بحدوث عملية الوصول لمتلقي الخدمة. و ترتيبا على ذلك فان عدد العملاء (متلقي الخدمة) لكل وحدة من الزمن يمكن تقديرها، باستخدام خصائص توزيع "بواسون" ومن ثم فإن معدل الوصول (مثل 3 عملاء كل ساعة، أو 5 سيارات كل 30 دقيقة) يمكن تحديده باستخدام توزيع "بواسون" من خلال المعادلة الآتية :

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \dots(1-42)$$

¹ اسماعيل السيد، مرجع سبق ذكره، ص 427

ويمكن استخدام جدول توزيع بواسون للقيام بالعمليات الحسابية للمعادلة السابقة .

ج- سلوك طالبي الخدمة

تفترض معظم نماذج الصفوف أن متلقي (طالب) الخدمة عندما يصل سوف ينتظر **patient** (**customer**) حتى يتلقى الخدمة ولن يقوم بتغيير محطة الخدمة أو الصف الذي وصل إليه. ولسوء الحظ فإن الواقع يشير إلى كثير من الحالات التي يرفض فيه العميل (متلقي) الخدمة الانضمام لصف الانتظار، ذلك لان طول الصف لن يحقق له احتياجاته ورغباته من تلقي الخدمة بشكل أو آخر في وقت معين ، ويطلق علي العميل في هذه الحالة "العميل الذي يتوقف فجأة عن إتمام تلقي الخدمة **balk customer** وفي بعض الحالات الأخرى قد يرتد العميل ويغادر الصف قبل تلقي الخدمة ويطلق على العميل في هذه الحالة

.Reneging Customer

2. خصائص خط الانتظار:

يمثل خط الانتظار الجزء الثاني في نظام الصفوف و يمثل طول الخط الخاصية الأولى فقد يكون طول الخط محدود أو غير محدود. ويكون خط الانتظار محدود عندما لا يكون في الإمكان (نظرا لوجود لوائح، أو محددات مادية) جعل خط الانتظار غير محدود. مثال ذلك صالون الحلاقة، أو كوافير السيدات (نظرا لوجود محددات مادية متمثلة في عدد المقاعد المتاحة). وسوف نناقش فقط حالة الصفوف غير المحدودة في هذا الفصل مثل حالة السيارات التي تتلقى خدمة التزود بالبتزين من أحد محطات الخدمة على الطريق سريع.

أما الخاصية الثانية لخط الانتظار فتتمثل في تنظيم الخط، أو كيفية تقديم الخدمة للعملاء بالصف. ومعظم نماذج خطوط الانتظار تقوم على أساس قاعدة العميل الذي يرد أولا يخدم أولا **Fcfs**.

3. خصائص تسهيلات الخدمة:

هناك عدة طرق لتقديم الخدمة منها:

- من يأتي أولا تقدم له الخدمة أولا (First –Come First Serviced (FcFs)
- من يأتي أخيرا تقدم له الخدمة أولا (Last Come First Serviced (LcFs)

- القاعدة العشوائية (Service In Random Order(SIRO)؛
- قاعدة الأسبقية (Service On Priopity (SOP).

ويمكن القول أن وصول طالب الخدمة إلى طاور غير منظم حالة القاعدة العشوائية و حصول المريض على الأسرة حسب الحالة المرضية بقاعدة الأسبقية¹.

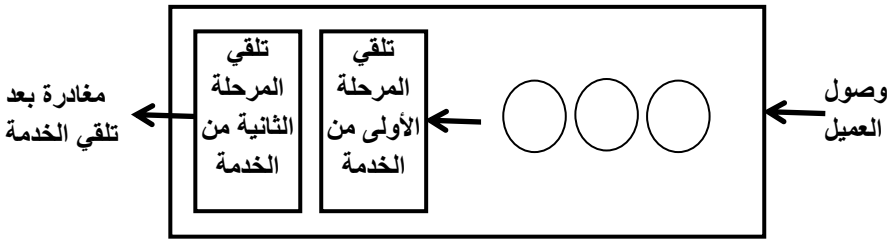
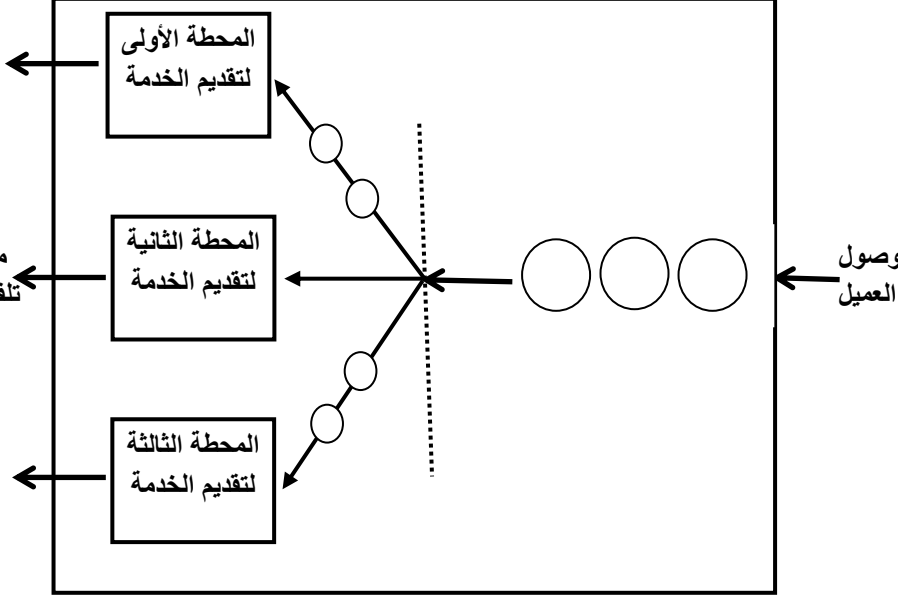
و تمثل خصائص تسهيلات الخدمة المكون الثالث في نظام الصفوف، و في هذا الشأن سوف نناقش خاصيتين لكل درجة عالية من الأهمية، و هما ترتيب أو هيئة نظام الخدمة **configuration** . و طبيعة أو نمط وقت الخدمة:

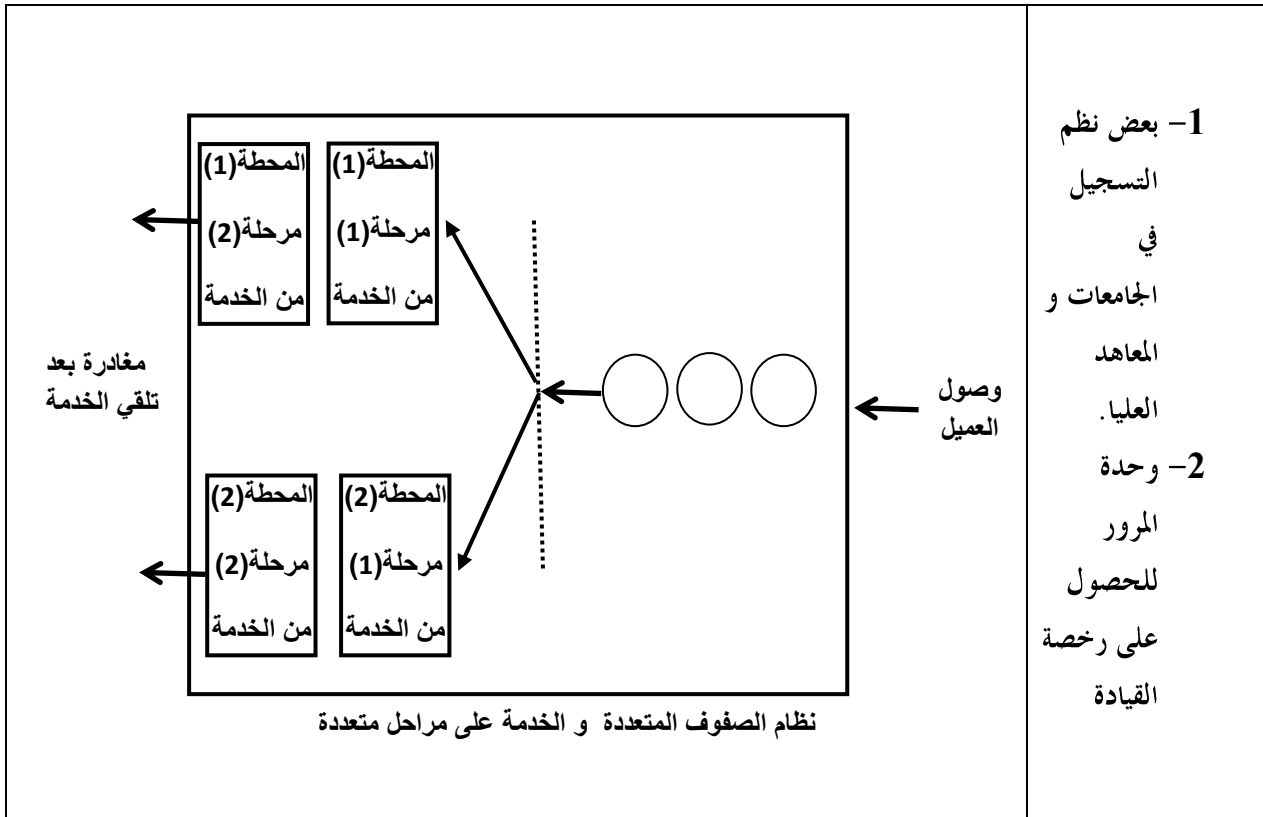
أ- هيكل نظام الخدمة:

يتم تصنيف أنظمة الخدمة عادة وفقا لعدد القنوات التي تقدم الخدمة (عدد محطات الخدمة) و عدد المراحل (عدد مرات التوقف) و في هذا الشأن يمكن التفريق بين أربعة أشكال لخط الانتظار كما يوضح ذلك الشكل رقم (1-10)

النموذج	مثال
<p>نظام الصف الواحد و الخدمة ذات المرحلة الواحدة</p>	<p>العيادة الخاصة لطبيب الأسنان</p>

¹ عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، نجم عبدالله الحميدي، الاساليب الكمية التطبيقية في ادارة الاعمال، الطبعة الاولى، دار وائل للنشر، عمان، 2008، ص.132

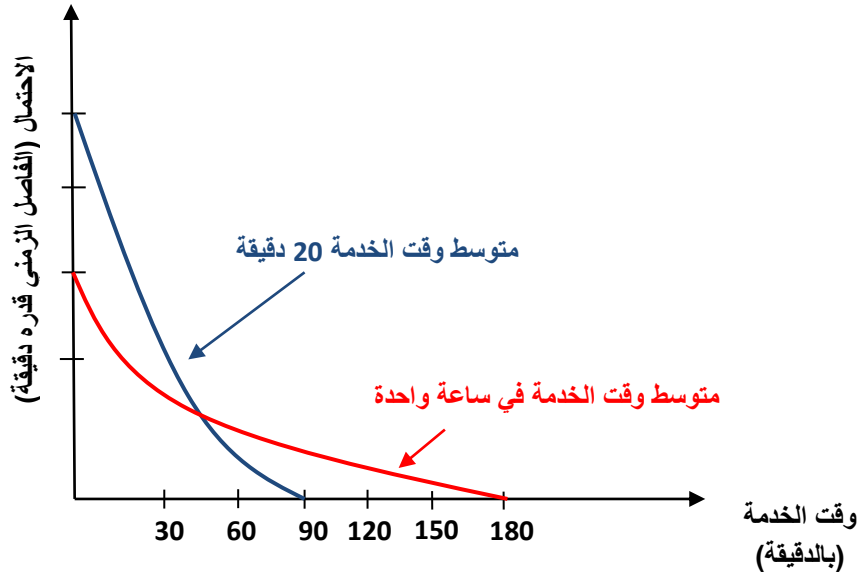
 <p>المطاعم</p> <p>وصول العميل</p> <p>تلقى المرحلة الأولى من الخدمة</p> <p>تلقى المرحلة الثانية من الخدمة</p> <p>مغادرة بعد تلقي الخدمة</p> <p>نظام الصف الواحد و الخدمة على عدة مراحل</p>	
 <p>منافذ البنوك و خدمات البريد</p> <p>وصول العميل</p> <p>المحطة الأولى لتقديم الخدمة</p> <p>المحطة الثانية لتقديم الخدمة</p> <p>المحطة الثالثة لتقديم الخدمة</p> <p>مغادرة بعد تلقي الخدمة</p> <p>نظام الصفوف المتعددة و الخدمة على مرحلة واحدة</p>	



الشكل 1-10: الهياكل الأساسية لنظام صفوف الانتظار
المصدر: اسماعيل السيد، جلال العبد، مرجع سبق ذكره، 431

ب- نمط وقت الخدمة:

يشبه نمط الخدمة نمط الوصول فكلاهما إما أن يكون محدد أو عشوائي، فإذا كان وقت الخدمة ثابت، فمعنى ذلك أن كل عميل (متلقي الخدمة) سوف يحصل عليها في وقت محدد (مثال ذلك الغسيل الآلي للسيارة). وفي حالات أخرى يكون وقت الخدمة عشوائي ولذلك يمكن استخدام التوزيع الاحتمالي الآسي السالب **Negative Exponential Probability Distribution** خاصة عندما يكون متوسط معدل الوصول يتبع توزيع "بواسون" ويوضح الشكل رقم (1-11) أن نمط وقت الخدمة يتبع التوزيع الآسي. حيث يظهر أن احتمال أن يكون وقت أداء الخدمة طويل جدا سوف يكون منخفضا للغاية. فمثلا إذا كان متوسط وقت الخدمة هو 20 دقيقة، فنادرا ما يحتاج العميل إلى وقت يبلغ 90 دقيقة لأداء الخدمة. ومن المؤكد أن يبلغ احتمال الوقت المنقضي لأداء هذه الخدمة في أكثر من 180 دقيقة صفرا.



الشكل رقم 1-11: نمط وقت الخدمة
المصدر: جلال ابراهيم العبد، مرجع سبق ذكره، ص 429

3-3-1. أسس نظرية صفوف الانتظار:

1- معدل الوصول: Raye Of Arrival

و هو عدد الوحدات القادمة لطلب الخدمة خلال وحدة زمنية كالساعة أو اليوم أو الأسبوع أو الشهر ، و بما أن طريقة الوصول تختلف بين طالبي الخدمة و حسب طبيعة النشاط ، فمنهم من يأتي بطريقة عشوائية و منهم من يأتي بنظام معين ، وعادة ما يفضل حساب المعدل خلال وحدة زمنية معينة ، و كذلك إجراء الحساب لوحدة زمنية ثانية ليتأتى تحديد هذا المعدل طبقا لواقع الملاحظة الفعلية خلال مدة زمنية طويلة (قد تتكرر عمليات الحساب عدة مرات).

إن توزيع معدلات الوصول λ و الذي يمثل المدخلات يأخذ شكل التوزيع الاحتمالي لبواسون و

صيغته :

$$P(X) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^x}{X!} \dots \dots \dots (1 - 43)$$

حيث:

$$X = 0,1,2, \dots, \infty$$

$$e = 2.71828 \text{ قيمة ثابتة.}$$

$$\mu = np \quad , \quad \sigma = \sqrt{np} = \sqrt{\mu}$$

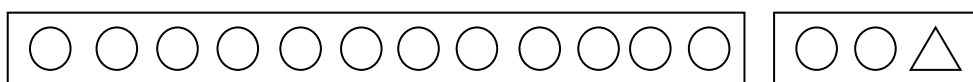
μ : معدل المغادرة.

2- معدل تأدية (تقديم) الخدمة: rate of service

- و يتمثل بمتوسط عدد الوحدات التي يقوم مركز الخدمة بتقديم الخدمة لها خلال وحدة زمنية معينة ، كالساعة أو اليوم أو الأسبوع أو الشهر ، ويتأثر هذا المعدل بعوامل مختلفة أهمها:
- تحديد حجم مراكز تأدية الخدمة وإمكانية تشغيل مراكز إضافية؛
 - إعادة تنظيم طريقة الخدمة لزيادة المعدل، بما في ذلك تجديد المعدات أو استبدالها بأخرى؛
 - جدولة خدمة الوحدات القادمة، من خلال تخفيض الوقت الضائع والطاقات العاطلة إلى أدنى حد ممكن؛
 - معالجة الوحدات القادمة التي تتطلب وقتاً أطول أو أكثر من متوسط ما تحتاجه بقية الوحدات الواردة بغية عدم تعطيل العمل في مراكز الخدمات الأخرى. وإن معالجة ظاهرة الانتظار يمكن النظر إليها من خلال:

أ- حالة نظام تقديم الخدمة من مركز واحد: $M/M/1$

يتكون الطابور عندما ينتظم عدد من الوحدات (أشخاص آليات. الخ) في وقت معين انتظاراً للحصول على الخدمة كما في الشكل التالي:



الطابور

مركز تقديم الخدمة

المصدر: عبد المجيد البلداوي، عبدالله الحميدي، مرجع سبق ذكره، ص134

ونلاحظ من الشكل أن النظام يتكون من عدد الوحدات التي تتلقى الخدمة زائد الوحدات المجتمعية التي تكون الطابور، وصيغة العلاقة الرياضية في هذه الحالة تأخذ الصيغة التالية:

1- احتمال أن يكون مقدم الخدمة مشغولاً : $P = \frac{\lambda}{\mu}$ (معامل الاستخدام)؛

2- احتمال عدم وجود وحدة في النظام : $P_0 = 1 - P$ ؛

3- احتمال وجود عدد من الوحدات (n) في النظام (الوحدات التي تتلقى الخدمة + الوحدات المتجمعة

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n . P_0 \text{ : في الطابور}$$

4- متوسط عدد الوحدات في النظام $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

5- متوسط عدد الوحدات في الطابور $L_q = \frac{(\lambda)^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

6- متوسط الوقت الذي تمضيه وحدة واحدة في النظام $T = \frac{1}{\mu - \lambda}$

7- متوسط الوقت الذي تمضيه وحدة واحدة في الطابور $(T)_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$

ب- في حالة نظام متعدد القنوات :

إن الوحدة في هذا النظام ستدخل لأية محطة (قناة) غير مشغولة ، ويتكون الطابور عندما يصبح عدد الوحدات المدخلة (n) إلى النظام أكبر من مدد القنوات S.

ويتصف هذا النظام بالخصائص التالية :

أ- وجود أكثر من قناة واحدة لتقديم الخدمة؛

ب- معدل الوصول λ أقل من معدل تقديم الخدمة μ مضروباً بعدد قنوات تقديم الخدمة S

$$s \cdot \mu > \lambda$$

ج- حالة التوازن في هذا النظام تكون عندما يكون معدل الوصول λ أقل من μ . (أي $s \cdot \mu > \lambda$) .

وإن العلاقات الرياضية الخاصة بتعدد القنوات هي ¹ :

¹ عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، نجم عبدالله الحميدي، مرجع سبق ذكره، ص 139.

1. احتمال التعطل في قنوات تقديم الخدمة :

$$P_0 = \frac{1}{\left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{S!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{(S-1)!} \times \frac{\mu}{S\mu-1} \right]} \dots\dots\dots(1-44)$$

وبالإمكان استخدام قيمة P_0 من الجدول بدلالة $S, \frac{\lambda}{\mu}$ (توزيع بواسون) .

2. احتمال وجود (n) في الوحدات في النظام :

في حالة $n > S$ فإن :

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{S! S^{n-s}} \times P_0 \dots\dots\dots(1-45)$$

في حالة $n \leq S$ فإن :

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \times P_0 \dots\dots\dots(1-46)$$

3. متوسط عدد الوحدات المتوقعة في الطابور:

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \lambda \mu}{(S-1)!(S\mu-\lambda)^2} \times P_0 \dots\dots\dots(1-47)$$

4. متوسط عدد الوحدات المتوقعة في النظام:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \dots\dots\dots(1-48)$$

5. متوسط الوقت الذي تمضيه الوحدة في الطابور :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \dots\dots\dots(1-49)$$

6. متوسط الوقت الذي تمضيه الوحدة في النظام:

$$W = W_q \frac{1}{\mu} \dots\dots\dots(1-50)$$

إن معالجة ظاهرة صفوف الانتظار يمكن النظر إليها من خلال¹:

1. مقدم خدمة واحد M/M/1

2. اكثر من مقدم خدمة M/M/s

3. معالجة ارتفاع التكاليف

1-3-4. ترميز كندل²:

لقد تم استعمال ترميز الذي قام كندل بوضعه من طرف العديد من المؤلفين حول نظرية صفوف الانتظار، و هو يسمح بكتابة الوصف النصي لمختلف العناصر التي تشكل صف انتظار بسيط على شكل صيغة رمزية .

بصفة عامة، فإن النموذج يكون ممثلا بسلسلة متكونة من ستة رموز:

A/S/m/K/P-D

حيث أن :

- A : طبيعة عملية الوصول ؛
- S : طبيعة عملية تقديم الخدمة ؛

¹ عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، المدخل لبحوث العمليات، دار وائل للنشر، عمان، 2001، ص 273

² jean Francois Heche, op.cit, p 111

- m : عدد مراكز الخدمة؛
- K : قدرة الاستيعاب للصف؛
- P : حجم السكان (العينة)؛
- D : نظام الصف.

في الصيغة المبسطة ، فإننا نستعمل فقط الرموز الثلاث الأولى : $A/S/m$ ، و في هذه الحالة فإننا نفترض أن صف الانتظار يتميز بنظام **FIFO** (أو النظام المستعمل غير مأخوذ بعين الاعتبار) ، و أن عدد أماكن الانتظار و أيضا عدد الزبائن المحتمل وصولهم إلى النظام هو غير محدود.

مثلا، فان صف $M/E2/2$ تمثل نظام يحتوي على مركزين للخدمة ، و الذي يستقبل زبائنه من خلال عملية تتبع توزيع بواسون و يقدم خدمات تكون فتراتها موزعة حسب قانون **Erlang** من الدرجة الثالثة.

ليس هناك أي تحديد لعدد الزبائن المحتمل وصولهم إلى النظام أو للعدد الأقصى للزبائن الذي من الممكن أن يتواجدوا في النظام في نفس الوقت، و يفترض أن يكون ترتيب تقديم الخدمة للزبائن حسب وقت وصولهم.

كمثال آخر ، فان نظام **M/M/1/10/∞-SIRO** أو بصيغة بسيطة **M/M/1/10-SIRO** عبارة عن نمذجة لمركز خدمة يخدم زبون واحد فقط خلال فترة زمنية تتبع قانون أسي، و تتلقى زبائنه من مصدر خارجي ذو قدرة غير محدودة حيث يتبع قانون بواسون ، لكن لا يمكن أن يستقبل إلا 10 زبائن كحد أقصى (مع احتساب الزبون في طور الخدمة)، كما أن اختيار الزبون التالي لخدمته يكون بالصدفة .

1-3-5. صيغة ليتل¹ : la formule de Little

تعتبر صيغة **Little** من أهم نتائج نظرية صفوف الانتظار، وذلك من ناحية بساطتها و عموميتها. تحتوي هذه النظرية على عدة تطبيقات ، حيث تعتبر من ناحية الأهمية بالنسبة لصفوف الانتظار كقانون أوم في الكهرباء أو قانون هوك في المرونة.

1. ¹ AndreasWillig ,A Short Introduction to Queueing Theory ,Telecommunication Networks Group,Sekr.,Berlin,1999,p06

إن صيغة Little لا تتحقق إلا في حالة وجود نظام مستقر، الذي يتميز بتوازن تصادفي (Equilibre Stochastique) و توزيع استقراري.

نظرية¹: (صيغة Little)

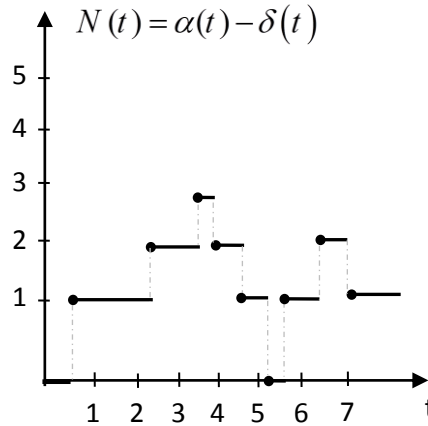
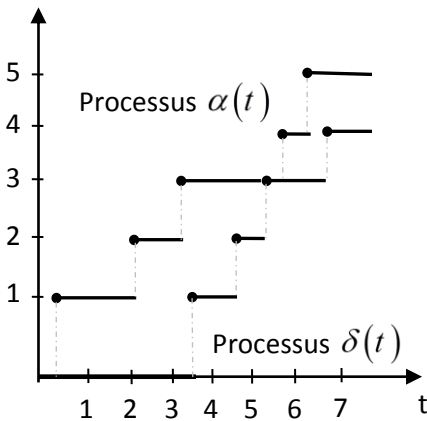
ليكن نظام ذو توزيع مستقر، إذن:

$$\bar{N} = \lambda \bar{T} \quad (1-51)$$

حيث:

- \bar{N} : هو العدد المتوسط للزبائن في النظام؛
- λ : هو المعدل المتوسط لوصول الزبائن إلى النظام؛
- \bar{T} : هو الفترة المتوسطة لبقاء الزبون في النظام.

لنفرض وجود نظام فارغ في اللحظة 0 (يعتبر عموما ممكنا، طالما أن النظام يكون مستقر)، و نقوم بملاحظة العمليتين $\alpha(t)$ و $\delta(t)$ المتمثلتين في عدد الزبائن الواصلين و المغادرين للنظام على الترتيب و ذلك في الفترة $[0, t)$ (انظر الشكل (1-12))



الشكل 1-12: منحنى يمثل عملية الوصول $\alpha(t)$ و عملية المغادرة $\delta(t)$ و ايضا عملية التعداد $N(t) = \alpha(t) - \delta(t)$
المصدر: jean francois heche, op.cit, p111

¹ jean francois heche, op.cit, p110

عدد الزبائن في النظام في اللحظة t هو:

$$N(t) = \alpha(t) - \delta(t) \quad (1-52)$$

و الزمن الكلي الذي يقضيه الزبائن في النظام حتى اللحظة t هو:

$$\gamma(t) = \int_0^t N(s) ds \quad (1-53)$$

أما الزمن المتوسط لبقاء زبون في النظام خلال الفترة $[0, t]$ يساوي:

$$\bar{T}(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} \quad (1-54)$$

أما العدد المتوسط للزبائن في النظام خلال نفس الفترة هو:

$$\bar{N}(t) = \frac{\gamma(t)}{t} \quad (1-55)$$

المعدل المتوسط لوصول الزبائن خلال الفترة $[0, t]$ يكون:

$$\bar{\gamma}(t) = \frac{\alpha(t)}{t} \quad (1-56)$$

بدمج المعادلات (1-54)، (1-55)، و (1-56) نجد:

$$\bar{N}(t) = \lambda(t) \bar{T}(t) \quad (1-57)$$

ملاحظة: إن العلاقات السابقة هي صالحة و مقبولة مهما يكن نوع نظام صفوف الانتظار .

عندما يؤول t إلى ما لا نهاية ، و بما أن النظام متوازن فهو إذن مستقر و الاحتمالات :

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{T}(t) \\ \bar{N} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{N}(t) \\ \lambda &= \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \end{aligned} \quad (1.58)$$

تكون موجودة، وانطلاقاً من العلاقة (1-57) وعندما يؤول t إلى ∞ ، سنجد أن :

$$\bar{N} = \lambda \bar{T} \quad (1-59) \text{ (صيغة Little)}$$

كمثال على ذلك ، قام مدير مركز تجاري بدراسة إحصائية بينت أنه خلال أسبوع كان هناك في المتوسط 80 زبون في المركز التجاري ، و أن وتيرة وصول الزبائن وصلت إلى 120 فرد في الساعة . انطلاقاً من هذه الإحصائيات ، فمن السهل حساب الزمن المتوسط الذي يقضيه الزبون داخل المركز التجاري ، فباستخراج \bar{T} من صيغة Little ، نجد :

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3} [h] = 40 [\text{min}]$$

1-3-6. النماذج المختلفة لصفوف الانتظار¹

يوجد العديد من نماذج صفوف الانتظار المستخدمة في مجال إدارة العمليات وسوف نقتصر في هذا الفصل على أربعة نماذج أساسية وهي أكثر النماذج شيوعاً.

وسوف نتعرض لبعض نماذج صفوف الانتظار الأكثر تعقيداً في الفصل الثاني، ويلاحظ أن النماذج الأربعة الموضحة في جدول رقم (1-3) تتصف بشكل عام بالخصائص الآتية:

1. عملية وصول العملاء لتلقى الخدمة تتبع توزيع بواسون ؛
2. تقديم الخدمة للعملاء يتم وفقاً للقاعدة الوارد أولاً يُخدم أولاً (FIFO)؛
3. تتم الخدمة على مرحلة واحدة.

¹ اسماعيل السيد، الأساليب الكمية في الإدارة،الدار لجامعية،الإيكندرية،2003،ص 425

الفصل الأول: مفهوم صفوف الانتظار و الأسس النظرية

النموذج	اسم النموذج	مثال	عدد الصفوف	عدد المراحل	نمط الوصول	نمط وقت الخدمة	حجم المجتمع	طبيعة الخدمة
أ	النموذج البسيط (M/M/1)	محصل النقدية في محل التجزئة موظف	واحد	مرحلة واحدة	توزيع بواسون	توزيع أسّي	غير محدود	الوارد أولاً يخدم أولاً
ب	نموذج المراكز الخدمة المتعددة (M/M/S)	الحجز في شركة الطيران محطة	عدة صفوف	مرحلة واحدة	توزيع بواسون	توزيع أسّي	غير محدود	الوارد أولاً يخدم أولاً
ج	نموذج مركز الخدمة الثابت (المحدود) (M/D/1)	الغسيل الآلي للسيارات محل به اثنا عشر آلة	واحد	مرحلة واحدة	توزيع بواسون	ثابت	غير محدود	الوارد أولاً يخدم أولاً
د	نموذج المجتمع المحدود	من الممكن أن تتعطل إحداها	واحد	مرحلة واحدة	توزيع بواسون	توزيع أسّي	محدود	الوارد أولاً يخدم أولاً

جدول (1-3) وصف لبعض نماذج صفوف الانتظار
المصدر: إسماعيل السيد، مرجع سبق ذكره، ص 434

يضاف إلي ذلك أن نظام أداء الخدمة في النماذج الأربعة تعمل في ظل استقرار و استمرارية الظروف، وهو ما يعني أن عملية الوصول ومعدل الخدمة يظلان مستقران أثناء التحليل.

• النموذج الأول: نموذج الصف الواحد:

- في ظل هذا النوع، يتم وصول العملاء (متلقي الخدمة) في صف واحد حيث يتلقى هؤلاء العملاء الخدمة من محطة خدمة واحدة، ويفترض توافر بعض الشروط في هذا النظام:
1. يتم خدمة العملاء وفقا لقاعدة الوارد أولا يخدم أولا، كما يفترض أيضا أن كل عميل يصل سوف ينتظر حتى يتلقى الخدمة بغض النظر عن طول الخط أو الصف؛
 2. عملية وصول العملاء (متلقوا الخدمة) مستقلة بعضها عن بعض، ولكن متوسط معدل الوصول ثابت لا يتغير عبر الوقت ؛
 3. يتم وصف عملية الوصول باستخدام توزيع بواسون وكذلك فان الوحدات التي تتلقى الخدمة تأتي من مجتمع غير محدود أو كبير للغاية؛
 4. يختلف وقت أداء الخدمة من عميل لآخر، غير أن متوسط معدل الخدمة للعملاء معروف ومحدد؛
 5. وقت الخدمة يتبع التوزيع الاحتمالي الآسي السالب ؛
 6. معدل الخدمة أسرع من معدل الوصول.

• النموذج الثاني: نموذج مرتكز الخدمة المتعددة **Multiple Channel Queuing**

:Model MCQM

في ظل هذا النظام يوجد أكثر من مركز خدمة أو محطة لخدمة العملاء حيث يقف العملاء في صف واحد، ثم يتجه العميل إلى مركز الخدمة المتاح لتلقي الخدمة وحيث تتم الخدمة على مرحلة واحدة. مثل هذا النظام يوجد في العديد من البنوك اليوم .

وسوف نفترض أن نموذج مراكز الخدمة المتعددة الذي نعرض له هنا يتبع توزيع "بواسون" كما أن وقت الخدمة تتبع التوزيع الآسي ، كما أن العميل الذي يأتي أولا سوف يتم خدمته أولا، وأن معدل الخدمة واحد لجميع العملاء، بالإضافة إلى الافتراضات الأخرى التي ذكرناها في النموذج الأول ، وسوف نوضح فيما يلي المعادلات التي تحدد خصائص التشغيل لهذا النظام .

• النموذج الثالث: نموذج الخدمة ذات الوقت الثابت: constant service time model

تتصف بعض نظم الخدمة بان وقت أداء الخدمة ثابت ، و المثال على ذلك محطة الغسيل الآلي للسيارات ، و طالما أن وقت أداء الخدمة ثابت ، فإن كل من قيم : متوسط عدد الوحدات في الصف، متوسط الوقت الذي تقضيه الوحدة في الصف انتظارا لتلقي الخدمة، متوسط عدد العملاء في النظام و متوسط الوقت الذي تقضيه الوحدة في النظام عادة ما تكون اقل من مثيلتها في النموذج الأول .

• النموذج الرابع: نموذج المجتمع المحدود:

عندما يتصف المجتمع الذي سوف يتلقى الخدمة بأنه محدود ، فإننا نحتاج إلى نموذج مختلف لمعالجة مشاكل صفوف الانتظار، و من الأمثلة على هذا المجتمع ، عملية صيانة المعدات في احد المصانع ، فالمعدات في المصنع تمثل مجتمعا محدودا ، أما أسباب اختلاف نموذج صفوف الانتظار في حالة المجتمع المحدود عن النماذج التي سبق عرضها، فيرجع ذلك إلى العلاقة الاعتمادية بين طول الصف و معدل الوصول ، و لتوضيح ذلك ، افترض أن المصنع يتكون من خمسة آلات و كلها تعرضت للأعطال و تنتظر الصيانة فان معدل الوصول سوف يصبح في هذه الحالة صفرا .

7-3-1. تحليل الآثار الاقتصادية لصف الانتظار:

بعد تحديد خصائص التشغيل للنظام يكون من المهم تحليل آثارها الاقتصادية، إذ من الممكن استخدام الخصائص السابقة في التنبؤ بالأزمة المتوقعة، وطول الصفوف، والوقت العاطل، وهكذا. و إن كان يصعب تحديد القرارات المثالية وعوامل التكاليف الواجب أخذها في الاعتبار. وكما ذكرنا سلفا، فإن حل مشكلة الصفوف يتطلب من الإدارة عمل مقايضة بين الزيادة في التكاليف المترتبة على تقييم أفضل خدمة، والانخفاض في تكاليف الانتظار الناجمة عن إمداد العميل بهذه الخدمة¹.

وتظهر مشكلة التكاليف وكيفية معالجة تخفيضها بشكل واضح في حالة الطوابير ذات الدخول الدورية المتباينة ، في حين أنها تصبح أيسر في حالة الأعمال النمطية وتقارب الأجور، وفي كلا الحالتين على متخذ

¹ اسماعيل السيد، جلال العبد، مرجع سبق ذكره، ص439

القرار العمل باتجاه تخفيض وقت الانتظار على أن يأخذ الأعباء المالية والتكاليف المترتبة عن التخفيض بالاعتبار.

و يمكن تقسيم تكاليف الانتظار إلى قسمين¹:

أ. تكاليف وقت الانتظار، و تقاس هذه التكاليف من خلال تحديد المدة الزمنية التي يمضيها الزبون في خط الانتظار.

ب. تكاليف تحسين مستوى الخدمة، و هي التكاليف الناتجة عن دعم طاقة مركز الخدمة بموظفين جدد أو بمحطات خدمة إضافية، و نجد أن زيادة مستوى الخدمة يؤدي إلى زيادة تكاليف تقديمها من جهة و إلى تخفيض تكاليف وقت الانتظار من جهة أخرى.

• النموذج الرياضي لحساب التكاليف² : (نموذج القناة الواحدة)

1- التكاليف الكلية الضائعة

$$Tc = Tcn - Tcs \dots \dots \dots (1-60)$$

حيث:

- Tcn التكاليف الضائعة للوحدات المتجمعة في الطابور؛
- Tcs التكاليف مقدمي الخدمة .

$$Tcn = wg_1 \times t \times L_q \dots \dots \dots (1-61)$$

$$Tcs = wg_2 \times t \dots \dots \dots (1-62)$$

حيث: t وحدة الزمن

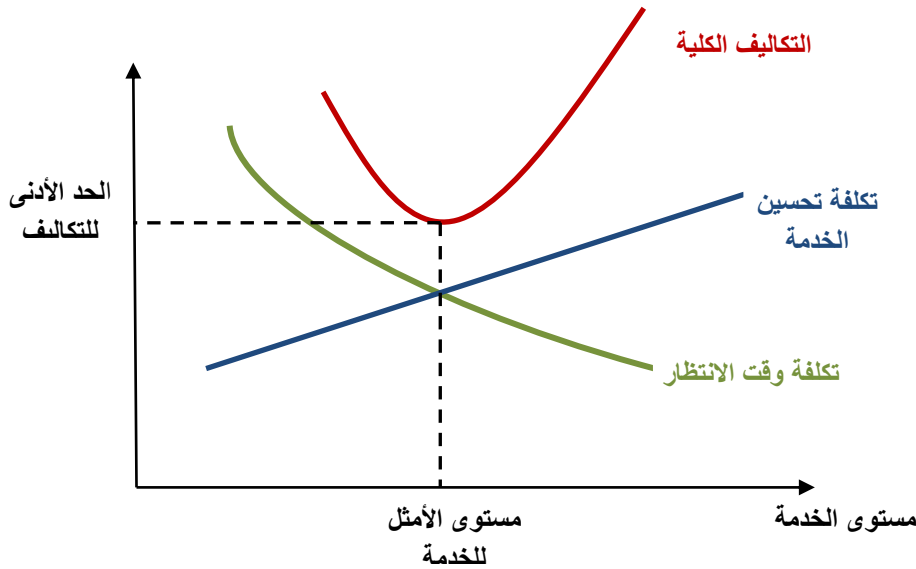
Wg : أجره الوحدة الواحدة في الطابور في الوحدة الزمنية

Wg_2 : أجره الوحدة الواحدة لمقدم الخدمة

¹ علي العلوانة، محمد عبيدات، عبد الكريم عواد، بحوث العمليات في العلوم التجارية، مركز يزيد للنشر، عمان، 2005، ص 323
² عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، نجم عبدالله الحميدي، مرجع سبق ذكره، 138

ويمكن الاستفادة من نظرية صفوف الانتظار في كل من التصنيع وتقديم الخدمات، ويساعد تحليل خطوط الانتظار من خلال تحليل طول خط الإنتاج، ومتوسط وقت الانتظار.. إلى تخمين الأداء والخدمات المقدمة وتدنية التكاليف أيضا.

وفي ظل دراسة خطوط الانتظار، يجب على مدير الإنتاج والعمليات أن يدرك العلاقة بين التكاليف المرتبطة بتقديم خدمة جيدة للعملاء وتكلفة انتظار العميل لتلقى هذه الخدمة ، وعليه أن يدير هذه العلاقة جيدا، وأن يقاوض بين هذين النوعين من التكاليف بالشكل الذي يؤدي إلى تخفيض التكاليف الكلية. حيث من المتوقع - كما يوضح ذلك الشكل رقم (1-13)- زيادة التكاليف المرتبطة بتقديم الخدمة بتحسين مستوى الخدمة المقدمة، في حين من المتوقع أن ينخفض وقت انتظار العميل¹.



الشكل رقم (1-13) منحنى مستوى الخدمة بدلالة تكاليف الخدمة

المصدر: علي العلاونة، محمد عبيدات، عبد الكريم عواد، مرجع سبق ذكره، ص 323

ويهدف مدير الإنتاج والعمليات في الواقع إلى أن يكون خط الانتظار أقصر ما يمكن ، وبالشكل الذي يضمن رضا العميل، ليس هذا فحسب ، بل أيضا يضمن عدم مغادرة العميل دون تلقي الخدمة بل يضمن أخيرا عدم تفكير العميل في أن يتلقى الخدمة هذه المرة وألا يعود ثانية .

¹اسماعيل السيد ،مرجع سبق ذكره،ص 425

الخلاصة:

تمثل نظرية الصفوف أحد الأدوات الهامة في إدارة العمليات، ولقد تناولنا في هذا الفصل معظم النظم الشائعة في نظرية الصفوف، كما ركزنا على النماذج الرياضية اللازمة لتحليل هذه النظم. ولقد تمثلت النماذج التي عرضنا لها في هذا الفصل في نموذج الصف الواحد، ونموذج مراكز الخدمة المتعددة، والنموذج ذو معدل الخدمة الثابت، ونموذج المجتمع المحدود، وكما أوضحنا فإن كل من هذه النماذج تتبع توزيع "بواسون" عند وصول الوحدات طالبة الخدمة، كما أن هذه النظم تدعم خدمة الوحدات التي تصل أولاً.

سنقوم في الفصل الثاني بمعالجة هذه النماذج بالتفصيل، حيث تنقسم هذه النماذج إلى نوعين: ماركوفية وغير ماركوفية، و سيتم عرض المعادلات الرياضية المتعلقة بكل نوع.

الفصل الثاني

نماذج صفوف الانتظار

تمهيد:

لقد تناولنا في الفصل الأول بعض المفاهيم الأساسية حول نظرية صفوف الانتظار و الأسس النظرية التي تركز عليها، كما قمنا بالتطرق إلى بعض نماذج صفوف الانتظار الشهيرة. سنحاول في هذا الفصل إلى تحليل هذه النماذج و ذكر مميزاتا و القيم النموذجية التي تحددتها.

1-2. صفوف الانتظار الماركوفية :

إن إتباع عملية الوصول في صفوف الانتظار بتوزيع بواسون و الخدمة بالتوزيع الآسي يسمح لنا بالاستعمال النماذج الماركوفية لصفوف الانتظار والتي تعتبر سهلة التحليل و ينتج عنها نتائج قابلة للاستعمال.

من الناحية التاريخية، فقد استعملت هذه النماذج في المراحل الأولى لنظرية صفوف الانتظار للمساعدة في اتخاذ القرارات في قطاع المواصلات.

إن العملية الناتجة من تحليل ماركوف و التي تمثل عدد الزبائن في مثل هذه الأنظمة تعرف كعملية ولادة و وفاة، و التي تستعمل في النماذج الديموغرافية . حيث تستعمل مصطلحات ولادة-وفاة لتمثيل ارتفاع أو انخفاض حجم السكان¹.

إن الأحداث المناظرة لذلك في نظام صفوف الانتظار تتمثل في عمليات الوصول و عمليات المغادرة. سنقوم في هذا الفصل بعرض أهم أنواع النماذج الأساسية لنظرية صفوف الانتظار، مع العلم أن كل هذه النماذج هي عبارة عن عمليات ولادة و وفاة.

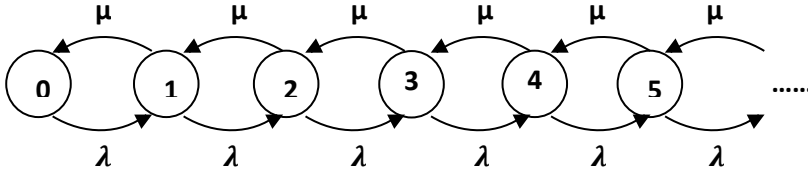
1-1-2. نظام M/M/1 (مركز خدمة واحد)

يعتبر نظام M/M/1 لصفوف الانتظار من أبسط النماذج في الواقع العملي، حيث أن عملية الوصول من المفترض أن تتبع توزيع بواسون بمعدل λ ، هذا يعني أن عدد الزبائن $N(t)$ القادمة أثناء الفاصل الزمني $[0, t]$ تتبع توزيع بواسون:

$$P[N(t) = j] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad \dots(2-1)$$

¹ U. Narayan Bhat, *An Introduction to Queueing Theory-Modeling and Analysis in Applications*, Birkhauser, Boston •Basel •Berlin, 2008, p. 29

إن نظام صفوف الانتظار $M/M/1$ هو نظام تكون فيه عملية وصول الزبائن تتبع توزيع بواسون و فترة الخدمة تتبع توزيع أسي ، حيث أن قدرة النظام غير محدودة و عملية خدمة الزبائن تكون حسب ترتيب وصولهم. و أغلب ظواهر الانتظار في الموانئ تكون حسب هذا النوع من النماذج.



الشكل رقم 1-2 مخطط يمثل صف انتظار $M/M/1$
المصدر: J.F.HECHE , 2003,op.cit. p113

إن نظام $M/M/1$ يشير عادة إلى عملية الولادة و الوفاة حيث أن $N(t)$ يمثل عدد الزبائن في النظام، أي عملية وصول تعتبر ولادة و أي نهاية خدمة تعتبر وفاة.

ليكن $p_n(t)$ احتمال n زبون في النظام في اللحظة t ، و $P_{nn'}$ احتمال التغيير للنظام من

الحالة n إلى الحالة n' في فاصل زمني صغير جدا Δt

ليكن : من أجل $n \geq 0$ ، احتمال عملية ولادة في Δt

من أجل $n \geq 1$ ، احتمال نهاية الخدمة في Δt

و من أجل $n=1$ ، هذا الاحتمال يساوي 0 (لا توجد نهاية الخدمة عندما لا يوجد الزبائن في

النظام).

إن احتمال حادثين (événement) (ولادة أو وفاة) في Δt هو صغير جدا مقارنة مع t ، ادن

يمكن إهماله.

إن احتمال التغيير للنظام بين الحالات ، مع الأخذ بعين الاعتبار أن عملية الوصول و عملية انتهاء

الخدمة تتبع توزيع بواسون و متجانسة ($\lambda_n = \lambda, et, \mu_n = \mu$)، يمكن كتابتها على الشكل التالي¹ :

¹ A.kayfmann et R.Cruon, 1991, op.cit, p 39

$$p_{00} = 1 - \lambda \Delta t$$

$$p_{01} = \lambda \Delta t$$

$$p_{10} = \mu \Delta t \cdot (1 - \lambda \Delta t) = \mu \Delta t - \mu \Delta t \cdot \lambda \Delta t \cong \mu \Delta t$$

$$p_{11} = (1 - \lambda \Delta t) \cdot (1 - \mu \Delta t) + \mu \Delta t \cdot \lambda \Delta t \cong 1 - \lambda \Delta t - \mu \Delta t$$

$$p_{12} = \lambda \Delta t \cdot (1 - \mu \Delta t) = \lambda \Delta t - \mu \Delta t \cdot \lambda \Delta t \cong \lambda \Delta t$$

$$p_{n \ n+1} = \lambda \Delta t, n \geq 0$$

$$p_{nn} = 1 - \lambda \Delta t - \mu \Delta t, n \geq 1 \dots \dots \dots (2-2)$$

$$p_{n \ n-1} = \mu \Delta t, n \geq 1$$

فعملية الولادة و الوفاة في فضاء عيني منفصل يخضع للعلاقة التالية :

$$p_n'(t) = p_{n-1}(t) \cdot \lambda_{n-1} - p_n(t) \cdot (\lambda_n + \mu_n) + p_{n+1}(t) \cdot \mu_{n+1}$$

$$n \geq 0 \quad (\text{avec } \lambda_{n-1} = \mu_0 = 0) \dots \dots \dots (2-3)$$

إن عملية M/M/1 بوتيرة وصول ثابتة λ و معدل خدمة ثابت μ هو عملية ولادة و وفاة ثابتة، أي¹:

$$p_n(t) \rightarrow p_n \quad \text{donc} \quad p_n'(t) = 0$$

و ذلك مهما تكن قيمة n، و منه المعادلة (2-3) تعطينا في هذه الحالة:

$$p_{n-1} \cdot \lambda - p_n \cdot (\lambda + \mu) + p_{n+1} \cdot \mu = 0 \dots \dots \dots (2-4)$$

و من المعادلة المستنتجة في الفصل الأول-المبحث الثاني (1.3) نجد:

$$P_n \cdot \lambda = P_{n+1} \cdot \mu$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n} \cdot P_0$$

¹ S.BOUABDALLAH, *application de la théorie des files d'attente pour mesurer la qualité de la prestation de service au secteur des postes*, universite mohamed bouiaf m'sila, 2002, p6

نضع: $\Psi = \frac{\lambda}{\mu}$ و منه:

$$P_n = P_0 \cdot \Psi^n \dots\dots(2-5)$$

1-1-1-2. القيم النموذجية لنظام الانتظار $M/M/1$:

1-احتمال الانتظار صفري - احتمال الانتظار غير صفري:

من المعادلة (2-5) نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \Psi^n \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \Psi^n}$$

وبما ان: $\sum_{n=0}^{\infty} \Psi^n = \frac{1}{1-\Psi}$ ، إذن:

$$P_0 = 1 - \Psi \dots\dots(2-6)$$

النتيجة الأخيرة تشرح لنا معنى قيمة Ψ ، حيث أنها تمثل احتمال أن النظام غير فارغ ($\Psi = 1 - P_0$) لهذا تسمى "معامل الاستعمال" (coefficient d'utilisation) أو "كثافة حركة المرور" (intensité de trafic) .
تمثل أيضا احتمال أن قادم جديد مضطر للانتحاق بالطابور.

$$P(w > 0) = P(n > 0) = 1 - P_0, \text{ donc :}$$

$$P(w > 0) = \Psi \dots\dots(2-7)$$

2-احتمال انتظار أكبر من x

بصفة عامة ، نقوم باستنتاج توزيع احتمال وقت الانتظار بتمييز الزبائن و استعمال طريقة التكامل من خلال متحولة لابلاس (transformée de LAPLACE) لكن يمكن تجنب التعقيد في الحسابات بالنسبة لهذه الطريقة و الحصول على نفس النتائج بطريقة بديهية باستعمال النتائج السابقة.

¹ S.BOUABDALLAH, 2002,p6

ففي حالة الانتظار الغير الصفري، أي $w > 0$ ، فإن الزبون يصل أولاً إلى النظام (عملية وصول بوتيرة λ)، ثم يلتحق بالطابور لينتظر دوره (فترة الانتظار) قبل أن يتم تقديم الخدمة له من طرف مركز الخدمة (عملية تقديم الخدمة بوتيرة μ).

نفرض أن عمليتين منتظمتين للأحداث (الأمر لا يتعلق بالولادة و الوفاة لكن بوقوع الحدث) فإنه يظهر أن العملية الإجمالية تعادل عملية بواسونية غير مستقرة و التي معدلها يتغير فجأة بين فترتين زمنيتين. نعلم أنه بين هذين الفترتين فالعملية هي أيضا بواسونية، و التي لها معدل يساوي الفرق بين المعدلين بالترتيب بالقيمة المضافة.

إن وقت الانتظار، إذا وجد، هو ادن أسّي بمعدل $1/\mu - \lambda$

$$P(w > x / w > 0) = e^{-(\mu-\lambda)x} \Rightarrow P(w > x) = P(w > 0) \cdot e^{-(\mu-\lambda)x}$$

$$P(w > x) = \Psi \cdot e^{-(\mu-\lambda)x} \dots\dots\dots(2-8)$$

لحساب احتمال انتظار محدودة بمجال $[x_1, x_2]$ فإننا نستعمل دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ ،

$$F(x) = P(w \leq x) = 1 - P(w > x)$$

$$F(x) = 1 - P(w > 0) \cdot e^{-(\mu-\lambda)x}$$

$$\text{Ainsi : } P(x_1 < x < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

يمكن الحصول الكميات المميزة الأخرى للكفاءة انطلاقاً من القوانين الأساسية للاحتتمالات.

3- العدد المتوسط للزبائن في النظام:

عدد الزبائن n في النظام يساوي عدد الزبائن في الانتظار زائد عدد الزبائن الذين تقدم لهم الخدمة،

القيمة المتوسطة لـ n تعبر عن المتوسط الحسابي لحالة النظام.

$$\begin{aligned} \bar{n} &= E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (p_0 \Psi^n) = (1 - \Psi) \sum_{n=0}^{\infty} n \Psi^n \\ &= (0\Psi^0 + \Psi + 2\Psi^2 + 3\Psi^3 + 4\Psi^4 + \dots) - (0\Psi^1 + \Psi^2 + 2\Psi^3 + 3\Psi^4 + \dots) \\ &= 0 + \Psi + \Psi^2 + \Psi^3 + \Psi^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi^n - 1 \end{aligned}$$

عندما يكون:

$$, \Psi < 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Psi^n = \frac{1}{1-\Psi}$$

و منه نجد أن :

$$\bar{n} = \frac{\Psi}{1-\Psi} \dots\dots\dots(2-9)$$

4- العدد المتوسط للزبائن في الصف:

في نظام ذو مركز خدمة واحد:

$$v = n \text{ si } n = 0 \text{ et } v = n - 1 \text{ si } n \geq 1$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \sum_{n=1}^{\infty} v \cdot p_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p_n + 0p_0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot (1-\Psi) \Psi^n \\ &= (1-\Psi)(0\Psi + \Psi^2 + 2\Psi^3 + 3\Psi^4 + \dots) \\ &= (0\Psi + \Psi^2 + 2\Psi^3 + 3\Psi^4 + \dots) - (0\Psi^2 + \Psi^3 + 2\Psi^4 + 3\Psi^5 + \dots) \\ &= \Psi^2 + \Psi^3 + \Psi^4 + \Psi^5 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi^n - \Psi^0 - \Psi^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi^n - (1-\Psi) \\ &= \frac{1}{1-\Psi} - (1+\Psi) = \frac{1-(1-\Psi^2)}{1-\Psi} \\ \Rightarrow \bar{v} &= \frac{\Psi^2}{1-\Psi} \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

و انطلاقا من المعادلة (2-9) نجد:

$$\bar{v} = \bar{n} \cdot \Psi \dots\dots\dots(2-10)$$

المميزات المرتبطة بفترة البقاء في النظام و وقت الانتظار يمكن الحصول عليها بطريقة بديهية ، و ذلك استنادا إلى فرضيات النظام.

5- الزمن المتوسط للبقاء في النظام:

في كل وحدة زمنية ، فانه يصل في المتوسط λ زبون و يغادر في المتوسط λ زبون (نظام ثابت)، الفاصل الزمني المتوسط بين عمليتي وصول هو ادن $1/\lambda$ حالما يصل زبون جديد فانه سيكون هناك \bar{n} زبون في النظام ، و قبل مغادرته النظام فانه هناك في المتوسط وصول \bar{n} زبون.

الوقت الذي يمضيه الزبون في النظام \bar{u} يساوي ادن الوقت اللازم لوصول \bar{n} زبون ، ادن:

$$\bar{u} = \frac{1}{\lambda} \bar{n} \dots \dots \dots (2-11)$$

من المعادلة (2-9) نجد أن :

$$\bar{u} = \frac{\Psi}{1-\Psi} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{\mu-\lambda}{\mu}}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\mu-\lambda} \dots \dots \dots (2-12)$$

نذكر أن فترة البقاء في النظام \bar{u} تتبع قانون أسّي بمعلمة $1/(\mu-\lambda)$ ، أغلب الزبائن تمضي فترة أقل من هذا المعدل.

• الزمن المتوسط للانتظار:

في المتوسط، فان الفترة التي يقضيها الزبون في الانتظار تساوي الوقت اللازم لوصول \bar{V} زبون:

$$\bar{W} = \frac{1}{\lambda} \cdot \bar{v}$$

$$\bar{W} = \frac{\Psi^2}{1-\Psi} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{\mu^2}}{\frac{\mu-\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$\bar{W} = \Psi \cdot \bar{u} \dots \dots \dots (2-13)$$

بطريقة تناظرية، نقول أن أي واصل جديد ينتظر حتى يتم خدمة \bar{n} زبون التي يجدها في النظام، وبما أن وقت الخدمة بالنسبة للزبون تساوي $1/\mu$ ، فإن فترة الانتظار التي يقضيها هي إذن :

$$\bar{w} = \bar{n} \cdot (1/\mu) \dots \dots \dots (2-14)$$

من جهة أخرى، فهذه النتيجة يمكن الحصول عليها انطلاقا من المعادلة (4) و ذلك بالطريقة التالية:

$$\bar{w} = \frac{1}{\lambda} \cdot \bar{v}$$

$$\bar{w} = \frac{\Psi^2}{1-\Psi} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\Psi}{1-\Psi} \cdot \frac{\Psi}{\lambda}$$

لكن : $\frac{\Psi}{1-\Psi} = \bar{n}$

$$\bar{w} = \bar{n} \cdot \frac{1}{\mu} \dots \dots \dots (2-15) \quad \text{إذن :}$$

6- احتمال أن يتجاوز عدد k زبون في النظام¹

هناك قيمة مهمة أخرى يجب حسابها وهي احتمال أن يتجاوز عدد الزبائن في النظام القيمة k ، هذه القيمة تستعمل مثلا في التنبؤ بالوسائل التي يجب أن تستثمر لاستيعاب المستخدمين فيما يخص سعة المكان، التهوية، المقاعد... الخ

¹ S.BOUABDALLAH, *op.cit*,2002,p6

تستخدم أيضا لتقدير عدد المرات (بالنسب المؤوية) التي كان فيها الاستثمار (و الذي يتمثل خصوصا في فترة الخدمة و أيضا كيفية الاستقبال) غير كافي .

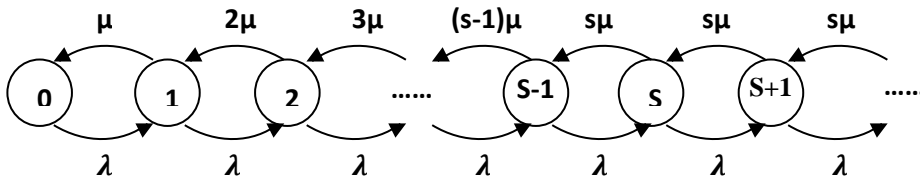
$$P(n \geq k) = \sum_{i=k}^{\infty} P_i$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} (1-\Psi) \Psi^i = -\sum_{i=k}^{\infty} \Psi^{i+1} = \sum_{i=k}^{\infty} \Psi^i - \sum_{i=k+1}^{\infty} \Psi^i$$

$$P(n \geq k) = \Psi^k \dots\dots\dots(2-16)$$

2-1-2. نظام M/M/s (تعميم على S مركز خدمة)

إن نظام M/M/S هو نظام انتظار بعملية وصول بواسونية و عدد مراكز الخدمة S و التي تكون متطابقة و تتقاسم نفس مكان الانتظار، و تقدم الخدمة لكل زبون في وقت واحد¹، و لها فترة خدمة آسية بمعلمة μ ، عدد الزبائن يكون غير محدود و صف الانتظار يفترض أن يكون واحد و منتظم حتى إذا كان هناك عدة صفوف، فيكفي أن لا يكون عند الزبائن أي تفضيل لمركز خدمة على آخر ، وأن تكون الحركة بين الصفوف ممكنة و هذا حتى تكون هذه الحالة مثل حالة نظام بصف انتظار واحد. نلمس هذه الحالة عادة في مراكز الدفع.



الشكل رقم 2-2 مخطط يمثل صف انتظار M/M/s

المصدر: J.F.HECHE , 2003,op.cit. p118

إن نظام الانتظار M/M/S بمركز خدمة متطابق يعادل عملية ولادة و وفاة ذات المعاملات التالية:

¹ J.F.HECHE, op.cit, 2003, p. 118

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots et$$

$$\mu = \begin{cases} \mu \cdot n & n \leq s \\ \mu \cdot s & n \geq s \end{cases}$$

• شرط عدم انسداد النظام هو $\frac{\lambda}{s \cdot \mu} < 1$

انطلاقاً من هذا ، فانه في حالة نظام مستمر فان احتمال عملية الولادة و الوفاة تعطى بالعلاقة :

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)$$

و لحل هذه المعادلة يجب تقسيمها إلى جزئين اعتماداً على الكيفية التي يعتمد فيها μ_n على n ¹:

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)$$

Pour $n \leq s$ $P_n = P_0 \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu \cdot i} \right),$

$$P_n = P_0 \frac{\lambda^n}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \dots n\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

لكن : $\frac{\lambda}{\mu s} = \Psi$ إذن :

$$P_n = P_0 \cdot \frac{s^n \Psi^n}{n!} \dots \dots \dots (2-17)$$

من اجل $n \geq s$

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^s \left(\frac{\lambda}{\mu \cdot i} \right) \cdot \prod_{i=s+1}^n \left(\frac{\lambda}{\mu s} \right),$$

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{s!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n-s} \frac{1}{s^{n-s}} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot \frac{1}{s^{n-s} \cdot s!} = P_0 \cdot \frac{s^n \Psi^n}{s^{n-s} \cdot s!}$$

$$P_n = P_0 \cdot \frac{s^s \Psi^n}{s!} \dots \dots \dots (2-18)$$

¹ S.BOUABDALLAH, *op.cit*,2002,p19

يمكن استنتاج قيمة P_0 باستعمال المساواة التالية¹: $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

$$\begin{aligned}
 1 &= \sum_{n=0}^{s-1} P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} + \sum_{n=s}^{\infty} P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{s^{n-s} \cdot s!} \\
 &= P_0 \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-s}}{s^{n-s}} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \right) \\
 &= P_0 \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^{n-s} \right) \\
 &= P_0 \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} (\Psi)^n \right)
 \end{aligned}$$

تحت شرط: $\Psi < 1$ ، و باستعمال النتيجة: $(|x| < 1)$ نجد أن $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

$$P_0 = \frac{1}{\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!(1-\Psi)} + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}};$$

$$P_0 = \frac{1}{\frac{(s\Psi)^s}{s!(1-\Psi)} + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s\Psi)^n}{n!}} \dots\dots\dots(2-19)$$

¹ S.BOUABDALLAH, *op.cit*,2002,p20

الجدول التالي يعطينا بعض قيم P_0 في نظام $M/M/s$:

جدول 1-2 - قيم P_0 بدلالة $s\psi = \lambda/\mu$ في نظام $M/M/S$

	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7	S=∞
SΨ=1	0.333	0.363	0.367	0.367	0.367	0.367	0.36788
SΨ=2		0.111	0.130	0.134	0.135	0.135	0.13534
SΨ=3			0.037	0.046	0.049	0.049	0.04978
SΨ=4				0.013	0.016	0.017	0.01837

Source : A.KAUFMANN, 1970, op. cit, p392

1-2-1-2. القيم المميزة لنظام انتظار $M/M/s$

بوضع $\psi = \lambda/\mu s$ و $\mu' = \mu s$ ، سنقوم بحساب الأحجام المختلفة المميزة للنظام¹:

1- العدد المتوسط للزبائن في الانتظار:

$$v = n - s, \quad \bar{v} = E(v) = \sum_{n=s}^{\infty} (n - s) p_n$$

من المعادلة (12) نجد أن :

$$\bar{v} = \sum_{n=s}^{\infty} (n - s) p_n = \sum_{n=s}^{\infty} \left(p_0 \frac{s^s \psi^n}{s!} \right) \cdot (n - s) = p_0 \frac{s^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} \psi^n (n - s)$$

لدينا: $1 < (\psi = \lambda/\mu s)$ ، بتعويض $(n - s)$ بـ v ، و باستعمال النتيجة²:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1)$$

فسنحصل على:

¹ A.KAUFMANN et R.CRUON, 1961, op. cit, p62.

² N.PISKOUNOV, 1974, op. cit., p.349

$$\bar{v} = p_0 \frac{s^s}{s!} \sum_{v=1}^{\infty} v \psi^{v+s} = p_0 \frac{s^s \psi^s}{s!} \sum_{v=1}^{\infty} v \psi^v$$

$$\bar{v} = p_0 \frac{s^s \psi^{s+1}}{s!(1-\psi)^2} \dots \dots \dots (2-20)$$

2- العدد المتوسط لمراكز الخدمة المشغولة - العدد المتوسط لمراكز الخدمة المشغولة:

من أجل $s=1$ فإن مركز الخدمة هو مشغول بنسبة مئوية من الوقت ψ ، في أي لحظة فهو مشغول باحتمال ψ ، و غير مشغول باحتمال $(1-\psi)$ ، وبما أن مراكز الخدمة متطابقة (متشابهة) (و ذلك بالنسبة للخدمة المقدمة، فترة الخدمة، و نوعية الخدمة...) فان لديها نفس معدل الإشغال و نفس معدل الفراغ.

عدد مراكز الخدمة المشغولة هو إذن:

$$\bar{j} = s\psi \dots \dots \dots (2-21)$$

العدد المتوسط لمراكز الخدمة الغير مشغولة هو:

$$\bar{\rho} = (1-\psi)s \dots \dots \dots (2-22)$$

3- العدد المتوسط للزبائن المتواجدين في النظام:

من العلاقة: $\bar{n} = \bar{v} + \bar{j}$ و المعادلة (12)، نجد أن:

$$\bar{n} = p_0 \frac{s^s \psi^{s+1}}{s!(1-\psi)^2} + s\psi \dots \dots \dots (2-23)$$

4- الزمن المتوسط للبقاء في النظام:

بالنسبة لكل وحدة زمنية، فانه يصل في المتوسط λ زبون و يغادر في المتوسط λ زبون (نظام ثابت)، الفاصل الزمني بين عمليتي وصول هي إذن $1/\lambda$. عندما يصل زبون جديد، فان هناك \bar{n} زبون في النظام،

و عند مغادرته النظام فان هناك في المتوسط \bar{n} أخرى. الفترة التي يقضيها الزبون في النظام \bar{u} تساوي إذن الوقت اللازم لوصول \bar{n} زبون، أي:

$$\bar{u} = \bar{n} \cdot (1/\lambda) \dots \dots \dots (2-24)$$

و من المعادلة (14) يمكن استنتاج ما يلي:

$$\bar{u} = \frac{p_0}{\mu s} \cdot \frac{(s\psi)^s}{s!(1-\psi)^2} + \frac{1}{\mu} \dots \dots \dots (2-25)$$

5- الزمن المتوسط للانتظار:

الفترة التي يقضيها الزبون في الانتظار تساوي الوقت اللازم لوصول \bar{v} زبون، لدينا إذن:

$$\bar{w} = \bar{v} \cdot (1/\lambda) \dots \dots \dots (2-26)$$

من المعادلة (10) نجد ان :

$$\bar{w} = \frac{p_0}{\mu s} \frac{(s\psi)^s}{s!(1-\psi)^2} \dots \dots \dots (2-27)$$

الزمن المتوسط للخدمة مقدمة لزبون تساوي: $\bar{v} = 1/\mu$

6- احتمال انتظار غير صفري¹:

هذه القيمة تمثل النسبة المئوية للزبائن الذين سيتعين عليهم الاصطفاف في الطابور من أجل الحصول على الخدمة.

يجبر الزبون على الالتحاق بالصف إذا وجد أن كل مراكز الخدمة مشغولة، أي: $n \geq s$ ، من المعادلة (12) نجد أن :

$$p(w > 0) = p(n \geq s) = \sum_{n=s}^{\infty} p_n = \sum_{n=s}^{\infty} p_0 \frac{s^s \psi^s}{s!} = p_0 \frac{s^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} \psi^s$$

$$p(w > 0) = p_0 \frac{s^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} \psi^s$$

¹ S.BOUABDALLAH, op.cit,2002,p23

نستعمل المتتالية :

$$s_n = c + cx + cx^2 + \dots + cx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{c(1-x^n)}{1-x}$$

• مع $c=1$ و $|x| < 1$ نجد أن:

$$\sum_{n=0}^{\alpha} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\alpha-1} x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{\alpha}}{1-x}$$

نحصل إذن على النتيجة التالية:

$$\sum_{n=\alpha}^{\infty} x^n = \frac{x^{\alpha}}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$\sum_{n=s}^{\infty} \psi^n = \frac{\psi^s}{1-\psi} \quad \text{إذن:}$$

و الذي يعطينا أخيرا:

$$p(w > 0) = p_0 \frac{(s\psi)^s}{s!(1-\psi)} \dots \dots \dots (2-28)$$

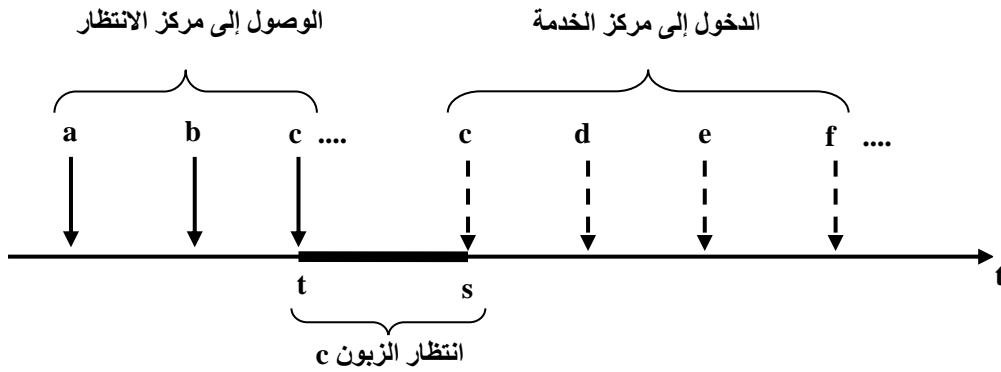
من المعادلة (18) نستنتج أيضا:

$$p(w > 0) = \bar{w} \cdot \mu s \cdot (1-\psi) \dots \dots \dots (2-29)$$

7- احتمال انتظار أكبر من فترة x - دالة التوزيع لفترة الانتظار:

نفرض أننا في حالة $n \geq s$ ، فالزبون الذي يصل إلى النظام سيعاني من الانتظار قبل أن يدخل إلى مركز الخدمة، لنقم بعملية تطابق لعمليتين منتظمتين ذات توزيع بواسوني، من جهة عملية وصول الزبائن إلى نظام الانتظار (معدل λ)، و من جهة أخرى دخولهم في الخدمة (معدل $\mu' = \mu s$)، باعتبار عمليات الوصول للزبائن حتى الزبون c (ليكن t زمن وصوله) و عملية الدخول في الخدمة للزبائن انطلاقا من

الزبون C (ليكن S زمن دخوله في الخدمة)، فاننا نصبح امام حالة مماثلة لعملية بواسونية غير مستقرة و التي تغير المعدل من λ الى μ'



الشكل 3-2 قانون زمن الانتظار

Source : S.BOUABDALLAH, *op.cit*,2002,p24

لقد رأينا في الفصل الأول أنه ، و عندما تعطى التواريخ t و s ، فالمتغير العشوائي $N(s)-N(t)$ لعدد الأحداث (événement) التي تقع في المجال $[t,s]$ تتبع قانون بواسون: $P(m(s)-m(t))$ كذلك ، فعندما يوجد هذا الأخير، فالفترة $[t,s]$ و التي هي أيضا وقت انتظار الزبون، تتبع قانون أسي مع معدل يساوي $1/(\mu' - \lambda)$ نكتب :

$$p(w > x / n \geq s) = e^{-(\mu' - \lambda)x}$$

و بصفة عامة :

$$p(w > x) = p(w > 0) \cdot e^{-(\mu' - \lambda)x} \dots\dots\dots(2-30)$$

يمكن استنتاج دالة التوزيع الاحتمالية لفترة الانتظار مباشرة من هذه النتيجة:

$$F(x) = p(w \leq x) = 1 - p(w > x)$$

$$F(x) = 1 - p(w > 0) \cdot e^{-(\mu' - \lambda)x} \dots\dots\dots(2-31)$$

بالتعويض في المعادلة (19) نحصل على:

$$F(x) = 1 - p_0 \frac{(s\psi)^s}{s!(1-\psi)} \cdot e^{-(\mu'-\lambda)x} \dots\dots\dots(2-32)$$

يمكن حساب احتمال انتظار أكبر من X_1 و أصغر من X_2 انطلاقاً من دالة التوزيع التالية:

$$p(x_1 < w < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \dots\dots\dots(2-33)$$

إن نموذج $M/M/S$ مهم جداً لتمثيل الظواهر الانتظار في الموانئ البحرية ، خاصة في حالة عدة أرصفة ، فهو يبقى صحيح (بصورة تقريبية) حتى إذا كانت فترات الخدمة في الأرصعة غير متطابقة، حيث أنه يكفي أن لا تتجاوز نسبة الاختلاف من 20% إلى 30%.

3-1-2. نظام $M/M/\infty$ و $M/G/\infty$ ¹

إن صف الانتظار من نوع $M/M/\infty$ يحتوي على عدد كافي من مراكز الخدمة و ذلك حتى لا يكون هناك انتظار ، و من النتائج المباشرة لهذه الفرضية أن تكون فترة بقاء الزبون في النظام مساوية لمدة خدمته، و هذا مهما تكن قيمة معدل الوصول λ للزبائن.

نلاحظ أن λ و μ على الترتيب هما معدل الوصول و الخدمة؛ تطور عدد الزبائن في هذا النوع من الصفوف يمثل عملية ولادة و وفاة حيث أن معدل الولادة λ يكون ثابت ، و معدل الوفاة في الحالة k هو :

$$\mu_k = k \mu, \quad k \geq 1$$

إضافة إلى ذلك ، فإن هذا النظام يعتبر، من الناحية النظرية ، دائماً مستقر و له توزيع احتمالي مستقر في أغلب الحالات.

نعرف كثافة المرور بالعلاقة التالية :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \dots\dots\dots(2-34)$$

التوزيع المستقر لعدد الزبائن في الصف هو بكل بساطة قانون بواسون بمعلمة ρ (معامل) :

¹ J.F.HECHE, op.cit, 2003, p. 122

$$\pi_k = \frac{e^{-\rho}}{k!} \rho^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad \dots\dots(2-35)$$

بما أن العدد المتوسط للزبائن في صف الانتظار معدوم ($\bar{Q} = 0$) ، فإن العدد المتوسط للزبائن المتواجدين في النظام يساوي العدد المتوسط لمراكز الخدمة المشغولة، وقيمته:

$$\bar{N} = \rho = \frac{\lambda}{\mu} \dots\dots\dots(2-36)$$

و بنفس الشكل، و بما أن الزمن المتوسط للانتظار معدوم ($\bar{w} = 0$) فإن الفترة المتوسطة للبقاء في النظام تساوي الفترة المتوسطة للخدمة:

$$\bar{T} = E[S] = \frac{1}{\mu} \dots\dots\dots(2-37)$$

إن النتائج السابقة يمكن تطبيقها كذلك على نظام انتظار $M/G/\infty$ حيث أن فترة الخدمة لا تتبع قانون آسي و لكن تصبح عبارة عن متغيرات عشوائية غير سالبة و مستقلة و متطابقة، و موزعة حسب قانون الأمل الرياضي (المتوسط الحسابي) $E[S]$.

يكفي في مثل هذه الحالة أن نقوم بتعويض معدل الوصول μ — $\frac{1}{E[S]}$ في المعادلات السابقة.

أخيرا نشير ان الصفوف التي تحتوي على عدد غير محدود من مراكز الخدمة يطلق عليها أحيانا اسم "مراكز التأخير" (Centre De Délai).

4-1-2. نظام الانتظار $M/M/s/K$ ¹

إن النماذج المعروضة سابقا تفترض أن يكون النظام المنمذج بإمكانه استقبال عدد غير محدد من الزبائن، فإذا كانت هذه الفرضية المبسطة ظهرت أنها كافية تماما لدراسة العديد من أنظمة الانتظار، فهي غير مقبولة عندما يكون المكان الانتظار المتاح للزبائن جد محدود.

إن نظام $M/M/s/K$ يدخل هذا القيد الخاص بالمكان في النموذج و ذلك بالسماح لأكبر عدد ممكن من الزبائن K بالتواجد في النظام.

¹ J.F.HECHE, op.cit, 2003, p. 123

إذا وصل زبون و كانت القدرة k للنظام قد تم الوصول إليها ، فسيرد و يقوم بمغادرة النظام مباشرة دون حصوله على الخدمة.

إن النظام $M/M/s/K$ هو عبارة عن عملية ولادة و وفاة معرفة على المجموعة المحدودة للعينة :

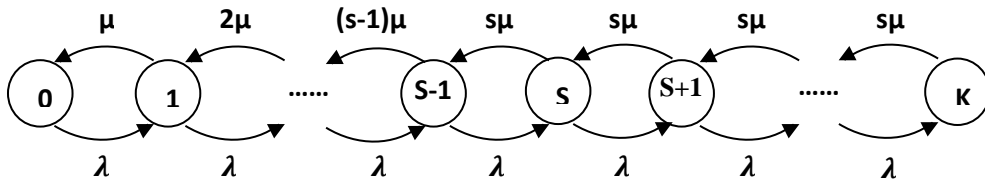
$$S = \{0,1,\dots,K\}$$

المخطط البياني التالي الممثل لسلاسل ماركوف يمثل عملية معرفة بمعدلات الولادة :

$$\lambda_k = \lambda, \quad k = 0,1,\dots,K-1$$

و معدلات الوفاة:

$$\mu_k = \begin{cases} k \mu & k = 1,2,\dots,s-1 \\ s \mu & k = s,s+1,\dots,K \end{cases}$$



الشكل رقم 4-2 مخطط يمثل صف انتظار $M/M/s/K$
المصدر: J.F.HECHE , 2003,op.cit. p123

مع وجود عدد محدود من الحالات، فإن نظام الانتظار يعتبر مستقر مهما يكن معدل الوصول λ و معدل الخدمة μ ، دالة التوزيع الاحتمالية المستقرة للعملية و احتمال ملاحظة k زبون في النظام هو :

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{(m\rho)^k}{k!} \pi_0 & k = 1,2,\dots,m-1 \\ \frac{\rho^k m^m}{m!} \pi_0 & k = m,m+1,\dots,K \end{cases} \dots\dots(2-38)$$

حيث أن ρ هي كثافة المرور و المعرفة ، كما في النظام $M/M/s$ ، كما يلي :

$$\rho = \frac{\lambda}{m \mu} \dots\dots\dots(2-39)$$

و من المعادلة $\sum_{k=0}^K \pi_k = 1$ يمكن حساب الاحتمال π_0 أن يكون نظام الانتظار فارغ كما يلي:

• في حالة $\rho \neq 1$:

$$\pi_0 = \left[1 + \frac{(1 - \rho^{K-m+1})(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} \right]^{-1}$$

• في حالة $\rho = 1$:

$$\pi_0 = \left[1 + \frac{(m)^m}{m!} (K - m + 1) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m)^k}{k!} \right]^{-1}$$

انطلاقاً من هذا التوزيع المستقر ، فإن العدد المتوسط \bar{N} للزبائن الموجودين في النظام، و العدد

المتوسط \bar{Q} للزبائن في الانتظار يعبر عنهما بالعلاقة التالية :

$$\bar{N} = \sum_{k=1}^K k \pi_k \dots\dots(2-42)$$

$$\bar{Q} = \sum_{k=m+1}^K (k - m) \pi_k \dots\dots(2-43)$$

لحساب الفترات المتوسطة التي بقاها الزبون في النظام ، و التي قضاها في الانتظار ، فسنطبق علاقة

Little ، رغم مشكلة أن كل واصل إلى النظام يمكن فقده إذا كانت قدرة هذا النظام K في أقصاها ، فـ

"المعدل العملي لعملية وصول الزبائن" هي إذن :

$$\lambda' = \sum_{k=0}^{K-1} \lambda \pi_k = \lambda(1 - \pi_K) \dots\dots(2-44)$$

باستعمال هذه القيمة ، يمكن استنتاج فترة المتوسطة لبقاء الزبون في النظام \bar{T} و أيضا الفترة

المتوسطة التي قضاها في الانتظار \bar{W} و التي تعطى بالعلاقة التالية :

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda'} = \frac{\bar{N}}{\lambda(1 - \pi_K)} \dots\dots(2-45)$$

و

$$\bar{W} = \frac{\bar{Q}}{\lambda'} = \frac{\bar{Q}}{\lambda(1 - \pi_K)} \dots\dots(2-46)$$

إن حساب معدل الاستخدام لكل مركز خدمة يستند أيضا على المعدل العملي لعملية الوصول و يعطينا :

$$U = \frac{\lambda'}{m \mu} = \rho(1 - \pi_k) \dots \dots \dots (2-47)$$

2-2. صفوف الانتظار الغير ماركوفية¹:

بالنسبة لأنظمة الانتظار التي تم التطرق إليها في المبحث الثاني، فإن عدد الزبائن المتواجدين في النظام في فترة زمنية معطاة t تكفي لوحدها لتلخيص كل التطور الذي سيحصل في النظام حتى اللحظة t . إن دراسة تطور هذا النوع من الأنظمة فيما وراء لحظة t يقودنا إلى دراسته من خلال سلاسل ماركوف في زمن مستمر حيث أن متغير الحالة في اللحظة t يكون مساويا لعدد الزبائن المتواجدين في النظام في اللحظة t .

سنتناول في هذا المبحث بعض النماذج حيث تكون هذه الخاصية غير قابلة للتحقق. تتميز دراسة الأنظمة الانتظار الغير ماركوفية بالصعوبة أكثر من الأنظمة التي ذكرت سابقا ، لهذا سوف نقوم، في هذا المبحث، بعرض النتائج و العلاقات فقط دون التعمق في البراهين.

1-2-2. نظام M/G/1:

يتميز نظام M/G/1 بعملية وصول بواسونية و فترة خدمة مستقلة و متطابقة موزعة حسب قانون احتمال "مهما كان" (و لكن تقتصر فقط على القيم الغير سالبة) ان تطور عدد الزبائن في هذا النوع من الصفوف لا يمكن نمذجته بواسطة سلاسل ماركوف في زمن مستمر ، حيث انه اذا تواجد X_t زبون في النظام في أي لحظة $t \geq 0$ فان التطور المستقبلي للمتغير X_t لا يتوقف فقط على قيمة X_t ، و لكن أيضا على فترة الخدمة المخصصة للزبائن الذين يشغلون مركز الخدمة.

في الواقع ، فيما أن فترة الخدمة اللازمة لكل زبون لم تعد تتبع قانون أسي ، فان وقت المعالجة المخصص للزبائن أثناء الخدمة في اللحظة t (و ذلك بافتراض أن النظام غير فارغ) له تأثير على فترة الخدمة المتبقية .

¹ J.F.HECHE, op.cit, 2003, p. 125

و حتى تنفادي هذا المشكل ، نقوم بمعاينة نظام $M/G/1$ في اللحظة التي يغادر فيها الزبون مركز الخدمة، حيث إن فترة الخدمة المخصص للزبون المقبل (بافتراض انه يوجد) هو اذن معدوم. القيم المتتالية المتحصل عليها من ذلك تشكل سلسلة ماركوف بزمن منفصل ، حيث أن دراسة هذه السلسلة ، رغم أنها لا تسمح بالحصول على علاقة واضحة من اجل توزيع عدد الزبائن في لحظة المغادرة، تعتبر القاعدة لعلاقة Pollaczek-khinchin و التي تعطينا الصيغة الدقيقة للعدد المتوسط للزبائن في الانتظار.

2-2-2. علاقة Pollaczek-khinchin¹

العدد المتوسط للزبائن في الانتظار في نظام مستقر $M/G/1$ يساوي :

$$\bar{Q} = \left(\frac{1+C_s^2}{2} \right) \frac{\rho^2}{1-\rho} \dots\dots\dots(2-48)$$

حيث C_s^2 هو مربع معامل التشتت² (أو الاختلاف) coefficient de variation

للقانون الذي يصف فترة الخدمة S للزبائن، و $\rho = \lambda E[S]$ هو كثافة المرور في الصف.

شرط الاستقرارية للصف هي إذن :

$$\rho = \lambda E[S] < 1 \dots\dots\dots(2-49)$$

و الكثافة ρ تمثل أيضا المعدل المتوسط لاستخدام مركز الخدمة، و يمكن أيضا صياغة العلاقة السابقة كالآتي:

$$\bar{Q}_{M/G/1} = \left(\frac{1+C_s^2}{2} \right) \cdot \bar{Q}_{M/M/1} \dots\dots\dots(2-50)$$

و هكذا، فان العدد المتوسط للزبائن في الانتظار في صف $M/G/1$ و صف $M/M/1$ له نفس معدل الوصول λ ونفس معدل الخدمة $\mu = 1/E(S)$ لا يختلف إلا بمعامل مضاعف (facteur multiplicatif) و الذي لا يعتمد إلا على التوزيعين الاحتماليين الأولين لفترة الخدمة. من جهة أخرى ، فالانحراف المعياري لقانون الآسي بما انه يساوي متوسطه الحسابي ، فان معامل التشتت يكون مساويا للواحد، و العلاقة السابقة تصبح ، في حالة $M/M/1$ ، مساواة لا معنى لها.

¹ J.F.HECHE, op.cit, 2003, p. 126

² نذكر إن معامل التشتت C_x لمتغير عشوائي X ذو متوسط الحسابي غير معدوم يساوي العلاقة بين الانحراف المعياري σ_x لـ X و متوسطه الحسابي $E(X)$

لحساب قيم الأداء الباقية لنظام M/G/1 ، فيكفي تطبيق العلاقات الأساسية التالية :

$$\bar{N} = \bar{Q} + U = \left(\frac{1+C_s^2}{2} \right) \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho \dots \dots \dots (2-51)$$

$$\bar{W} = \frac{\bar{Q}}{\lambda} = \left(\frac{1+C_s^2}{2} \right) \frac{\rho E(S)}{1-\rho} \dots \dots \dots (2-52)$$

$$\bar{T} = \bar{W} + E[S] = \left(\frac{1+C_s^2}{2} \right) \frac{\rho E(S)}{1-\rho} + E(S) \dots \dots \dots (2-53)$$

3-2-2. نظام G/M/1¹

هو عبارة عن نظام ثنائي لصف M/G/1 ، حيث يتميز بفترة خدمة تتبع قانون آسي و عملية وصول تكون على شكل أي عملية متجددة (processus de renouvellement)، يمكن دراسة هذا النوع من الأنظمة عن طريق معاينته في اللحظة التي يصل الزبون فيها إلى النظام ، العملية الكامنة من وراء ذلك هي إذن معرفة على أنها عبارة عن سلسلة ماركوف بزمن منفصل . و هذا مثل العملية التي تحصلنا عليها عند معاينة الصف M/G/1 عند لحظة المغادرة فقط. و رغم ذلك، و على عكس هذا الأخير، يمكن تقديم دالة التوزيع المستقرة لعدد الزبائن في لحظة الوصول بالنسبة لنظام G/M/1.

ليكن μ معدل الخدمة و $a(t)$ دالة الكثافة للمتغيرات العشوائية الممذجة للفترات بين عمليتي وصول متتالية ، فالفترة المتوسطة بين زبوين هي إذن :

$$E(A) = \int_0^{\infty} ta(t) dt \dots \dots \dots (2-54)$$

و معدل الوصول إلى النظام هو :

$$\lambda = \frac{1}{E[A]} \dots \dots \dots (2-55)$$

و ذلك تحت شرط الاستقرار التالى :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\mu E[A]} < 1 \dots \dots \dots (2-56)$$

¹ J.F.HECHE, op.cit, 2003, p. 127

يمكن أن نثبت أن المعادلة الوظيفية :

$$\alpha = \int_0^{\infty} e^{-\mu t (1-\alpha)} a(t) dt \dots\dots\dots(2-57)$$

لها حل وحيد α محصور بين 0 و 1، و بعد حساب هذه القيمة ، يصبح الاحتمال المستقر بان يصل زبون إلى الصف y و يجد k زبائن يساوي :

$$\pi_k = (1-\alpha)\alpha^k, \quad k = 0,1,2,\dots \dots\dots(2-58)$$

يمكن الحصول على باقي قيم أداء النظام انطلاقا من دالة التوزيع السابقة ، و ذلك بتطبيق نفس التقنيات التي استعملت في $M/M/1$ ، بعبارة أخرى ، حساب دالة توزيع فترة الانتظار لزبون يسمح لنا بالحصول على علاقة الوقت المتوسط للانتظار :

$$\bar{W} = \frac{\alpha}{\mu(1-\alpha)} \dots\dots\dots(2-59)$$

و أيضا فيما يخص القيم الأخرى :

$$\bar{T} = \bar{W} + E[S] = \frac{\alpha}{\mu(1-\alpha)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\alpha)} \dots\dots\dots(2-60)$$

$$\bar{Q} = \frac{\bar{W}}{E[A]} = \frac{\alpha}{E[A]\mu(1-\alpha)} = \frac{\rho\alpha}{1-\alpha} \dots\dots\dots(2-61)$$

و

$$\bar{N} = \bar{Q} + U = \frac{\rho\alpha}{\mu(1-\alpha)} + \rho = \frac{\rho}{1-\alpha} \dots\dots\dots(2-62)$$

4-2-2. نظام $G/G/1$:

يعتبر نظام $G/G/1$ من اعقد الأنظمة، وذلك رغم المظهر المبسط للنموذج، إذ يتميز عامة بالحدود و النتائج التقريبية، ومن بين العلاقات التقريبية الأكثر بساطة، و التي تم استنتاجها مباشرة من علاقة Pollaczek-khinchin :

$$\bar{W}_{G/G/1} \square \left(\frac{C_A^2 + C_S^2}{2} \right) \cdot \bar{W}_{M/M/1} \dots\dots\dots(2-63)$$

حيث أن C_A^2 هو مربع معامل التشتت للمتغير العشوائي الذي يمثل الفاصل الزمني المنقضي بين عمليتي وصول متتالية للزبائن (نذكر أن هذه الفواصل الزمنية إذا كانت موزعة حسب أي قانون احتمالي، يفترض أن تكون مستقلة، و متطابقة في التوزيع).

و C_S^2 هو مربع معامل التشتت للمتغير العشوائي الممنهج لفترات الخدمة (و التي يفترض أن تكون مستقلة، و متطابقة في التوزيع)

قيمة $\bar{W}_{M/M/1}$ تمثل الفترة المتوسطة للانتظار في نظام M/M/1 و الذي له نفس معدل وصول و معدل خدمة للنظام قيد الدراسة.

إن العلاقة التقريبية (2-63) تعتبر صحيحة بالنسبة للأنظمة M/M/1 و M/G/1 و تعطينا نتائج دقيقة في الحالة العامة لكن بشرط ألا تأخذ المعاملات C_A^2 و C_S^2 قيم كبيرة .

5-2-2. معادلة ليندلي¹: Equation de LINDLEY

يمكن استعمال عدة طرق لدراسة نظام G/G/1 بطريقة صحيحة، حيث إذا كان النظام خاضع لفرضية FIFO، فإن دراسة وقت الانتظار تكون ممكنة باستعمال العلاقة الكلاسيكية المتمثلة في معادلة ليندلي؛

لنعتبر سلسلة وصول الزبائن متبوعة بـ \mathbf{n} و نستعمل الرموز التالية:

- C_n هو $n^{ième}$ زبون الذي يصل إلى النظام؛
- a_n هو تاريخ وصول C_n ؛
- d_n هو تاريخ مغادرة C_n للنظام؛
- t_n هو الفاصل الزمني بين وصول الزبون C_{n-1} و الزبون C_n ($t_n = a_n - a_{n-1}$)؛
- s_n هو فترة خدمة الزبون C_n ؛

¹ J.F.HECHE, op.cit, 2003, p. 130

• w_n هو فترة انتظار C_n .

العملية التي تمثنا تتمثل في المتتالية $\{w_n, n=0,1,\dots\}$ لفترات الانتظار، و قبل أن نبين أنها عبارة عن عملية مالاكوفية، نحدد أولا أن تاريخ مغادرة الزبون C_{n+1} للنظام هي :

$$d_{n+1} = \begin{cases} d_n + s_{n+1} & si \ d_n \geq a_{n+1} \\ a_{n+1} + s_{n+1} & si \ d_n \leq a_{n+1} \end{cases} \dots\dots\dots(2-64)$$

البديل الأول الذي يقابل حالة أن على الزبون C_{n+1} الانتظار حتى مغادرة الزبون C_n ينضم لمركز الخدمة ، أما البديل الثاني يقابل حالة عندما يصل الزبون C_{n+1} إلى نظام فارغ، بالتعريف ، ففترة الانتظار ل C_{n+1} هي :

$$w_{n+1} = d_{n+1} - a_{n+1} - s_{n+1} \dots\dots\dots(2-65)$$

نقوم بطرح $(a_{n+1} - s_{n+1})$ من العلاقة السابقة ، فنجد:

$$w_{n+1} = \begin{cases} d_n - a_{n+1} & si \ d_n - a_{n+1} \geq 0 \\ 0 & si \ d_n - a_{n+1} \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots(2-66)$$

باستعمال تعريف $w_n = d_n - a_n - s_n$ فالعلاقة الأخيرة تصبح :

$$w_{n+1} = \begin{cases} w_n + s_n - t_{n+1} & si \ w_n + s_n - t_{n+1} \geq 0 \\ 0 & si \ w_n + s_n - t_{n+1} \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots(2-67)$$

نقوم بإدخال المتغير $u_n = s_n - t_{n+1}$ ، وهذا ما يعطينا أخيرا العلاقة البسيطة و الأساسية التالية :

$$w_{n+1} = \begin{cases} w_n + u_n & si \ w_n + u_n \geq 0 \\ 0 & si \ w_n + u_n \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots(2-68)$$

بما أن المتتاليات $\{t_n, n \geq 0\}$ و $\{s_n, n \geq 0\}$ مستقلة فيما بينها و تتكون من متغيرات عشوائية ، فإن المتتالية $\{u_n, n \geq 0\}$ هي أيضا مكونة من متغيرات عشوائية ، و من العلاقة (2-68) نستنتج أن المتتالية $\{w_n, n \geq 0\}$ تعرف عملية ماركوفية .

المرحلة التالية تتمثل في دراسة دالة التوزيع $U_n(z)$ لـ u_n و ذلك بدلالة الفواصل الزمنية بين

عمليات الوصول المتتالية للزبائن $(A(t))$ ، و فترات الخدمة $B(s)$

بالتعريف ، و من اجل $z \in \mathbb{R}$ ،

$$U_n(z) = P[u_n = s_n - t_{n+1} \leq z] \dots \dots \dots (2-69)$$

و منه :

$$\begin{aligned} U_n(z) &= P[s_n - t_{n+1} \leq z] \\ &= \int_{t=0}^{\infty} P[s_n \leq z + t / t_{n+1} = t] dA(t) \\ &= \int_{t=0}^{\infty} B(z + t) dA(t) \dots \dots \dots (2-70) \end{aligned}$$

بما أن المساواة الأخيرة مبنية على الاستقلالية بين فترات الخدمة s_n للزبون C_n و t_{n+1} ، فان

العلاقة (2-70) تبين أن دالة التوزيع $U_n(z)$ هي في الحقيقة مستقلة عن n ، لهذا ستكتب لاحقا فقط

بالعبارة : $U(z)$

نشير أن النظام يكون مستقرا إذا و فقط إذا كان للمتغير u_n أمل رياضي سالب، لان:

$$\begin{aligned} E[u_n] &= E[s_n - t_{n+1}] \\ &= E[s_n] - E[t_{n+1}] \\ &= E[S] - E[A] \\ &= E[A](\rho - 1) \end{aligned}$$

حيث $E[S]$ و $E[A]$ تمثل هنا أيضا الأمل الرياضي لفترات الخدمة و الفواصل الزمنية بين عمليات

الوصول المتتالية للزبائن على الترتيب، لذلك، فالأمل الرياضي ل u_n يكون سالب إذا و فقط إذا كان:

$$\rho = E[S] / E[A] < 1$$

ليكن $W_n(y)$ دالة التوزيع لفترة الانتظار w_n للزبون C_n ، من اجل $y \geq 0$ و انطلاقا من المعادلة

(2-70) نجد :

$$\begin{aligned} W_{n+1}(y) &= P [w_n + u_n \leq y] \\ &= \int_0^\infty P [u_n \leq y - w \mid w_n = w] dW_n(w) \\ &= \int_0^\infty U(y - w) dW_n(w) \dots \dots \dots (2-71) \end{aligned}$$

المساواة الأخيرة تشترط وجود استقلالية بين w_n و u_n ، و باعتبار أن النظام مستقر ، فإن العملية

$\{w_n, n \geq 0\}$ هي **ergodique** و تقبل دالة توزيع احتمالي ثابتة $W(y)$:

$$W(y) = \int_0^\infty U(y - w) dW(w), \quad y \geq 0 \dots \dots \dots (2-72)$$

من جهة أخرى ، ففترة الانتظار باعتبارها قيمة غير سالبة ، فمن الواضح أن :

$$W(y) = 0 \quad \text{وذلك من اجل } y < 0$$

في النظام المستقر **G/G/1** ، دالة التوزيع المستقرة لفترة الانتظار تفي بمعادلة ليندلي التكاملية:

$$W(y) = \begin{cases} \int_0^\infty U(y - w) dW(w) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \dots \dots \dots (2-73)$$

هذه المعادلة من نوع **WIENER-HOPF** لا يمكن حلها بصورة محددة و دقيقة إلا في حالات

جد بسيطة لأنها تتطلب تقنيات رياضية جد متطورة .

2-3. شبكات صفوف الانتظار:

لقد اعتبرنا في المبحث السابق أن نظام صفوف الانتظار يتضمن زبائن يطلبون خدمة من مركز خدمة وحيد و بسيط، لكن هناك عدة أنظمة حقيقية يتم فيها تقديم الخدمة للزبائن عبر عدة محطات تكون مرتبة و مرتبطة فيما بينها على شكل شبكة، و التي هي عبارة عن تجمع من العقد المترابطة مع بعضها البعض عبر عدة مسالك و طرق.

في شبكة صفوف الانتظار، فان مجموعة من مراكز الخدمة تعمل انطلاقا من نفس الخدمة يمكن اعتبارها عقدة.

لقد تم ربط نظرية صفوف الانتظار بشبكات صفوف الانتظار انطلاقا من ستينات القرن الماضي ، حيث أصبحت من التطبيقات الأساسية في الإعلام الآلي.، الاتصالات، أنظمة التصنيع... الخ. في شبكة صفوف الانتظار، يتم خدمة الزبائن عبر عدة مراكز خدمة، كما أن كل الزبائن يمكنهم عدم تلقي الخدمة عبر كل مراكز الخدمة نفسها هذا من جهة، و من جهة أخرى، يمكنهم العودة إلى أي مركز خدمة عدة مرات¹.

2-3-1. مفهوم شبكة صفوف الانتظار :

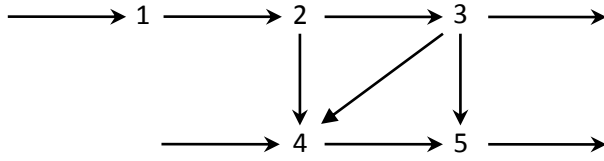
إن نمذجة أي نظام انطلاقا من صف انتظار واحد يعتبر جد محدود من خلال مجال تطبيقاته، فغالبا يحتاج الزبون إلى تلقي عدة خدمات متتالية و ذات طبيعة مختلفة قبل ان يقوم بمغادرة النظام². إن شبكات صفوف الانتظار تسمح بنمذجة هذا النوع من الحالات و تمثل أنظمة مركبة من عدة صفوف انتظار متصلة بعضها ببعض، فعندما يقوم زبون بمغادرة الصف ، يمكن له أن يتجه نحو مركز خدمة جديد في الشبكة (ربما يكون نفسه الذي غادره من قبل)، أو أن يقوم بمغادرة النظام نهائيا. فهذه القرارات تحدد قواعدها التوجيه التي يمكن أن تكون حتمية أو تصادفية .

المخطط (2-5) هو عبارة عن تمثيل مبسط لشبكة صفوف الانتظار حيث أن تسلسل الخدمة هو مثل باسهم موجهة بين العقد، كما يبين أيضا أن الزبائن يصلون إلى العقد 1، 4، و يغادرون العقد 3 و 5 ، يدعى هذا النوع من الشبكات بـ : شبكة مفتوحة³

¹ U.NARAYAN BHAT , 2008,op.cit,p141

² Jean francois heche, J.F.HECHE, op.cit, 2003, p. 118

³ U.NARAYAN BHAT ,2008, op.cit,p 141



الشكل (5-2): مخطط مبسط لشبكة مفتوحة

Source :U.NARAYAN BHAT , op.cit,p141

نقول عن شبكة صفوف انتظار أنها **مفتوحة**، عندما تكون عملية وصول الزبائن من خارج النظام ممكنة، و أيضا عندما تكون عملية مغادرة الزبائن للنظام ممكنة أيضا. حيث أن عمليات الوصول من الخارج تكون في أي مركز خدمة ، و نفس الشيء بالنسبة لعملية مغادرة النظام ،المهم أن يكون لأي زبون داخل إلى النظام أو متواجد فيه القدرة على مغادرته في أي وقت¹.

كما يجب الإشارة إلى أن كل عقد الشبكة هي عبارة عن صفوف الانتظار.

نضع $Q_i(t)$ عدد الزبائن في العقدة i و ذلك خلال الفترة t ؛ مجموع عدد الزبائن في الشبكة

هو:

$$\sum_i Q_i(t) \dots \dots \dots (2-74)$$

عندما لا يستطيع أي الزبون الدخول أو الخروج من النظام ، نقول عن شبكة صفوف انتظار أنها

شبكة مغلقة، حيث أن عدد الزبائن في الشبكة يكون دائما ثابت، أي :

$$\sum_i Q_i(t) = Q(t) \quad (\text{ثابت}) \quad (2-75)$$

كمثال عن ذلك، فان مركز تجاري يحتوي على عدد ثابت من الآلات يعتبر مثالا لشبكة مغلقة.

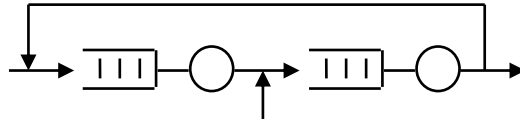
عندما يكون معدل الوصول و معدل المغادرة خارج الشبكة متساويان (أو تقريبا)، فبإمكاننا نمذجة هذا النظام كشبكة مغلقة ، و ذلك لتفادي معامل الخطأ. و حتى تكون النتائج أكثر دقة.

(مع مجموعة محدودة من المعادلات، يمكن بسهولة تحليل شبكة مغلقة و ذلك حسب هيكلها)²

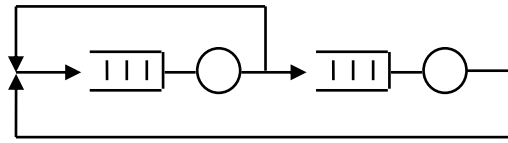
¹ Jean francois heche, op.cit , p 133

² U.NARAYAN BHAT, 2008 , op.cit, p 142

يوجد أيضا شبكات مختلطة ، والتي هي عبارة عن تجميع للأنظمة المفتوحة و المغلقة. سنتطرق من خلال دراستنا في هذا المبحث إلى الشبكات ذات صفوف الانتظار الماركوفية (الشبكات الماركوفية)



- شبكة مفتوحة



- شبكة مغلقة

الشكل (2-6): مثالان عن شبكة صفوف الانتظار: مفتوحة و مغلقة

Source :Jean francois heche, 2003,op.cit,p133

2-3-2. شبكة العقد الماركوفية¹:

تعالج شبكة صفوف الانتظار أحيانا عدة أنواع من الزبائن موزعين في عدة أقسام ،هذه الأخيرة تتميز بعملية الوصول و الخدمة في مختلف الصفوف، و قواعد التوجه أو الأولوية التي تسمح بنمذجة السلوك المتبع عندما يحاول الزبائن من عدة أقسام الدخول إلى نفس مركز الخدمة، و على الرغم من تميز هذا النوع من الشبكات بمرونة كبيرة ، لكن دراستها تعتبر شديدة التعقيد².

نفرض أن شبكة صفوف انتظار مكونة من العقد $\{1,2,\dots,k\}$ ،نفرض أيضا أن تحرك زبون إلى العقدة j يكون باحتمال P_{ij} ($i, j = 1,2,\dots,k$) و ذلك بعد أن تم خدمته في العقدة i ، كما أن احتمال أن يقوم الزبون بالعودة إلى العقدة i لإعادة خدمته هو P_{ii} .

¹ U.NARAYAN BHAT ,2008, ib.id,p 142

² Jean francois heche,2003,op.cit,p133

في حالة شبكة صفوف انتظار مفتوحة، و لشرح المجال الخارجي الذي يأتي منه الزبائن ، أو يغادرون إليه بعد الانتهاء من خدمتهم، يجب أن نضع حالة إضافية 0، ذات الاحتمال الانتقالي (probabilités de transition) P_{00} حيث :

$$P_{0j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (2-76)$$

$$P_{i0} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2-77)$$

و

المصفوفة \mathbf{P} للاحتمالات الانتقالية (Matrice De Probabilité De Transition)، و التي تعرف أيضا بمصفوفة التوجيه (Matrice De Routage) يمكن تمثيلها كالآتي¹ :

$$\mathbf{p} = \begin{array}{c} \vdots \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline k-1 \\ \hline k \end{array} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & \dots & k \\ \hline 0 & 0 & P_{01} & \dots & P_{0k} \\ \hline 1 & P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1k} \\ \hline 2 & P_{20} & P_{21} & \dots & P_{2k} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline k-1 & P_{k-1,0} & P_{k-1,1} & \dots & P_{k-1,k} \\ \hline k & P_{k,0} & P_{k1} & \dots & P_{kk} \end{array} \right] \quad (2-78)$$

بالنسبة لشبكة مغلقة ، فإننا لا نحتاج للعقدة 0، كما يمكننا استنتاج عدة معلومات من مصفوفة التوجيه \mathbf{P} لاحتمالات الانتقال في الشبكة.

إن الشبكات التي لا تحتوي إلا على قسم واحد من الزبائن ليست كافية للحصول على نموذج يمكننا من وضع دراسة تحليلية بسيطة ، و عليه فمن دون فرضيات إضافية على عمليات الوصول و خدمة الزبائن ، فان عملية المحاكاة تبقى من بين الأدوات المستعملة لوضع النموذج.

و مع ذلك، ففي بعض الحالات الخاصة يمكن تحديد مدى استقرار النظام ، و تفسير السلوك الاستقراري (comportement stationnaire) بسهولة.

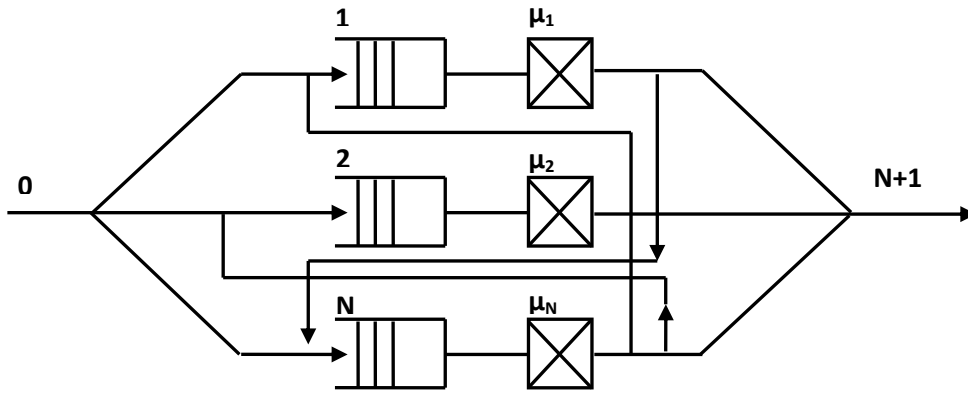
¹ U.NARAYAN BHAT ,2008, op.cit,p 142

و من بين النماذج التي تدخل ضمن هذا النوع من الحالات : شبكات جاكسون ،حيث تتميز بتوزيعات مستقرة على شكل منتج (forme produit) و التي تساوي حاصل ضرب التوزيعات الحدية المرتبطة بكل صف يشكل الشبكة.

لقد تم تعميم نتائج جاكسون عدة مرات ، خاصة شبكات BCMP من طرف عدة باحثين منهم : Baskett, Chandy, Muntz et Palacios و التي تعتبر أيضا توزيعات مستقرة على شكل منتج.

3-3-2. شبكات جاكسون :

نفرض وجود شبكة جاكسون مكونة من N صف انتظار كما هو مبين في الشكل الاتي ¹ :



الشكل 2-7: شبكة جاكسون

Source : G.PUJOLLE, S.FDIDA, *Modele De Systemes Et De Reseaux : Files D'attente*, Eyrolles, Paris, 1989, P : 41

تتكون هذه الشبكة من مراكز خدمة بتوزيع أسي بمعامل μ_i ، $\{i = 1, \dots, N\}$ ، إذا كانت الشبكة مفتوحة فسيكون لها مصدر معطى بالقيمة 0 و الذي يسمح بدخول الزبائن الذين هم خارج النظام إلى الشبكة و ذلك عبر الصف j باحتمال P_{0j} ، ثم ينتقل الزبائن داخل الشبكة وفق احتمالات التوجيه P_{ij} التي هي احتمال التوجه إلى الصف j بعد مغادرة الصف i .

إضافة إلى ذلك ، إذا كانت الشبكة مفتوحة فانه يوجد هناك محطة إضافية $N + 1$ التي عبرها يغادر الزبائن النظام .عبرها.

التدفق الكلي للزبائن الذين يصلون إلى النظام يكون عملية بواسون بمعامل λ .

¹ G.PUJOLLE, S.FDIDA, *Modèle De Systemes Et De Réseaux : Files D'attente*, Eyrolles, Paris, 1989, P : 41

$$\sum_{j=1}^{N+1} P_{ij} = 1 \quad i = 0, \dots, N \quad (2-79)$$

إذا كانت الشبكة مغلقة، فإن المحطتان: 0 و $N+1$ غير موجودتان، حيث انه لا يوجد زبائن يصلون إلى النظام أو يغادرونه، فعدد الزبائن يبقى ثابت.

2-3-3-1. شبكات جاكسون المفتوحة¹:

تعرف شبكة جاكسون المفتوحة على أنها شبكة تتشكل من ترابط n صف انتظار من نوع $M/m/1$ (و التي نفترض أنها مرقمة من 1 إلى n) حيث يصل الزبائن وفق توزيع بواسون و يتحركون بإتباع قواعد التوجه الماركوفية .

بعبارة أخرى ، فالزبائن يصلون من خارج النظام حسب توزيعات بواسون مستقلة، حيث أن معدل الوصول في صف الانتظار i باعتباره ثابت يساوي γ_i ($1 \leq i \leq n$).

كل محطة i في الشبكة خاضعة لنظام FIFO، تحتوي على عدد محدد m_i من مراكز الخدمة و التي تقدم خدمات ذات فترات مستقلة و ذات توزيعات متساوية حسب القانون الآسي بمعلمة ثابتة μ_i . عندما ينتهي أي زبون من تلقي الخدمة في الصف i ، فانه يوجه إلى الصف j وذلك باحتمال r_{ij} و يقوم بمغادرة النظام باحتمال :

$$r_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n r_{ij} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (2-80)$$

يمكن تمثيل حالة شبكة جاكسون في اللحظة t بواسطة الشعاع التوجيهي :

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

حيث : $x(t)$ هو عدد الزبائن المتواجدين في صف الانتظار i ($1 \leq i \leq n$)

انطلاقاً من الفرضيات الموضوعية المتعلقة بعمليات الوصول و عمليات الخدمة ، و أيضاً الخاصة بقواعد التوجيه، فمن الممكن التأكد من أن العملية : $\{x(t), t \geq 0\}$ هي عبارة عن سلسلة ماركوف بفترة مستمرة و لها فضاء عيني : $S = \prod_{+}^n$.

¹ Jean francois heche, 2003, op.cit, p134

• شروط الاستقرارية :

بديها ، و حتى تكون شبكة جاكسون مستقرة و تحتوي على توزيع مستقر ، يجب أن يكون المعدل الفعلي لعملية وصول الزبائن γ اصغر من المعدل الأقصى للخدمة. و هذا من اجل أي صف n يكون الشبكة.

نضع المعدل الفعلي لعملية الوصول في الصف i ، فادا كان النظام مستقر، فان هذا المعدل (معدل الوصول) يساوي معدل الخروج من الصف و يجب أن يحقق معادلات حفظ التدفق، حيث:

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^n \lambda_j r_{ji} , \quad i = 1, \dots, n \quad (2-81)$$

يمكن أيضا كتابة معادلات التوازن على الشكل المصفوفي كالتالي :

$$\lambda = \gamma + \lambda R \quad (2-82)$$

تكون عناصر مصفوفة التوجيه R محصورة بين 0 و 1 (حيث أنها عبارة عن احتمالات r_{ij})، و مجموع هذه العناصر في الأسطر لا يتعدى 1. إضافة إلى ذلك، و بما أن الشبكة مفتوحة، فانه يوجد على الأقل سطر أين يكون فيه المجموع اصغر تماما من 1.

ان المعادلة (2-82) تحتوي على حل وحيد ، و التي يساوي :

$$\lambda = \gamma + \lambda(I - R)^{-1} \quad (2-83)$$

و منه ، تكون شبكة جاكسون مستقرة إذا و فقط إذا كان كل صف انتظار يشكل هذه الشبكة مستقرا. أي إذا و فقط إذا كان الحل الوحيد لمعادلات حفظ التدفق يحقق :

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{m_i \mu_i} < 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (2-84)$$

• التوزيع المستقر¹ :

تعود تسمية شبكات جاكسون إلى العالم J.JACKSON الذي كان من الأوائل الذين تحصلوا على توزيع مستقر لهذا النوع من الأنظمة.

¹ Jean francois heche, 2003,op.cit,p136

وكان من نتيجة أعماله أن تم وضعها في النظرية التالية :

نظرية :

شبكة جاكسون مفتوحة ، مستقرة و مكونة من n صف انتظار لها توزيع مستقر وحيد معطى
بالعبارة:

$$\pi(x) = \prod_{i=1}^n \pi_i(x_i), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_+^n \quad (2-85)$$

حيث $\pi_i(x_i)$ هو التوزيع المستقر لصف الانتظار $M / M / m_i$ بمعدل وصول λ_i و معدل خدمة μ_i .
و منه ، و في نظام مستقر ، فان شبكة جاكسون تأخذ سلوك صفوف انتظار من نوع $M / M / m_i$
منفردة، و التي تتلقى زبائنها حسب توزيع بواسون كل على حدى.
كما يجب الأخذ في عين الاعتبار أن التدفقات في داخل الشبكة عموما ليست مستقلة و لا تتبع توزيع
بواسون.

ان التوزيع من نوع (2-85) يسمى توزيع على شكل منتج، و الشبكات المتعلقة بهذا التوزيع تدعى:

Réseau a Forme Produit شكل منتج شبكات

هناك عدة تحاليل لإثبات النتائج السابقة ، و الطريقة المباشرة (لكن ليست السريعة) تفرض علينا
التأكد من أن الاحتمالات $\pi(x)$ تحقق المعادلة :

$$\pi \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (2-86)$$

حيث \mathbf{A} هي مصفوفة مولدة لسلسلة ماركوف $\{x(t), t \geq 0\}$

هناك دراسة ثانية تحتم علينا أن نثبت أن شبكة جاكسون في نظام مستقر هي عبارة عن سلسلة
ماركوف معكوسة، و أن العملية المعكوسة هي عبارة عن شبكة جاكسون لها نفس معدل الخدمة في
مختلف المحطات ، لكن لها معدل الوصول الخارجي γ_i' و احتمالات التوجيه r_{ij}' التي تعطى بالعلاقة :

$$\gamma_i' = \lambda_i r_{i0}, \quad r_{ij}' = \frac{\lambda_j r_{ji}}{\lambda_i}, \quad r_{i0}' = \frac{\gamma_i}{\lambda_i}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (2-87)$$

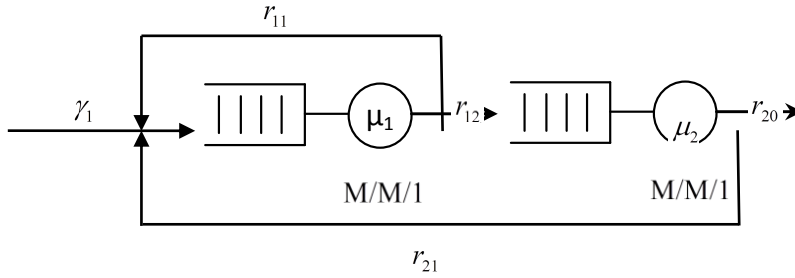
مثال :

نفرض أن شبكة جاكسون في الشكل التالي ، مع القيم التالية :

$$\gamma_1 = 6[h^{-1}], \quad \mu_1 = 15[h^{-1}], \quad \mu_2 = 10[h^{-1}]$$

و

$$r_{11} = \frac{1}{5}, \quad r_{12} = \frac{4}{5}, \quad r_{21} = \frac{1}{5}, \quad r_{20} = \frac{4}{5}$$



الشكل رقم 2-8 مثال على شبكة جاكسون

Source : Jean francois heche, 2003, op.cit, p137

للقيام بدراسة استقرارية الشبكة ، يجب علينا أن نقوم بحل المعادلة 1 (شروط الاستقرارية)، حيث تصبح-

حسب المثال - كما يلي :

$$\lambda_1 = \gamma_1 + \lambda_1 r_{11} + \lambda_2 r_{21}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 r_{12}$$

الحل الوحيد لهذا النظام هو :

$$\lambda_1 = \frac{\gamma_1}{1 - r_{11} - r_{12}r_{21}} = \frac{6}{1 - 1/5 - 4/25} = \frac{75}{8}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 r_{12} = \frac{75}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{15}{2}$$

كما أن كثافة حركة المرور في كلا الصفتين تساوي :

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{75}{8} \times \frac{1}{15} = \frac{5}{8}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{15}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{4}$$

و بما أن هاتان القيمتان هما اصغر من 1، فإن الشبكة مستقرة و لها توزيع مستقر على شكل منتج

معطى

$$\pi(x_1, x_2) = (1 - \rho_1) \rho_1^{x_1} (1 - \rho_2) \rho_2^{x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \text{بالعلاقة}$$

نفرض الآن أننا نريد حساب الفترة المتوسطة التي يقضيها الزبون في النظام (حيث ان النظام مستقر).

نقوم مباشرة بتطبيق صيغة **LITTLE** على الشبكة كلها، اذن الفترة \bar{T}_{sys} تساوي :

$$\bar{T}_{sys} = \frac{\bar{N}_{sys}}{\gamma_1} = \frac{\bar{N}_1 + \bar{N}_2}{\gamma_1} = \frac{\rho_1 / (1 - \rho_1) + \rho_2 / (1 - \rho_2)}{\gamma_1} = \frac{5/3 + 3}{6} = \frac{7}{9} [h]$$

2-3-3-2. شبكات جاكسون المغلقة¹ :

إن الأعمال الأولية لجاكسون و المتعلقة بالشبكات المفتوحة تم تعميمها و تعميمها عدة مرات

،خاصة من طرف **GORDON** و **NEWELL** اللذان أثبتا أن التوزيعات على شكل منتج تنطبق

أيضا على الشبكات المغلقة المكونة من صفوف الانتظار $-M/m$

في هذا النوع من الشبكات ، يكون : $\gamma_i = 0$ و $r_{i0} = 0$ و هذا مهما تكن قيمة i ، وعدد

الزبائن المتواجدين في النظام يكون ثابت ، إذا كان هذا العدد يساوي K فان الحالة $x(t)$ للنظام في

الفترة t تحقق :

$$K = \sum_{i=1}^n x_i(t) \quad (2-88)$$

و هذا مهما يكن $t \geq 0$ ، إن عدد الحالات الممكنة للعملية $\{x(t), t \geq 0\}$ هي اذن محدودة و

تساوي معامل ذي الحدين :

$$\binom{n+K-1}{K}$$

و الذي يحدد عدد الطرق لتوزيع K زبون في n صف انتظار.

النتائج المبينة من طرف **GORDON** و **NEWELL** هي:

¹ Jean francois heche, 2003, op.cit, p138

شبكة جاكسون المغلقة ليست دائما مستقرة فقط ، و إنما تحتوي أيضا على توزيع مستقر على

شكل منتج ، يعطى بالعلاقة :

$$\pi(x) = \pi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^n F_i(x_i) \quad (2-89)$$

حيث أن $G(K)$ هو ثابت التسوية **constant de normalisation** ، كما أن مجموع

الاحتمالات على جميع حالات الشبكة تكون مساوية لـ 1.

$$G(K) = \sum_{x \in S_K} \prod_{i=1}^n F_i(x_i) \quad (2-90)$$

حيث :

$$S_K = \left\{ x \in \mathbb{Z}_+^n / x_1 = \sum_{i=1}^n x_i = K \right\}$$

الدوال $F_i(x_i)$ المتعلقة بالاحتمالات المستقرة $\pi_i(x_i)$ للمحطة i في شبكة مفتوحة تعطى بالعلاقة :

$$F_i(x_i) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{x_i} \cdot \frac{1}{x_i!} & 1 \leq x_i \leq m_i \\ \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{x_i} \cdot \frac{1}{m_i! m_i^{x_i - m_i}} & m_i \leq x_i \leq K \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2-91)$$

إن القيم λ_i التي تظهر في العلاقة (2-91) هي، من اجل أي شبكة مفتوحة، حلول معادلات

التوازن (2-82) ، غير انه في حالة الشبكة المغلقة ، فان الشعاع γ يكون معدوم، و مصفوفة التوجه \mathbf{R}

تكون تصادفية ، و هذا يجعل المصفوفة $\mathbf{I-R}$ غير معكوسة.

النظام (2-82) له إذن عدد غير منتهي من الحلول تساوي كلها مضاعف ثابت **constant**

multiplicatif و لحل هذا المشكل يجب تثبيت القيم λ_i عند 1 ، (أو أي قيمة موجبة أخرى).

إن العقبة الأساسية التي تعترضنا عند دراسة شبكة جاكسون مغلقة لا تتواجد على المستوى النظري ، و

لكنها تظهر عند حساب التوزيعات المستقرة ، و بعبارة أدق ، عند حساب ثابت التسوية $G(K)$. إن

حساب هذا الثابت انطلاقا من تعريفه (2-90) ليس ممكنا ، وذلك حتى بالنسبة للقيم الصغرى لـ n و

k .

على الرغم من ذلك ، يوجد طرق فعالة كخوارزميات الالتفاف **algorithm de convolution** أو طرق التحليل بالقيم المتوسطة، و التي تسمح بحساب التوزيعات المستقرة للشبكة ذات الحجم المناسب¹ .

خلاصة:

لقد تناولنا في هذا الفصل بعض النماذج المشهورة لنظرية صفوف الانتظار ، حيث تنقسم إلى نماذج ماركوفية و غير ماركوفية ، ثم عممنا هذه النتائج لتشمل شبكات صفوف الانتظار . كما يجدر أن نشير إلى أن اغلب هذه النماذج تتميز بالتعقيد خاصة عند بنائها و إظهار النتائج عند تحليلها و تجريبيها، لهذا عادة ما نتجه إلى أساليب أخرى غير الأسلوب التحليل الرياضي عند معالجتها و من بين أهم هذه الأساليب : أسلوب المحاكاة الذي يتميز بالدقة و البساطة ، حيث يعتمد بالدرجة الأولى على علوم الإعلام الآلي لأنه يكون عادة عبارة عن برامج حاسوبية متخصصة. سنتناول في الفصل التالي أسلوب المحاكاة، كما سنعطي لمحة على برنامج **Arena** للمحاكاة و الذي يعتبر من أبسط البرامج استعمالا و تحليلا.

¹ Jean francois heche, 2003, op.cit, p139

الفصل الثالث

استخدام المحاكاة لحل

مشكل صفوف الانتظار

تمهيد:

عندما تزداد صعوبة المشاكل الإدارية فإنها لا تناسب التصنيفات القياسية التي يمكن حلها بالطرق الكمية المعهودة. كما أن تطوير نماذج خاصة لحلها مكلف من الناحية الزمنية والمالية، إلا أنه يمكن أن يكون ذلك من الأمور المستحيلة. فلقد أثبتت الوقائع أن المحاكاة هي طريقة تحليل كمي مناسبة للتعامل مع هذه المشاكل المعقدة ، فقد تلجأ الحكومة وشركات القطاع الخاص ومؤسسات الخدمة إلى تطوير نماذج محاكاة لمساعدتها في اتخاذ القرارات المتعلقة برقابة المخزون وبرامج الصيانة وتحديد مواقع بناء المصانع والاستثمارات والتنبؤ بحجم المبيعات... الخ¹

وتحتل المحاكاة مواقع متعددة في التطبيقات العملية ، فشركة بوينج للطائرات تستخدم نماذج المحاكاة لاختبار خصائص الديناميكا الهوائية **Aerodynamic** للطائرات النفاثة، كذلك تستخدم العديد من قوات الدفاع والجيش في الدول محاكاة خطط الحروب عن طريق ألعاب الحاسوب ، كذلك تستخدم العديد من الجامعات والمعاهد أسلوب المحاكاة لتعليم الطلاب فنون إدارة منظمات الأعمال في أسواق تنافسية . وفي مصر تستخدم بورصة الأوراق المالية نظاما تعليميا يعتمد على المحاكاة للتدريب والتعليم لكيفية المتاجرة في الأوراق المالية وتكوين وإدارة المحافظ يطلق عليه **Stock rider**².

سوف نوضح في هذا الفصل ماهية المحاكاة وكيف يمكن استخدامها لحل المشكلات ، و ذلك بيناء نماذج رياضية تمثل بشكل دقيق النظام في الواقع العملي، وكيف يمكن استخدام هذه النماذج لدراسة و تقدير الآثار المختلفة لتصرفات معينة من المحتمل أن يتعرض لها أو يسلكها النظام. كما سنقوم كذلك بتعريف برنامج **Arena** و الذي يعتبر أحد أهم برامج المحاكاة حيث يتميز بالوضوح و سهولة الاستخدام.

¹ نصير نعيم ، الأساليب الكمية و بحوث العمليات في الإدارة ، عالم الكتب الحديث،الأردن ،الطبعة الأولى ، 2004، ص542.
² السيد إسماعيل والعبد جلال، مرجع سبق ذكره، ص 337

III-1. مفهوم المحاكاة:

المحاكاة هي إحدى الوسائل المهمة لحل المشاكل **Problem Solving Techniques** و هي الوسيلة الوحيدة و الأخيرة لحل أي مشكلة إذا ما استعصى حلها بالطرق التحليلية **Analytic Methods** أو العددية **Numerical Methods**، و تعتمد المحاكاة على طرق إعادة المعاينة **Resampling Methods** و توليد أرقام و متغيرات عشوائية لها صفات معينة¹ فالمحاكاة هي محاولة تطبيق خصائص و مظاهر النظم الواقعية في شكل نماذج تقترب بشدة من الواقع و تعطي تصورا دقيقا له و لمشاكله، و من ثم يمكن تصميم ودراسة و وضع حلول للمشاكل المرتبطة بالنظم في الواقع العملي.

و يمكن تعريف المحاكاة على أنها : "إحدى طرق النمذجة تقوم بدراسة سلوك نظام خلال فترات معينة، و ذلك ببناء نظام ثان آخر له نفس هيكل النظام الأصلي، لكنه يكون أكثر بساطة عند معالجته. النظام الثاني يسمى: نموذج²."

تكمن الفكرة الأساسية للمحاكاة في أنها تمثل³:

1. محاكاة الواقع وحالاته المختلفة رياضيا؛
2. دراسة خصائص و صفات التشغيل ؛
3. استخلاص مقومات النظام واتخاذ القرارات المبنية على نتائج المحاكاة ؛

سوف نعرف أولا النظام و مكوناته⁴:

III-1-1. تعريف أولية :

- النظام **System**: مجموعة من الأشياء تتفاعل و تعتمد على بعضها البعض.
- كائن **Entity** : و هو شيء أو كينونة في النظام لنا بها اهتمام خاص.
- صفة **Attribute**: و هو خاصية للكائن.
- نشاط **Activity**: أي عملية تسبب تغيير في النظام.

¹ عدنان ماجد عبد الرحمن بري، *النمذجة و المحاكاة*، جامعة الملك سعود، قسم الإحصاء و بحوث العمليات، الرياض، 2002، ص 11

² Malika babes, *statistique, files d'attente et simulation*, OPU, Alger, 1995, p125

³ السيد إسماعيل والعبد جلال، مرجع سبق ذكره، ص 398

⁴ عدنان ماجد عبد الرحمن بري، مرجع سبق ذكره، ص 11

- حالة النظام **State of the System** : و هي متغيرات تصف كل الكائنات و صفاتها و الأنشطة في النظام عند لحظة معينة، و يدرس تطور النظام بتتبع التغيرات في حالته.

و الجدول التالي يعطي أمثلة لأنظمة معينة و بعض مكوناتها :

النظام	كائنات	صفات	أنشطة
مرور	سيارات	سرعة، مسافة... الخ	سياقة
بنك	زبائن	دائن، رقم حساب... الخ	سحب نقد، طلب قرض... الخ
اتصالات	مكالمات، رسائل	طول المكالمات، جهة الاتصال... الخ	إرسال، توصيل
سوق مركزي	زبائن	قائمة التسويق	دفع قيمة المشتريات

الجدول 1-3 : بعض الأنظمة الشائعة و مكوناتها
المصدر: عدنان ماجد عبد الرحمن بري، مرجع سبق ذكره، ص 12

و هذا الجدول لا يعطي حصر كامل لجميع الكائنات و الصفات و الأنشطة لهذه الأنظمة لأن ذلك يتطلب معرفة الأهداف التي من أجلها ندرس النظام ، و اعتمادا على الأهداف المطلوبة يمكن تحديد وصف أدق للنظام و مكوناته.

- **بيئة النظام** : يتأثر النظام بالتغيرات التي تحدث خارجه كما أنه يؤثر على المحيط من حوله، مثل هذه التغيرات تؤثر على بيئة النظام، فمن المهم جدا عند نمذجة النظام أن نميز الحدود بين النظام و بيئته و هذا يتحدد بمعرفة الأهداف من وراء دراسة هذا النظام.
- **الأنشطة الداخلية Endogenous Activities** : و تصف الأنشطة داخل النظام.
- **الأنشطة الخارجية Exogenous Activities** : و تصف الأنشطة في بيئة النظام و التي تؤثر على هذا النظام ؛ النظام الذي لا يتأثر بأنشطة خارجية يسمى نظام مغلق بعكس النظام الذي يتأثر بالأنشطة الخارجية و الذي يوصف بأنه نظام مفتوح.

● الأنشطة المحددة **Deterministic Activities** : و هي التي يمكن تحديد نتائجها بشكل تام من مدخلاتها.

● الأنشطة العشوائية **Stochastic Activities** : و هي التي يتغير تأثيرها بشكل عشوائي و تكون لنتائجها إمكانيات متعددة توصف بتوزيع احتمالي ، فمثلا الوقت الذي تستغرقه آلة للتجميع يوصف بتوزيع احتمالي كما أن الزمن بين أعطال آلة يتغير بشكل عشوائي.

● الأنظمة المتصلة **Continuous Systems** : و هي التي تتغير فيها حالة النظام بشكل مستمر ، فمثلا اتجاه حركة الطائرة في مسار جوي تحت تحكم الطيار الآلي تحدث بشكل ناعم **Smooth** لتصحيح الاتجاه

● الأنظمة المنفصلة **Discrete Systems** : و التي تتغير فيها حالة النظام بشكل متقطع مع الزمن، فمثلا إكمال بضاعة في المصنع يحدث بشكل متقطع ، وصول الطلب على البضائع يحدث بشكل متقطع... الخ.

● نمذجة النظام **System Modeling** :

○ النموذج Model: هو تجريد للنظام يتكون من تجمع لمعلومات حول النظام لغرض درسته، و لدراسة نظام ما يجب أن نكون أو نبني نموذج **Model** لوصف هذا النظام لغرض إجراء تجارب للإجابة على أسئلة و افتراضات لا يمكن إجرائها على النظام مباشرة ، و ذلك حتى لا يضطرب النظام الأصلي و يحدث ارتباك في عمله يؤدي إلى تغيير النظام و فقدانه لخواصه الأصلية ، كما أن دراسة النموذج بدلا من النظام تمكن من تجربة عدة حوارات حول النظام و ذلك بإعادة النموذج إلى الحالة الأصلية عند إجراء كل حوار بعكس النظام الأصلي الذي إذا تغير لا يمكن إعادته مرة أخرى إلى حالته الأصلية . فمثلا لدراسة نظام اقتصادي بتغيير سياسات العرض و الطلب قد يؤدي الى نتائج لا يمكن عكسها.

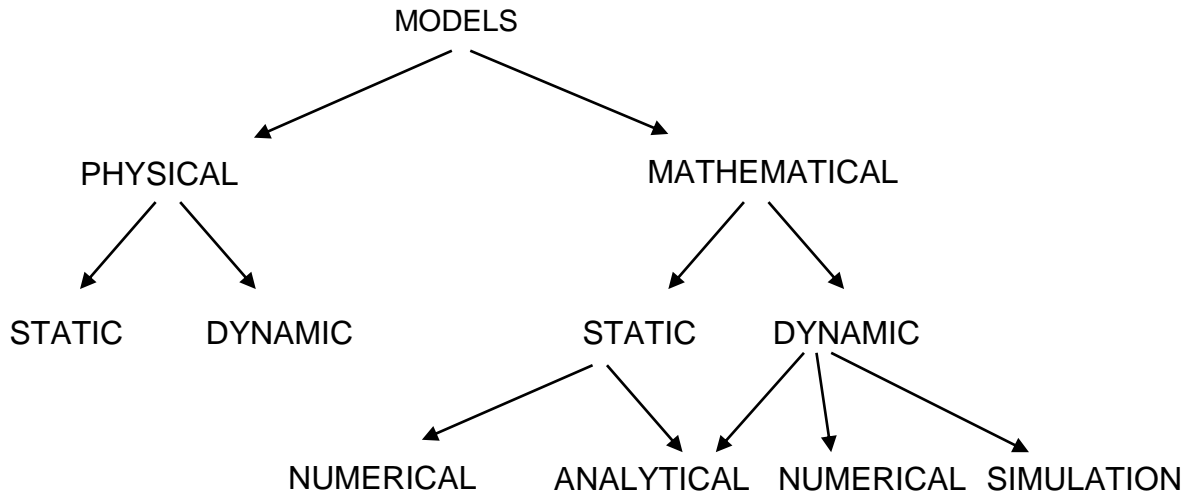
كما أن النموذج يمكن أن يدرس في أزمدة افتراضية ، فمثلا يمكن إجراء محاكاة للنظام باستخدام النموذج و معرفة بعض تصرفات النظام لفترات عدة اشهر أو سنين في دقائق قليلة، و كذلك يمكن عن طريق النموذج دراسة النظام قبل إنشائه و وجوده أصلا ، فمثلا نريد بناء مصنع و لدينا عدة خيارات للبناء فلتحديد أي خيار أفضل نكون نموذج لكل خيار و نحكي تصرف المصنع تحت هذه الخيارات . و للنموذج عدة أنواع نذكرها فيما يلي :

1. فيزيائية (مادية) Physical Models: وهي التي تبني بمواد حسية مثل بناء نموذج طائرة في مرحلة التصميم و ذلك لاختبار هيكلها تحت ظروف معينة.

2. رياضية (تحليلية أو تجريدية) Mathematical Models : و التي تستخدم لبنائها علاقات رياضية (توزيعات احتمالية، دوال، جداول، رسومات... الخ)

هناك أيضا تصنيف للنماذج الجامدة **Static Models** و التي لا تتغير حالتها مع الزمن و النماذج الحركية او الديناميكية **Dynamic Models** و التي تتغير حالتها مع الزمن.

و يمكن تمثيل أنواع النماذج بيانيا كالتالي:



الشكل 3-1 : تمثيل بياني لأنواع النماذج

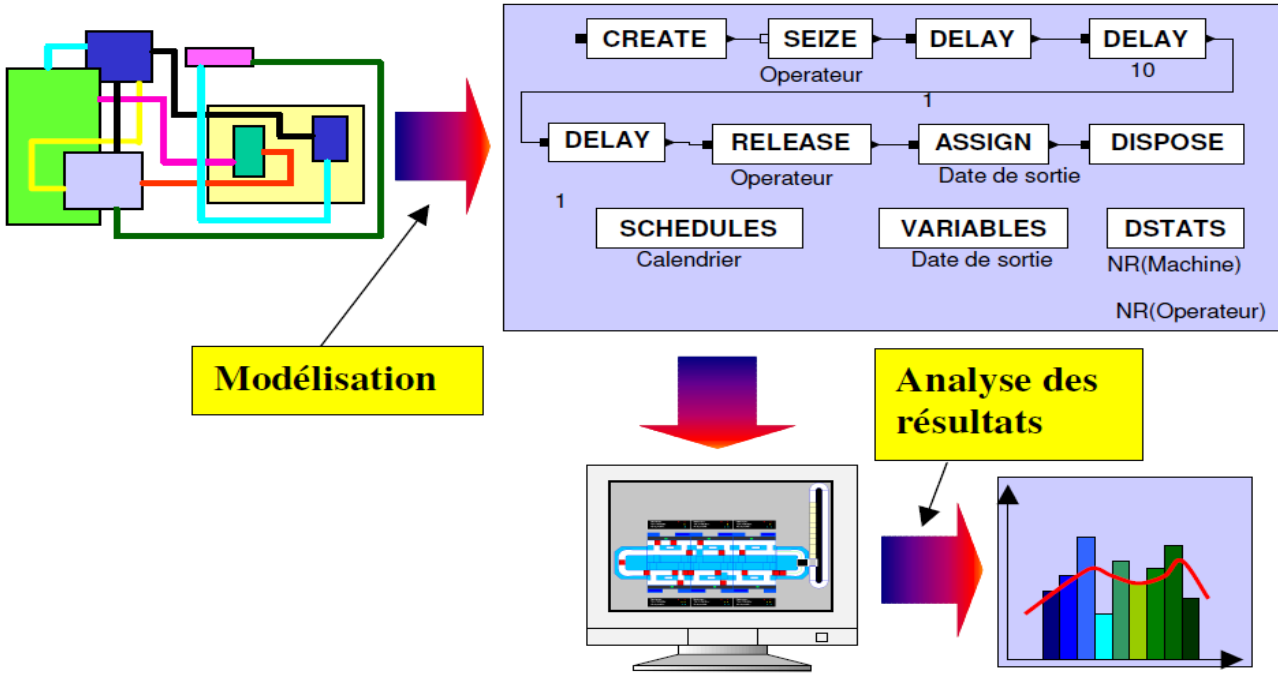
المصدر : عدنان ماجد عبد الرحمن بري، مرجع سبق ذكره، ص 14

III-1-2 الهدف الأساسي للمحاكاة :

إن المحاكاة هي عملية تتوقف على:

- بناء نموذج للنظام (الحقيقي) قيد الدراسة
- إجراء تجارب على هذا النظام (و ليس حسابات)
- تفسير الملاحظات الناتجة من تنفيذ النموذج ثم صياغة القرارات المتعلقة بالنظام

- يمكن أن يكون الهدف من إجراء المحاكاة هو فهم سلوك الديناميكي للنظام، مقارنة عدة تركيبات، تقييم مختلف الاستراتيجيات القيادية، تقييم و إيجاد الاستعمال الأمثل للكفاءات¹
- ملاحظة واكتشاف التغيرات التي تنتج في النظام وأدائه عند تغيير السياسات المتبعة².



الشكل (2-3) المراحل المتبعة لإجراء عملية المحاكاة

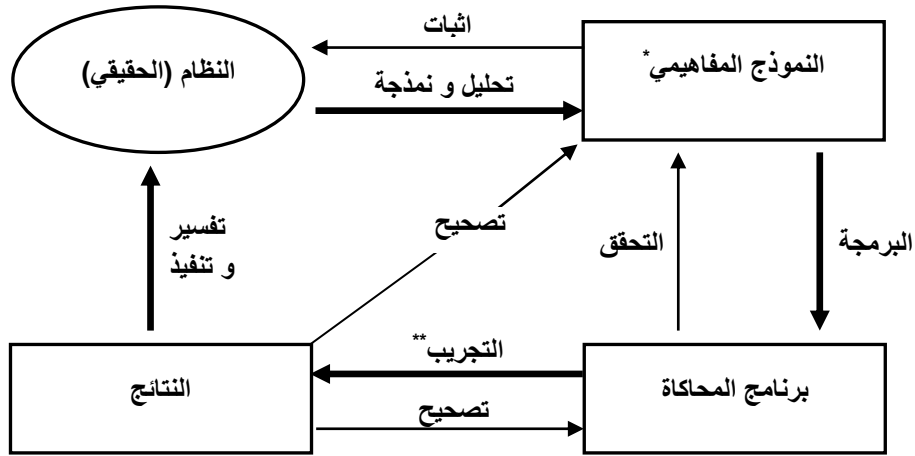
Source : Jean-Louis Boimond, *Simulation Systèmes De Production, Réseaux De Petri*, SIMAN – ARENA, France, p 3

III-1-3 الخطوات المتبعة لإجراء المحاكاة :

لإجراء المحاكاة نميز عادة أربع مراحل متميزة : النمذجة (تمثل سلوك النظام)، البرمجة، التجريب و أخيرا تفسير النتائج (مع التنفيذ).

¹ Jean-Louis Boimond, *Simulation Systèmes De Production, Réseaux De Petri*, SIMAN – ARENA, France, 2000, P 2

² Shafer scot M & merdih jack R, *opérations management a process approach with spreadsheets*, john wiley&son, usa, 1998, p536



(*) النموذج المفاهيمي هو نموذج تقريبي للنظام، و يكون مقيدا بهدف الدراسة.
 (**) التجريب : و تعني بناء النظريات، او الفرضيات التي تاخذ بعين الاعتبار سلوك الملاحظ

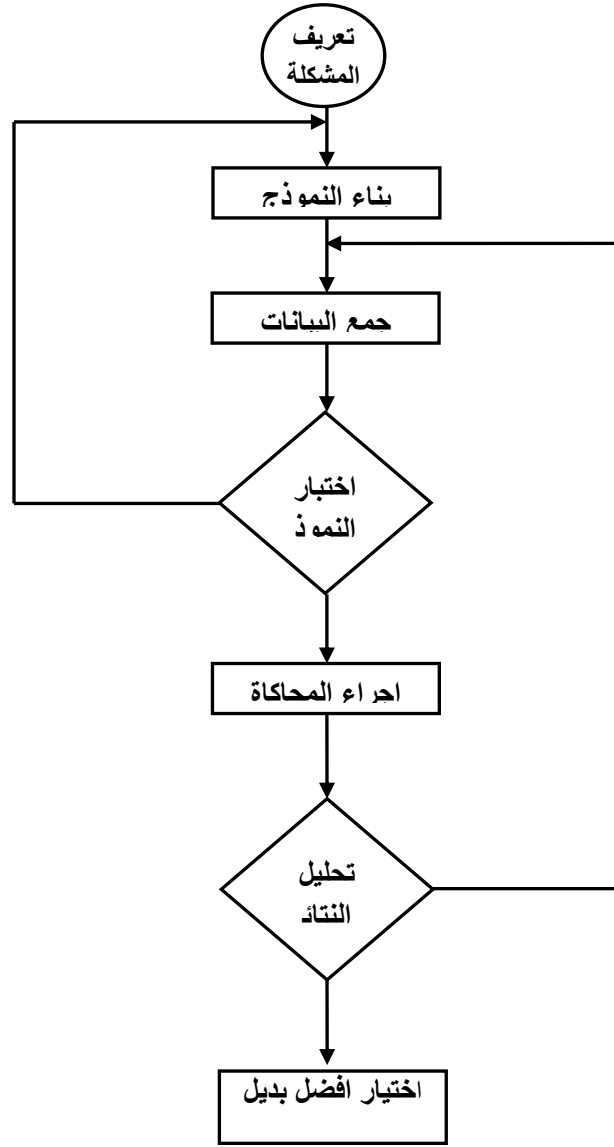
الشكل (3-3) : منهجية إعداد محاكاة

Source :Jean-Louis Boimond, op.cit,p3

إن الانتقال من النظام الحقيقي إلى النموذج المفاهيمي يعتبر مرحلة أساسية لإجراء المحاكاة ،
 ادن ،يمكن استخدام أسلوب المحاكاة بإتباع الخطوات التالية :

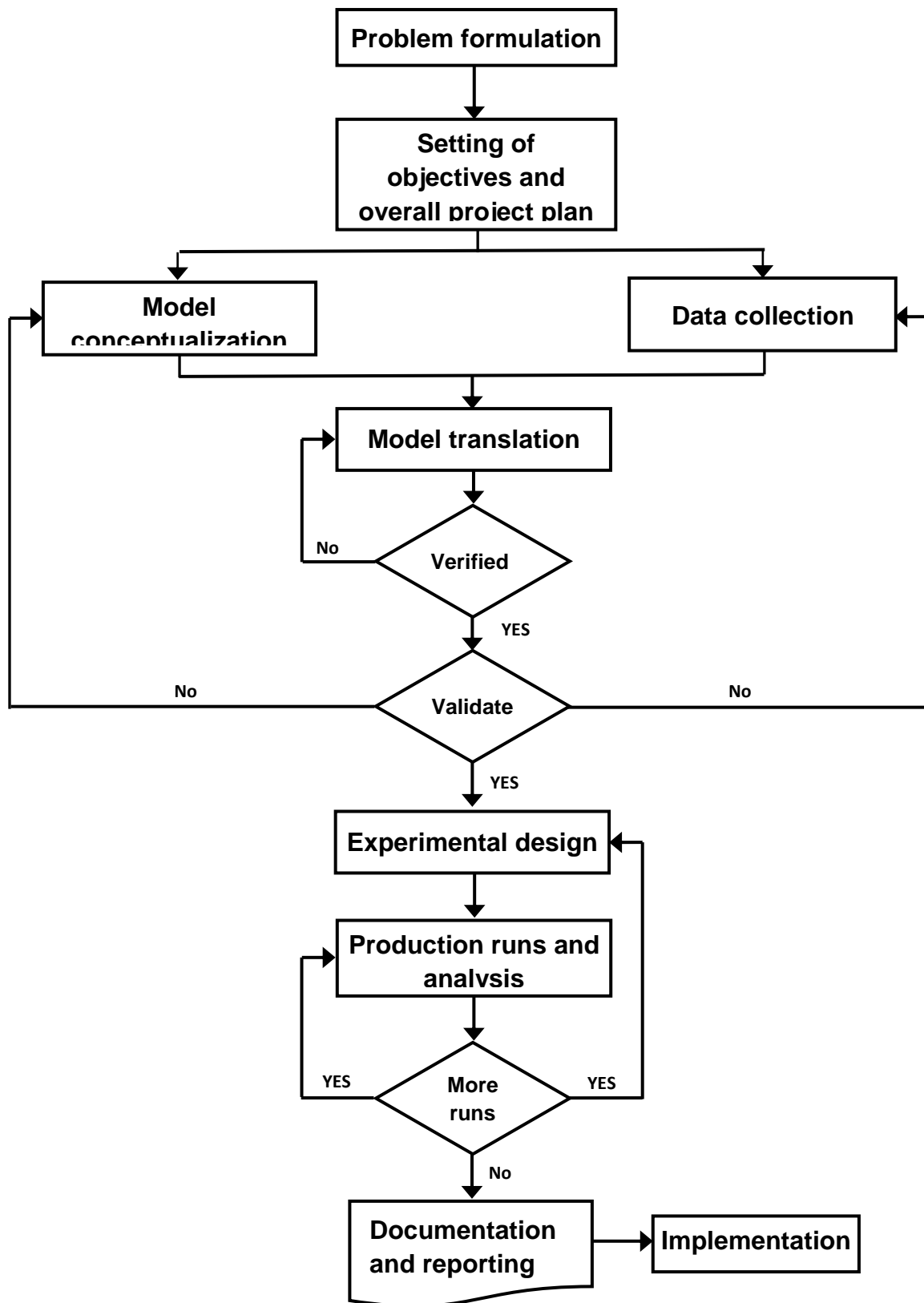
1. تعريف و تحديد المشكلة؛
2. تحديد المتغيرات الهامة المرتبط بالمسكلة؛
3. القيام ببناء نموذج رقمي (رياضي)؛
4. تحديد الطرق المختلفة للاختبار؛
5. القيام بتجربة و اختبار النموذج؛
6. استخدام النتائج في تعديل النموذج؛
7. تحديد أفضل التصرفات الممكن الاعتماد عليها و استخدامها.

الشكل رقم (1.1) يوضح خطوات المحاكاة:



الشكل رقم (3-4): خطوات عملية المحاكاة

المصدر: منال اسماعيل البحيصي، استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات ، مذكرة الماجستير غير منشورة، الجامعة الإسلامية، غزة، 2005، ص 20



الشكل 3-5 مخطط انسيابي لإعداد دراسة بواسطة المحاكاة
المصدر: عدنان ماجد عبد الرحمن بري، مرجع سبق ذكره، ص 17

III-1-4 استخدامات المحاكاة:

تستخدم المحاكاة لتصوير أو وصف حركة أو عملية أو نشاط أو نظام حقيقي واقعي غالبا ما يكون نظام معقد، وتعمل على تشغيل النظام الجديد وإجراء التجارب عليه و استخلاص النتائج منه، ويمكن استخدام المحاكاة في شتى المجالات¹.

يستحب استعمال أسلوب المحاكاة عندما يكون النظام الأصلي :

- سريع جدا بحيث لا نستطيع متابعة تطوره (كالتفاعلات الكيميائية أو العمليات الفيزيائية)
- بطيء جدا بحيث لا نستطيع قياس سلوكه خلال فترة مناسبة و عملية (نمو الأشجار، تطور البيولوجي... الخ)
- خطير جدا عند دراسته أو يسبب العديد من المشاكل على محيط الدراسة (التفاعلات النووية، محاكاة عملية الطيران، الخطط و المواجهات الحربية... الخ)
- غير موجود مسبقا (الأنظمة الصناعية، أنظمة المواصلات... الخ)
- يكون مكلف جدا بحيث لا نستطيع اختبار سلوك العديد (أو الملايين) من المتغيرات.(سياسة تسيير السلاسل اللوجستية... الخ)

كما تستخدم المحاكاة أيضا في تطبيقات مختلفة. ويمكن وضع الاستخدامات المتنوعة للمحاكاة في ثلاث فئات واسعة:

1. التصميم: حيث تقدم تصميمات (أو سياسات) النظم البديلة باعتبار مقياس محدد لأداء النظام .
2. التشخيص: تستخدم المحاكاة في بعض المواقف لدراسة سلوك النظام تحت شروط بديلة. وليس القصد هو تقويم السياسات البديلة ولكن لتشخيص المشكلات المحتملة ظهورها.
3. التدريب: ويمكن استخدام المحاكاة كأداة لتدريب المستفيدين لأداء مهامهم بفعالية²

¹ عاشور يوسف حسين، *مذكرات في بحوث العمليات*، فلسطين، 1995، ص 53
² بفا ألورد اسن و سارن راكيش كي، *إدارة الإنتاج و العمليات مدخل حديث*، دار المريخ، الرياض ، السعودية، الطبعة الاولى، 1999، ص 354

III-1-5 مزاي و عيوب المحاكاة :

المحاكاة تعتبر أداة تلقى قبولا من المديرين للعديد من الأسباب منها¹:

1. المحاكاة أسلوب يتصف بأنه مباشر و مرن
2. تستخدم لتحليل الكثير من الآلات المعقدة في الواقع العملي، و التي يصعب حلها باستخدام النماذج الرياضية.
3. يمكن من خلالها استخدام أي توزيعات احتمالية يمكن للمستخدم تحديدها و ليس من الضروري الاقتصار على توزيعات محددة
4. اختصار الوقت، فمن خلال الحاسبات الآلية يمكن إجراء المحاكاة و اختصار السنين إلى أيام أو أسابيع.
5. تسمح المحاكاة بإثارة التساؤلات من نوع ماذا يحدث لو ؟ مما يساعد المدير في الاختيارات الأكثر جاذبية و قبولا.
6. تسمح المحاكاة بتحديد و دراسة الآثار المتبادلة للمكونات أو المتغيرات بالشكل الذي يسمح بتحديد أكثرها أهمية للنظام.

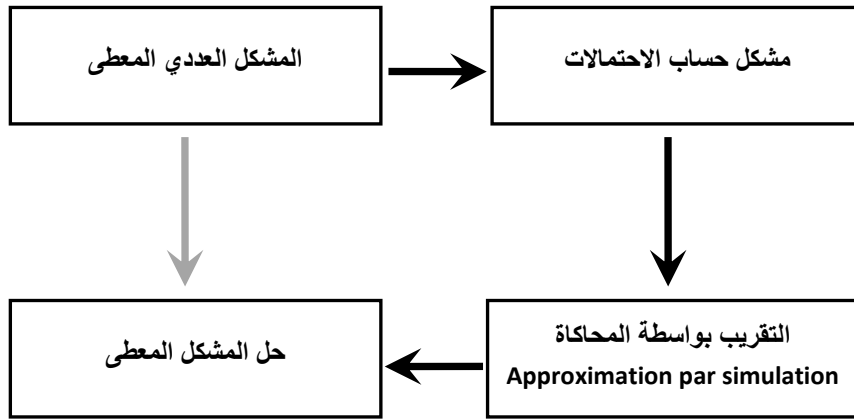
و على الرغم من المزايا السابقة ، و قبول المحاكاة كأداة لدراسة المشاكل و تطوير حلول متقدمة لها، فإنها لا تخلو من جوانب قصور عديدة منها :

1. تتطلب نماذج المحاكاة الجيدة تكاليف مرتفعة، و قد تستغرق سنوات لتصميمها و بناءها.
2. لا تقدم المحاكاة حلولاً مثلى للمشاكل مثل أسلوب البرمجة الخطية مثلا، إذ أنها أسلوب يقوم على التجربة و الخطأ، و من ثم يتولد لدعم المحاكاة حلولاً عدة مع كل محاولة.
3. نماذج المحاكاة لا تولد حلولاً من ذاتها، بل على المدير أن يحدد الظروف و القيود التي يرغب في اختيارها.
4. يمثل كل نموذج للمحاكاة أسلوباً منفرداً ، و من ثم لا يمكن تحويل الحلول و الاستدلالات من نموذج تصميم لمشكلة معينة إلى مشكلة أخرى.

¹ جلال ابراهيم العبد، استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، دار الجامعة الجديدة للنشر، الاسكندرية، 2004، ص: 458

III-2 طريقة مونت كارلو في المحاكاة :

يعتبر أسلوب مونت كارلو اصل المحاكاة العشوائية ، تم ابتكارها من طرف NEUMANN و طورت من طرف METROPOLIS ، رغم أنها تتركز على المراكز العددية الغير تصادفية. لقد حقق أسلوب مونت كارلو نجاحات كبيرة خاصة في حساب التكامل المتعدد (calculé integrale multiple) و في حلول المعادلات التفاضلية ذات الاشتقاق الجزئي، وأخيرا في optimisation combinatoire كما يعتبر الأسلوب الإحصائي لإعادة اختبار العينات (reechantillonnage) (bootstrap) إحدى التطبيقات المهمة لطريقة مونت كارلو.



الشكل 6.3 : مخطط يمثل طريقة مونت كارلو

Source : jean heche, opcit, p 295

III-2-1 تعريف طريقة مونت كارلو:

يستخدم أسلوب " مونت كارلو " عندما يتضمن النظام عناصر واضحة لها فرصة للتأثير في سلوك النظام ، وهذا يشير في الواقع إلى أن أسلوب "مونت كارلو" هو أسلوب احتمالي ، يقوم على تجربة الفرص المحتملة من خلال معاينة عشوائية .

III-2-2 الخطوات المتبعة لإجراء المحاكاة:

ويمكن تقسيم أسلوب "مونت كارلو" إلى خمسة خطوات¹:

1. تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغيرات الهامة في النظام.
2. تحيد التوزيع الاحتمالي لكل متغير.
3. تحديد مدى من الأرقام العشوائية لكل متغير.
4. توليد الأرقام العشوائية.
5. القيام بالمحاكاة لسلسلة من المحاولات.

وسوف نتناول الخطوات السابقة بشيء من التفصيل فيما يلي:

أولاً. تحديد التوزيع الاحتمالي:

تقوم الفكرة الأساسية لأسلوب "مونت كارلو" على توليد قيم لمتغيرات النموذج التي سيتم دراستها ، ويوجد العيد من المتغيرات التي تأخذ الصفة الاحتمالية في الواقع العملي مثل:

- الطلب اليومي أو الأسبوعي من المخزون.
- الزمن المنقضي بين الأعطال التي تتعرض لها آلة معينة.
- الأزمنة المنقضية بين الوحدات التي تصل لتلقى خدمة معينة.
- أوقات أداء الخدمة
- الأوقات اللازمة لإنجاز أنشطة مشروع معين.
- عدد العمال الذين يتغيبون عن العمل في كل يوم.

والأسلوب الأمثل لتحديد التوزيع الاحتمالي لمتغير معين ، يتمثل في اختبار سلسلة القيم التاريخية لهذا المتغير ، حيث يتم تحديد الاحتمال أو التكرار النسبي ، وذلك بقسمة عدد التكرارات أو الملاحظات على إجمالي عدد المشاهدات أو التكرارات.

¹ جلال إبراهيم العبد، مرجع سبق ذكره، ص 459

ثانيا: تحديد التوزيع الاحتمالي لكل متغير:

يتم تحديد الاحتمال المتجمع عن طريق إضافة الاحتمالات الحالية للاحتتمالات السابقة باستمرار.

ثالثا: تحديد مدى للأرقام العشوائية:

بمجرد تحديد الاحتمالات المتجمعة لكل متغير، فإنه يجب تخصيص مجموعة من الأرقام لتمثل كل قيمة من القيم الممكنة للمتغير، و التي يشار إليها بالمدى من الأرقام العشوائية، والأرقام العشوائية هي مجموعة من الأرقام مثل (1 ، 2 ، 9 ، 5 ، 000) يتم اختيارها بشكل عشوائي.

رابعا: توليد الأرقام العشوائية:

الأرقام العشوائية، هي جميع الأرقام التي يتم توليدها من الأرقام الأساسية وهي صفر حتى 9 . وبحيث يكون هناك فرصة متساوية و عادة ما يتم الاستعانة ببرامج للحساب الآلي لتوليد هذه الرقام الخاصة اذا كنا في حاجة لتوليد حجم كبير من الأرقام العشوائية.

III-2-3 استخدام المحاكاة في حل مشاكل نظرية الصفوف:

تمثل صفوف الانتظار أحد مجالات إدارة العمليات التي يمكن استخدام أسلوب المحاكاة في حل مشاكلها وتطبيقاتها. بل وقد تعتبر المحاكاة الأسلوب الوحيد الذي يمكن من خلاله تحليل صفوف الانتظار في الواقع العملي، بعيدا عن القيود التي تتطلبها النماذج الرياضية لصفوف الانتظار¹ و التي عرضناها في الفصل الثاني .

سنقوم بتوضيح كيفية استخدام المحاكاة في حل مشكل الانتظار على نموذج صف انتظار من نوع

G/G/1

¹ جلال ابراهيم العبد، مرجع سبق ذكره، ص471

1. محاكاة صف انتظار G/G/1¹

لقد قمنا في الفصل الثاني بدراسة نظام صف الانتظار مكون من مركز خدمة و صف انتظار واحد من نوع G/G/1 و بعض خصائصه.

نذكر أن أي زبون يصل إلى نظام من هذا النوع يتم خدمته حالا من طرف مركز الخدمة ، وهذا إذا كان هذا الأخير فارغا ، و في حالة العكس فانه يلتحق بصف ذو قدرة استيعاب غير منتهية ، حيث ينتظر أن يتم خدمة الزبائن الذين قبله و ذلك حسب ترتيب وصولهم إلى النظام قبل أن يتلقى الخدمة بدوره.(قاعدة أولوية FIFO).

إن الفاصل الزمني بين عمليتي وصول متتاليتين للزبائن تشكل متتالية $\{\alpha_i\}$ من المتغيرات العشوائية

$$E[\alpha] = 1/\lambda \text{ مع } F_\alpha(t) \text{ دالة التوزيع}$$

و بنفس الشكل ، فان فترات الخدمة للزبائن متتالين تشكل متتالية $\{\beta_i\}$ من المتغيرات العشوائية

$$E[\beta] = 1/\mu \text{ مع } F_\beta(t) \text{ دالة التوزيع}$$

مستقلة عن عملية وصول الزبائن.

نذكر أيضا أن النظام مستقر ، و يحقق هذه الاستقرارية إذا و فقط إذا كان :

$$\rho = \lambda/\mu < 1 \text{ و التي يفترض أنه يحققها.}$$

إن هدف المحاكاة هو تقدير العدد المتوسط \bar{N} للزبائن المتواجدين في النظام ، و أيضا الفترة

المتوسطة \bar{T} لبقاء الزبون في النظام (يعتبر حساب هذه القيم جد صعب في نظام G/G/1 ، و لكنه يعتبر

سهلا في حالة نظام M/M/1)

ليكن المتغير n ، الذي يمثل في أي لحظة t قيمة الدالة n_t ، عدد الزبائن المتواجدين في النظام

(إضافة إلى عدد الزبائن قيد الخدمة).

لتكن أيضا القيمة : $n_{cum} := \int_0^t n_t dt$ التي تمثل العدد الكلي للزبائن \times وحدة الزمن ، و الذين

بقوا في النظام في الفاصل الزمني $[0, t]$. و الذي يتبع العدد المتوسط للزبائن المتواجدين في النظام في أي

فترة خلال الفاصل الزمني $[0, t]$:

$$\bar{N} = n_{cum} / t$$

¹ Jean francois heche,op.cit,p291

لإجراء هذه المحاكاة، يجب تعريف أربع أحداث: بداية، نهاية، وصول و مغادرة و التي تعتبر أربع أطراف للخوارزمية بإمكانها تغيير حالة النظام.

III-3 المحاكاة بالحاسوب و بواسطة الحزمة البرمجية Arena

تتضمن نماذج المحاكاة بعض التبسيطات الممكنة لعالم الواقع، فإن وظيفة التعبير عن العلاقات الداخلية تكون صعبة في العادة. إضافة إلى ذلك، تتضمن كل دراسة محاكاة عدد كبير من الحلول اللازمة للوصول إلى حالة التوازن. كذلك يجب إعادة جميع عملية المحاكاة في حالة حصول أي تغيير في بعض المدخلات الإحصائية .

وكأداة وصفية، من الضروري إجراء اختبارات متكررة لأشكال النظام المختلفة، والنتيجة أو المحصلة النهائية لكل ذلك هي الحاجة الماسة إلى جهود حسابية كبيرة، ولذلك فإن الحاسبات الالكترونية مرغوب بها و لازمة لإجراء دراسة نماذج المحاكاة.

III-3-1 دور الحاسبات الالكترونية في المحاكاة:

يعتبر الحاسب الإلكتروني أداة مساعدة مثالية لمحاكاة المشاكل الصعبة فالحاسبات لها إمكانية إحداث الأرقام العشوائية، كما تستطيع محاكاة آلاف من الفترات الزمنية بمجرد ثوان أو دقائق من أجل تزويد الإدارة بالتقارير التي تسهل وتمكن عملية اتخاذ القرار.

هنا نوعان من لغات برمجة الحاسوب المتوفرة للمساعدة في عملية المحاكاة:

النوع الأول : اللغات ذات الأغراض العامة (general purpose languages) و تتضمن لغات الفورتران و بيسيك و كوبول و الجول (Fortran,Basic,Cobol Et Algol)

النوع الثاني: لغات المحاكاة ذات الأغراض الخاصة (special purpose language simulation)، و طورت هذه اللغات خصيصا للحصول على الفوائد التالية:

1. تحتاج إلى وقت برمجة أقل من نماذج المحاكاة الكبيرة.

2. أكثر كفاءة وأسهل في البحث عن الأخطاء.
3. تحتوي على طرق لإحداث الأرقام العشوائية¹.
4. سهولة التعلم
5. تقلل إلى درجة كبيرة من تكلفة تغيير الحاسوب فنكتفي فقط بتغيير البرمجيات بدون تغيير
6. المكونات الصلبة للجهاز.

وهناك عدة حزم برمجية ذات الأغراض الخاصة ، نذكر منها على سبيل المثال :

1. GPSS (General Purpose System Simulation)
2. Simiscript
3. GASP (General Activity Simulation Package)
4. Arena
5. VISUAL SLAM

وجميعها سهلت عمليات المحاكاة لنظم الحياة الواقعية وتجربة البدائل المختلفة

III-3-2 الحزمة البرمجية Arena:

تختص Arena في تحليل و نمذجة ومحاكاة العمليات Modeling Process Analysis and Simulation لدعم قرارات الأعمال Business Decision Support والعملية Process هي أي إجراء أو عمل يتم على كائن في النظام بواسطة مورد Resource من موارد النظام.

والكائنات Entity هي أشياء حركية تتفاعل مع مكونات النظام ومع بعضها البعض وتقوم باستخدام موارد النظام. وقد يكون هناك أكثر من نوع واحد من الكائنات في النظام الواحد. تقوم Arena بنمذجة العمليات وذلك بمتابعة كائنات تمر بمراحل من العمليات في النظام.

حزمة Arena يمكن التعامل معها من خلال بيئة الويندوز العادي أو الشبكات (windows NT) وهذه الحزمة تتميز بسهولة التعامل معها، فهي تحوى العديد من الرسومات والأشكال الجاهزة التي تسهل القيام بعملية المحاكاة ، فلا يتطلب من القائم بعملية المحاكاة سوى الإلمام

¹ نصير نعيم، مرجع سبق ذكره، 2004، ص 571

بديايات حزمة الويندوز من تعامل بالفأرة وفهم القوائم العادية ومن تم جمع البيانات اللازمة للنموذج، ثم القيام بعملية المحاكاة ، وحزمة Arena تستطيع نقل البيانات من وإلى البرامج الأخرى بسهولة مثل Word,Excel,Cad .

حزمة Arena تعطي القوة لنموذج المحاكاة الخاص بتطوير الأعمال. فيستطيع متخذ القرار بسهولة المقارنة بين البيئة الحالية والبيئة المعدلة ، فهي تستخدم لمحاكاة النظام الحقيقي لتمكن المعد من ملاحظه النظام ومتابعة التغيرات التي تحدث في النظام ، وتعطي فرص غير محددة لتجربة البدائل والفرضيات بدون التأثير على سير العمل في النظام المدروس ، كما تمكن متخذ القرار من جعل الخطة أكثر حيوية وتتمتع بالحركة .

فعندما تترج المعرفة بيئة النظام والمعرفة بأساسيات النموذج تكون على طريق التصحيح والتطوير والوصول إلى القرارات السليمة و الصائبة¹.

في هذه الدراسة استخدم الباحث حزمة Arena لمحاكاة خطوط الانتظار في إحدى الأرصفة لميناء مستغانم واختيار الحل الأمثل للمشكلة .

III-3-3 أسباب استخدام حزمة Arena

استخدمت الحزمة بسبب الإمكانيات التي تتمتع بها، والتي تشمل ما يأتي:

1. تتمتع الحزمة بواجهة صديقة (friendly interface) أي سهولة الاستخدام و الاستعمال من قبل المستخدم.
2. لها القدرة على إنشاء السيناريوهات المختلفة.
3. إمكانية إدخال البيانات بسهولة.
4. سهولة إخراج التقارير
5. مدعمة بالرسوم المتحركة مما يعطي النظام المدروس حيوية.

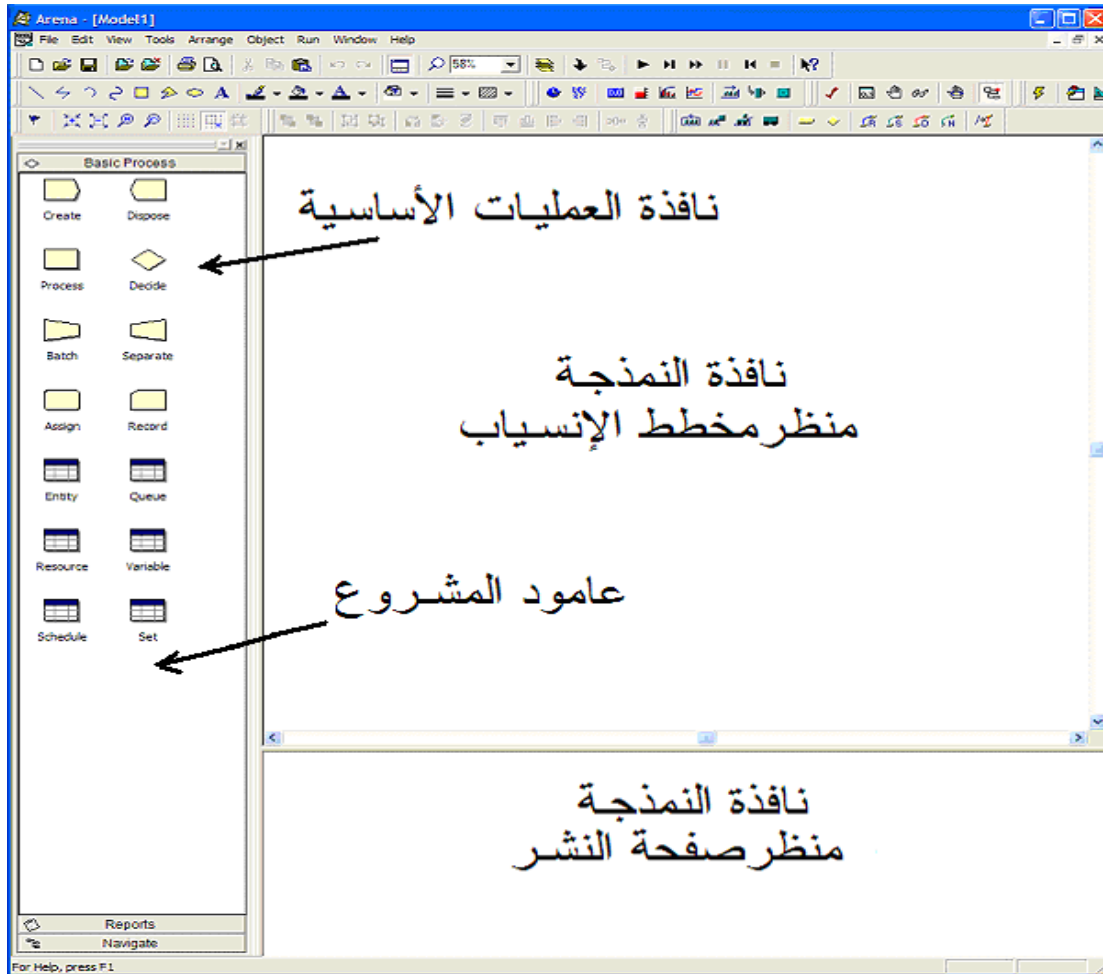
فمن خلال عدة خطوات بسيطة وإدخال البيانات اللازمة نستطيع إجراء المحاكاة بكل سهولة ونختار الحل المناسب .

¹ منال اسماعيل البحصي، استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات ، ،مذكرة الماجستير غير منشورة،الجامعة الإسلامية غزة،2005،ص 25

III-3-4 مكونات Arena:

شغل برنامج Arena فتظهر نافذة النمذجة منظر مخطط الانسياب والتي يتم فيه إدخال النموذج على شكل مخطط إنسياب و نافذة النمذجة منظر صفحة النشر

ويظهر فيه خواص مكونات النموذج على شكل صفحة نشر وعمود المشروع Project Bar ويحوي على لوحة العمليات الأساسية Basic Process Panel ولوحة التقارير Reports Panel و نافذة التحوال Navigate Panel كما يمكن إضافة لوحات أخرى بالضغط بزر الفارة الأيمن داخل عمود المشروع فتظهر نافذة حوار أختار منها Attach... فتظهر قائمة من الملفات تحوي لوحات متطورة مثل العمليات المتطورة Advanced Process Panel ولوحة القوالب Blocks Panel ولوحة العناصر Elements Panel وغيرها 1. (انظر الشكل رقم 3-7)



الشكل رقم (3-7): الواجهة الأساسية لبرنامج Arena

¹ عدنان ماجد عبدالرحمن بري ، نظام المحاكاة Arena ، جامعة الملك سعود ، الرياض ، 2004 ، ص 10

1. الخطوات الأساسية للقيام بالمحاكاة بواسطة Arena¹

1. رسم مخطط انسيابي للنموذج (flowchart)؛
2. إدخال البيانات اللازمة للمخطط ؛
3. مراجعة وتجهيز المحاكاة؛
4. حفظ النموذج؛
5. إجراء المحاكاة؛
6. مراجعة تقارير المحاكاة؛
7. تدعيم العمليات بالرسومات؛
8. إجراء التعديلات المناسبة؛
9. اجراء المحاكاة مرة أخرى.


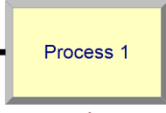
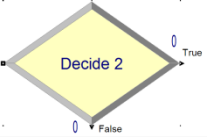
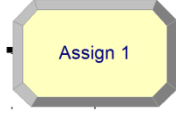
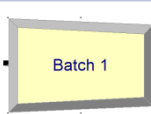
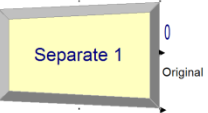


2. المخطط الانسيابي للبرنامج :

من الخطوات الأساسية والمهمة في حزمة Arena إنشاء المخطط أو الهيكل الأساسي للعمليات التي يمر بها النموذج ولنستطيع رسم هذا المخطط لابد من معرفة الرموز (modules) الأساسية للحزمة والتي نحصل عليها من شاشة العمليات الرئيسية، وتتكون من 08 رموز تعبر عن العمليات الأساسية و06 رموز تعبر عن نماذج البيانات:

3. الرموز الأساسية التي تستخدم في بناء المخطط الانسيابي:

لبناء المخطط الانسيابي للنموذج، يتوفر في الحزمة البرمجية 08 رموز أساسية (the flowchart modules) تستخدم في بناء النموذج الأساسي لحزمة Arena والتي تظهر في الجدول التالي :

¹ منال اسماعيل البحيصي ، مرجع سبق ذكره،ص 25

الوصف	name	الرمز	الاسم	الرقم
يعبر عن نقطة البداية للمدخلات في نموذج المحاكاة	Create module		رمز انشاء نموذج	1
العملية الأساسية في عملية المحاكاة	Process module		رمز المعالجة	2
يعبر عن عملية اتخاذ القرار في النظام	Decide module		رمز القرار	3
يُخصص قيم جديدة للمتغيرات	Assing module		رمز التخصيص	4
تقنية التجميع داخل المحاكاة	Batch module		رمز التجميع	5
تقنية التوزيع (التفريق) بين التجمعات السابقة	Separate module		رمز التوزيع	6
تجميع الإحصائيات في المحاكاة	Record module		رمز التسجيل	7
نقطة النهاية للمدخلات	Dispose module		رمز الاقرار	8

الجدول رقم (2.3) رموز العمليات الأساسية في حزمة Arena
المصدر: منال اسماعيل البحيصي ، مرجع سبق ذكره، ص 25

كما تحتوي الشاشة الرئيسية للبرنامج على 06 رموز للبيانات وجميعها تشبه رسماً لجدول وهي:

1. رمز المدخلات Entity Module :

وهو الرمز الذي من خلاله تعرف الأنواع المختلفة للمدخلات والصور الأولية للقيم في المحاكاة .

2. رمز خطوط الانتظار Queue Module

ويستخدم لتغيير ترتيب خطوط معينة حسب أولويات معينة.

3. رمز الجدولة Schedule Module

ويستخدم بالربط مع رمز الموارد لتعريف جدولة العمليات لمورد معين ، أو مع رمز الإنشاء لتعريف جدولة الوصول

4. رمز المجموعات Set Module

من خلال هذا الرمز تعرف أنواع مختلفة من المجموعات من ضمنها الموارد، الحسابات ، أنواع المدخلات، وصور المدخلات.

5. رمز التغيرات Variable Module

يستخدم لتعريف أبعاد المتغيرات والقيم الأولية . فمن ممكن أن تنسب المتغيرات إلى مركبات أخرى. أو تسجل قيم جديدة مع رمز التعيين.

6. رمز الموارد Resource Module

هذا الرمز يسمح بتعريف الموارد في نظام المحاكاة متضمنة تكاليف المعلومات . وممكن أن تستخدم الموارد طوال عملية المحاكاة بدون أي تغيير أو تستخدم تبعاً لجدولة معينة.

خلاصة:

تطرقنا في هذا الفصل إلى أسلوب المحاكاة و الذي يعتبر إحدى الوسائل المهمة لحل المشاكل التقنية، حيث تعتبر الوسيلة الوحيدة و الأخيرة لحل أي مشكلة إذا ما استعصى حلها بالطرق التحليلية أو العددية. كما أنها تعتمد على طرق إعادة المعاينة و توليد أرقام و متغيرات العشوائية ذات صفات معينة. سنقوم في الفصل التالي بتطبيق نظرية صفوف الانتظار ، و التي عرفناها في الجزء النظري، على احد أرصفة مؤسسة ميناء مستغنام، و ذلك من اجل حل مشكل الانتظار و الضغط الذي يعاني منه هذا الرصيف، كما سندرس إمكانية إضافة رصيف آخر و أثره الاقتصادي على مردودية الميناء. كما سنحاول أيضا إجراء عملية محاكاة على الرصيف خلال فترة زمنية محددة بواسطة برنامج النمذجة و المحاكاة **Arena** و معرفة سلوك السفن و تحليل مشكلة انتظارها.

الفصل الرابع

الجزء التطبيقي

مقدمة

في هذا الجزء سوف نتطرق لبناء نموذج رياضي خاص بصفوف الانتظار للرصيف من أجل إيجاد عدد مراكز الخدمة المناسب الذي يمثل لنا دالة الهدف لهذا النظام حسب ضوابط ومعايير يتم تحديدها من قبل إدارة الميناء حيث تمثل هذه الضوابط قيود في هذا النظام وهذه الضوابط تتنوع أما أن تكون تهم بالجودة العالية كأن نشترط بأن لا يتعدى طول الصف عدد معين من البواخر أو لا تنتظر الباخرة أكثر من زمن معين في الصف أو النظام إلى غيرها من معايير الجودة ، أو أن تهم إدارة الميناء بإيجاد التكلفة المناسبة أو أقل تكلفة التي تتضمن عدة أمور منها عدد مقدمي الخدمة و أزمته فراغهم و كذلك الزمن الذي تقضيه الباخرة في النظام ، ولذلك يحدد عدد معين من مقدمي الخدمة من قبل إدارة الميناء بحيث يحقق شرط الاتزان بأقل تكلفة ممكنة ، مما يجدر ذكره هنا أن أنظمة الصفوف في الموانئ تتبع النظام الصفي $M / M / S$ ¹

ان الهدف من الدراسة هو تقليص زمن الانتظار للسفن (و بالتالي تقليل أو تفادي غرمت التأخير) و هذا عن طريق مختلف سياسات التسيير لصفوف الانتظار .

4-1. التعريف بمؤسسة ميناء مستغانم :

يقع ميناء مستغانم في الجهة الشرقية لخليج ارزيو ، ما بين خط عرض 35.56 درجة شمالا و خط طول 00.05 درجة شرقا.

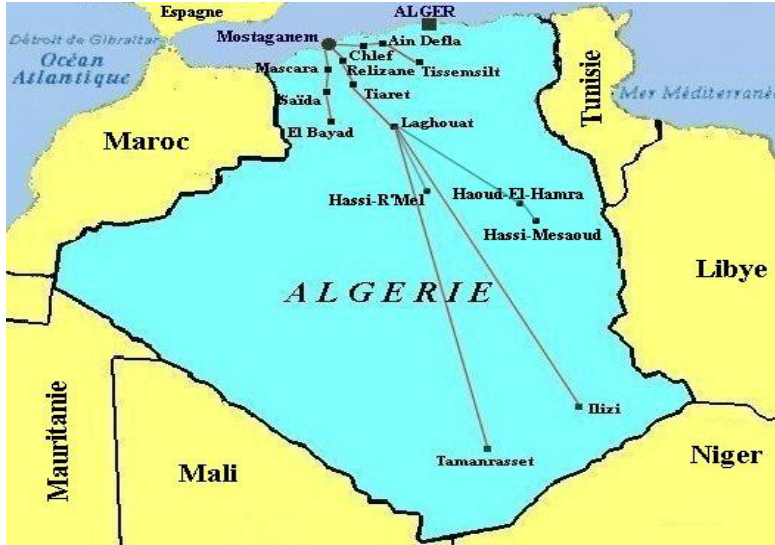


كما أن موقعه هذا هو استراتيجي، حيث يطل و يربط بجميع الطرق المؤدية إلى الجنوب مثل : معسكر ، تيارت ، البيض، وكذلك غربا يأخذ طريق ارزيو ، حيث يقع في مفترق الطرق المؤدية إلى خارج المدينة، مما أتاح له دورا هاما في الحركة الاقتصادية للمنطقة الغربية من البلاد.

¹ HOUDA MEHRI, TAOUFIK DJEMEL, étude de l'attente prioritaire dans les ports, laboratoire GIAD-FSEG –Sfax, institut supérieur de gestion industrielle, tunis, 2009

أول مشروع لبناء الميناء يعود إلى 1882، وبدأت الأشغال في 1890 و استمرت حتى 1904،
وتخصص الميناء بعد هذه الفترة في استغلال الخمر و الحبوب.. الخ
و بعد الاستقلال، ومع المخططات التي وضعت لتطوير الميناء، شهد هذا الأخير عدة إنشاءات و
تجديدات جذرية و ذلك تماشيا مع الحاجيات الجديدة
يعتبر ميناء مستغانم بوابة جنوب البلاد حيث يربطها بالأسواق الدولية :

- الزراعية
- التجارية (عبور الآلات التنقب و الحفر لاستخراج البترول و الغاز من طرف الشركات الأجنبية)
و باعتباره متواجدا في منطقة زراعية ، فان المناطق المتعلقة به و التي تقع خلف الساحل (hinterland)
مكونة من اثنا عشر ولاية متواجدة في الشمال و الجنوب و التي تمثل ربع مجموع التقسيم الإداري و ثلث
المساحة الإجمالية للبلاد.



1-1-4. نشاطات الميناء :

- 1- المساعدة السفن؛
- 2- إرشاد / جر / إرساء السفن؛
- 3- تموين السفن بالمياه العذبة؛
- 4- عملية الشحن والتفريغ البضائع؛

- 5- إدارة الأراضي المملوئة؛
 6- إدارة المساحات المغطات (المخازن)؛
 7- حراسة البضائع؛
 8- تسيير دعامة الجر (cale de halage) و القبان (ponts bascules)؛

4-1-2. القدرة على الاستقبال و المعالجة:

JETEE	1.830 m de long
ACCES :	Passé d'entrée Nord- Ouest Largeur 100 m Profondeur 12 m
BASSINS :	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 1er Bassin :14 Ha de plan d'eau Tirant d'eau de 6,77 à 8,17 m (06 postes à quai) ➤ 2eme Bassin :16 Ha de plan d'eau Tirant d'eau de 6,95 à 8,22 m (04 postes à quai)
MOLES:	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Môle de l'Indépendance (Poste 4 et 5) : 270 MI ➤ Môle Sud-ouest (Poste 6 et 7) : 280 MI
QUAIS	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Nord-Est: 117 MI (Poste 0) ➤ Du Maghreb: 412 MI (Postes 1, 2 et 3) ➤ Nouveau quai : 217 MI (NP1 et NP2) + 80 MI (Poste X)
TERRE PLEINS D'ENTREPOSAGE:	➤ 44 430 m ²
DOCKS	➤ : 16 docks d'une superficie de 7 455 m ² dont 08 à usage commercial
VOIES DE DESSERTES:	Réseau routier 4 885 MI

	<p>Réseau ferroviaire: 3 747 MI (Tous les quais et terre-plein sont desservis par un réseau complètement rénové raccordé au dock silo à grains)</p>
--	--

الجدول (1-4) قدرة الرصيف علم, الاستقبال و المعالجة
المصدر : إدارة ميناء مؤسسة مستغانم

3-1-4. تقسيم حركة المرور:

	Import	Export	Cabotage	total	taux
Débarqué	1.122.143	-	-	1.122.143	96%
Embarqué	-	50.296	-	50.296	4%
Total	1.122.143	50.296	-	1.172.439	

الجدول (2-4) تقسيم حركة المرور في الرصيف
المصدر: إدارة ميناء مؤسسة مستغانم

2-4. مشكل خطوط الانتظار في الميناء:

1-2-4. معوقات الميناء:

- عمق الأرصفة صغير (أعمق رصيف 8.22)
 - عدم وجود مكان مخصص لمعالجة السلع و البضائع الخطيرة
 - عدم توافق النشاطين تجارة-صيد
- و هذا ما أدى إلى النتائج التالية :
- تمديد فترة بقاء السفن في الميناء و هذا ما أدى إلى ارتفاع تكاليف بسبب غرامات التأخير؛

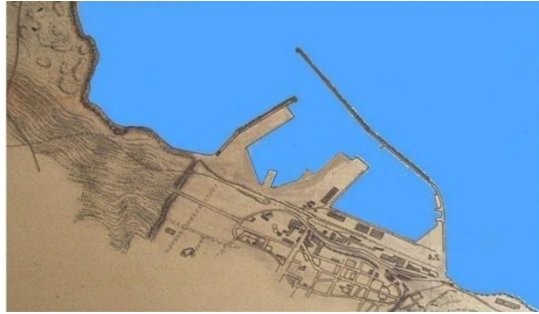
- التخفيف من وزن السفن الكبيرة في موانئ أخرى ، و هذا ما أدى إلى تكاليف إضافية ؛
- صعوبة التخزين ما يؤدي الى ارتفاع تكاليف تفرغ و نقل البضائع؛
- إفراغ المباشر للبضائع الخطيرة لعدم وجود مركز عبور مخصص لها؛
- ازدحام الميناء بسبب المزج بين النشاطين التجاري و الصيدي؛

2-2-4. موقع الرصيف:

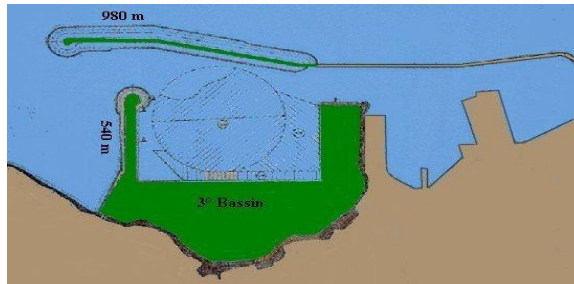
إن الرصيف لا يمكنه استقبال سفن ذات أحجام كبيرة جدا، و هذا راجع للعمق الضعيف للرصيف. (لهذا فإدارة الميناء بصدد إنشاء حوض آخر بعمق مناسب و يحوي على عدة أرصفة مخصصة للسفن الكبيرة و سفن النقل).

سنتناول في هذه الدراسة رصيف واحد (الرصيف الشمالي الشرقي) ، و ذلك بغرض التبسيط عند

تطبيق النموذج M/M/1.



الشكل 1-4: موقع الرصيف الشمالي الشرقي



الشكل 2-4 : موقع الحوض الجديد فى طور الانجاز
المصدر: إدارة ميناء مؤسسة مستغانم

4-2-3. مميزات الرصيف :

اسم الرصيف	الحوض	رتبة الرصيف	عرض الرصيف (m)	عمق الرصيف (m)	اختصاص
الشمالي	الحوض رقم 1	y	80	4.50	عتاد
الشرقي		o	117	6.77	زفت، متفرقات

الجدول (3.4) : مميزات الرصيف الشمالي الشرقي

المصدر : مكتب دراسات التخطيط، إدارة مؤسسة EPM

4-2-4 مراقبة حركة النقل داخل الميناء :

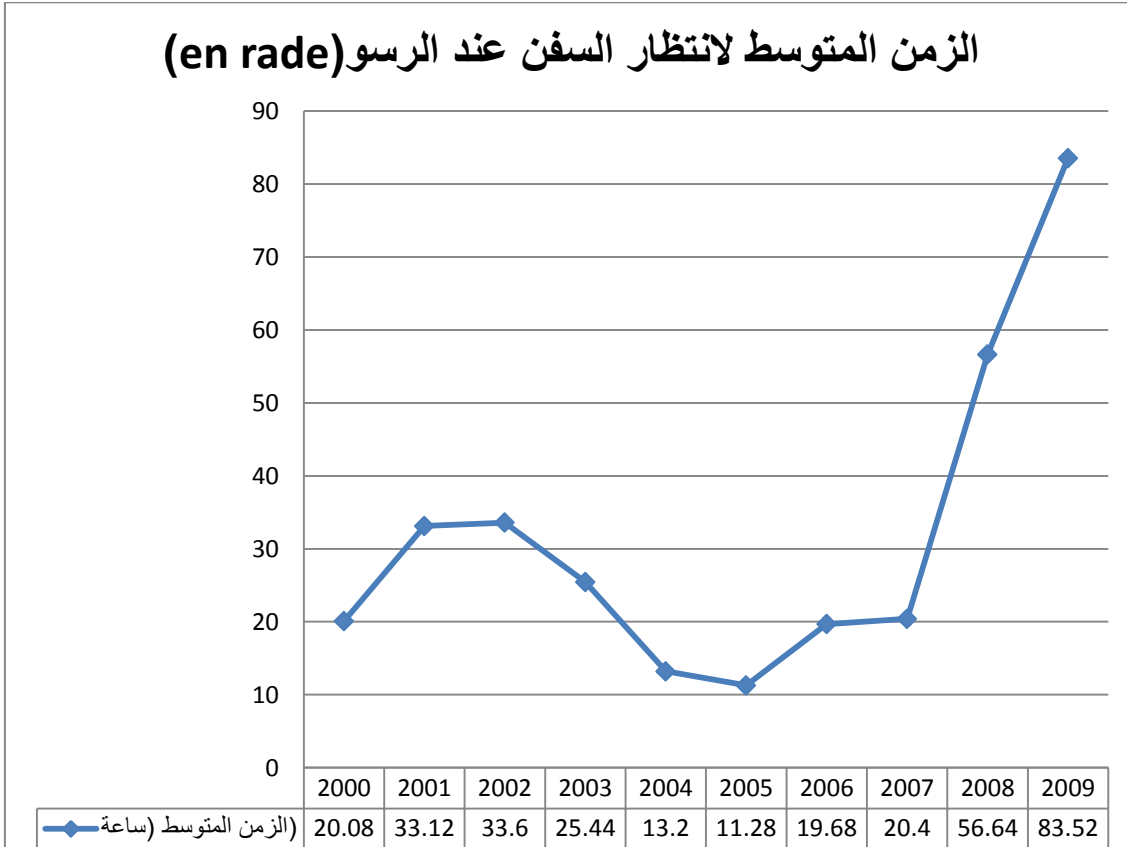
عندما تصل السفن و تدخل الرصيف ، فإنها توجه إلى المحطة y لإفراغ الشحناتها، لكنها قبل ذلك ، يجب أن تقوم بعملية الإرساء و التي تتغير صعوبتها حسب حالة الطقس ، بعد استكمال الإجراءات الإدارية يشرع في تفريغ السفينة بحيث تتغير فترة هذه العملية حسب كمية و نوعية البضاعة المفرغة. إذا كان مركز الخدمة للمحطة y مشغول ، فان على السفينة الانتظار حتى يحين دورها، و ذلك بافتراض أن النظام يتبع قاعدة FCFS .

1. تطور فترة انتظار السفن و فترة بقائها في الرصيف (10 سنوات)

• الزمن المتوسط لانتظار السفن عند الرسو (en rade)

السنوات	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
الزمن المتوسط (ساعة)	20.08	33.12	33.6	25.44	13.2	11.28	19.68	20.4	56.64	83.52

الجدول (4.4) : الزمن المتوسط لانتظار السفن عند الرسو
المصدر : من اعداد الطالب

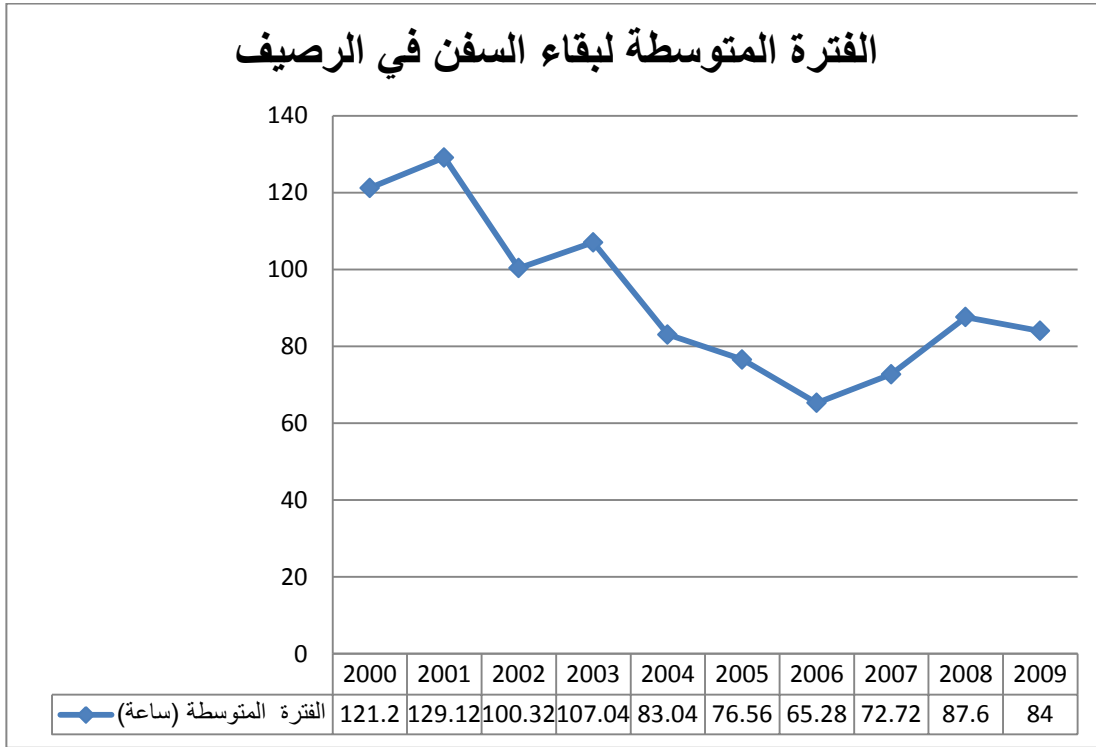


الشكل 3-4 : منحنى يبين تطور فترات انتظار السفن عند الرسو خلال 10 سنوات
المصدر : من اعداد الطالب

• الفترة المتوسطة لبقاء السفن في الرصيف:

السنوات	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
الفترة المتوسطة (ساعة)	121.2	129.12	100.32	107.04	83.04	76.56	65.28	72.72	87.6	84

الجدول (5.4) : الفترة المتوسطة لبقاء السفن في الرصيف
المصدر : من اعداد الطالب



الشكل 4-4 : منحنى يبين تطور فترات بقاء السفن في الرصيف خلال 10 سنوات
المصدر: من اعداد الطالب

نلاحظ نزاييد كبير و مستمر للزمن المتوسط لانتظار السفن عند الرسو ،خاصة في الفترات

2009-2008-2007 و هذا بسبب النشاط الكبير لحركة مرور السفن التي تعرض إليها الميناء، و ذلك

رغم استمرار انخفاض معدل بقاء السفن في الرصيف خاصة في الفترة 2009-2009 هذا الانخفاض يفسره استخدام الأمثل لتكنولوجيات النقل و التفريغ ، و كذلك التحسن في استخدام آليات التسيير.

2. المتوسط الشهري لعدد السفن في الرصيف:

Désignation	Navires à l'Entrée		Attente Moyenne en Rade		Séjour Moyen à Quai	
	2008	2009	2008	2009	2008	2009
Céréales	43	20	5,98	4,5	7,84	6,37
Porte-conteneurs	-	-	-	-	-	-
Ro-Ro	40	38	0,71	1,8	1,08	0,83
Cargos (tous types de cargos)						
Dont : Fers / Tubes	91	92	1,15	4,72	3,61	4,97
Déchets ferreux	-	-	-	-	-	-
Bois	3	7	2,15	0,67	2,77	2,17
Ciments	9	16	1,79	2,3	5,4	4,03
Pétroliers, méthaniers, butaniers	-	-	-	-	-	-
Autres tankers	-	-	-	-	-	-
Bitumiers	16	25	1,06	2,5	3,23	2,82

الفصل الرابع : الجانب التطبيقي

Minéraliers	38	22	1,99	1,71	2,35	3,29
Autres navires	108	145	2,72	0,57	5,5	4,84

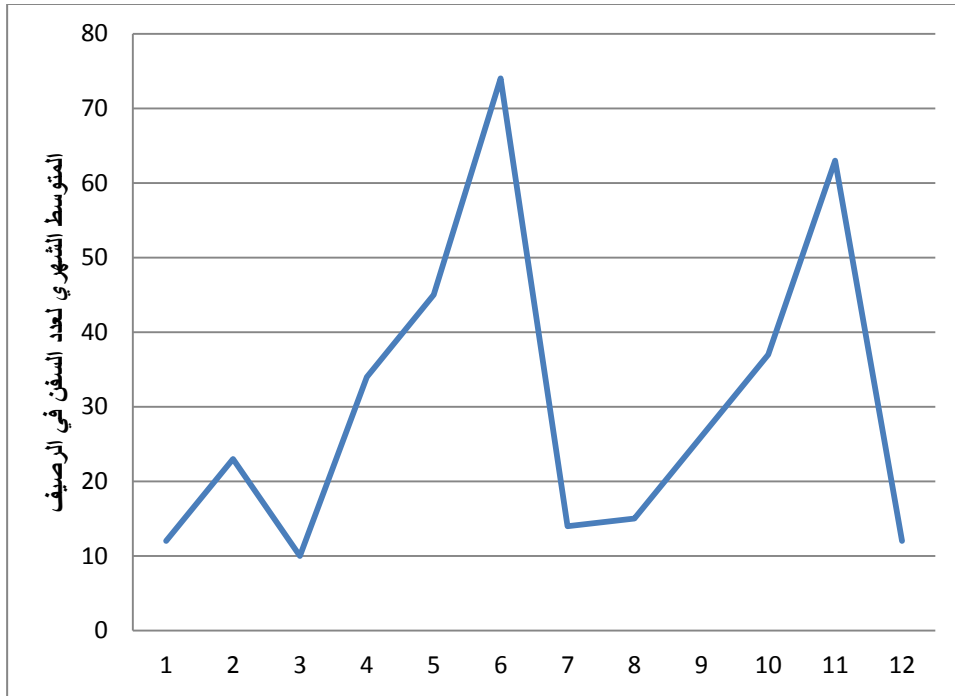
totale	348	365
	713	

الجدول 4-6 : عدد السفن ، فترة الانتظار عند الرسو، فترة الانتظار في الرصيف خلال سنة 2009/2008 حسب نوع الشحن
المصدر : مكتب دراسات التخطيط، إدارة مؤسسة EPM

الأشهر	جانفي	فبراير	مارس	أفريل	ماي	جوان	جويلية	أوت	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	مجموع	معدل الشهري
عدد السفن	12	23	10	34	45	74	14	15	26	37	63	12	365	30

الجدول 4-7 : العدد الشهري للسفن في الرصيف خلال السنة قيد الدراسة 2009

المصدر : من اعداد الطالب



المنحنى 4-5 : المتوسط الشهري لعدد السفن في الرصيف

المصدر : من اعداد الطالب

بصورة عامة فان عدد السفن التي تتواجد في الرصيف خلال سنة قيد الدراسة (2009) ليس لها اتجاه معين ، وهذا لان طبيعة وصول السفن إلى الرصيف تتميز بالعشوائية (و هذا ما سنبينه لاحقا باستعمال اختبار دانيال للاتجاه العام)

3-4. توصيف المفاهيم الأساسية لنظام الميناء:

1-3-4. الهدف من نموذج صف الانتظار في الميناء

الهدف الأساسي من نموذج صفوف الانتظار هو تخفيض مجموع تكاليف النظام، و هي التكاليف المباشرة لتقديم الخدمة و التكاليف الغير مباشرة الفردية لطالبي الخدمة المنتظرين في الصف (السفن)، فادا كان النظام يحوي عدد اكبر من مراكز الخدمة فهذا يؤدي إلى زيادة النشاط و بالمقابل زيادة التكاليف المتعلقة هذه المراكز ، أما إذا كان عدد مراكز الخدمة اقل فسينتج جراء ذلك ازدياد وقت الانتظار و ارتفاع تكاليف المتعلقة بغرامات التأخير و انخفاض النشاط.

الهدف من دراسة صفوف الانتظار هو تحديد العدد الأمثل للأرصفة و التي تحقق أعلى مردودية بأقل التكاليف .

للتبسيط ،سوف نقوم بدراسة حالة الانتظار في صف واحد أي باستعمال نموذج $M/M/1$ ثم نقوم بالتعميم على باقي الأرصفة.

2-3-4. المقاربة التحليلية :

تعتبر النماذج الرياضية أساس نظرية صفوف الانتظار ، حيث تعمل على توضيح العلاقة بين مختلف العوامل التي تؤثر على سلوك العملية.

هناك عدة فرضيات لنظرية صفوف الانتظار و التي تبسط التحليل الرياضي لها ، و من هذه الفرضيات ¹ :

¹ Martin lepine, etude de certaines files d attente : application dans un quai, universite de mentreal ,canada, 1991, p :13

• فرضية حول الفترات ما بين عمليتي وصول (inter-arrivees):

نفرض دائما أن الواصلين يتبعون قانون بواسون ، وذلك لأنهم عادة معزولون و مستقلون عن بعضهم البعض.

كما أن الفترات الفاصلة بين عمليتي وصول بواسونية متتالية هي عبارة عن متغير عشوائي أسي، و ذلك لأنه عندما يتبع تدفق الواصلين قانون بواسون بمعلمة λ فان احتمال عدم حدوث عملية وصول داخل الفترات الفاصلة t ($P\{T > t\}$) يساوي : $e^{-\lambda t}$ ، و منه دالة التوزيع للمتغير T تساوي :

$$F(t) = 1 - P\{T > t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

و دالة الكثافة تساوي :

$$f(t) = \frac{F(t)}{dt} = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$$

و التي تعتبر دالة آسية بمعلمة $1/\lambda$

• فرضية حول فترات الخدمة :

نفرض أن وقت الخدمة يساوي فترة السكون (و التي تعتبر الفترة التي يمنع فيها زبون زبون آخر من تلقي الخدمة)

في الواقع، يوجد هناك زمن فاصل بين فترتي خدمة متتاليتين، فبالنسبة للسفن، عندما تنتهي فترة الخدمة للسفينة الأولى، فان السفينة التالية يلزمها بعض الوقت للقيام بعملية الركن على الرصيف و من ثم البدء في خدمتها.

3-3-4. نموذج ظاهرة الانتظار:

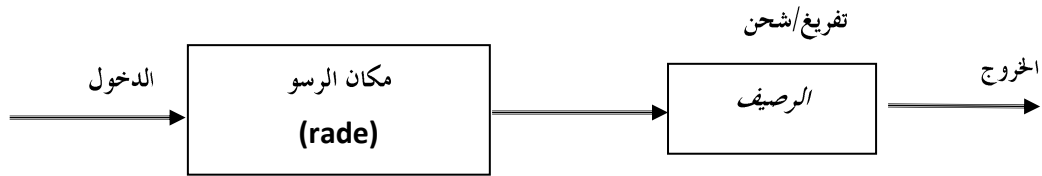
1. نموذج ظاهرة الانتظار لمركز الخدمة (الرصيف)

من اجل تطبيق نموذج صفوف الانتظار المناسب، لابد من تحديد المعالم الأساسية لهيكل الانتظار في مركز تقديم الخدمة:

أ. تمثيل ظاهرة الانتظار لمركز الخدمة :

تمر خدمة تفريغ و شحن السفن بالمراحل التالية :

- عندما تصل السفن و تدخل الرصيف، فإنها توجه إلى المحطة y لإفراغ أو شحن البضائع، لكنها قبل ذلك يجب أن تقوم بعملية الإرساء التي تتغير صعوبتها حسب حالة الطقس. بعد استكمال الإجراءات الإدارية يشرع في تفريغ السفينة أو شحنها، و يتغير زمن هذه العملية حسب كمية أو نوعية البضاعة.
- إذا كان مركز الخدمة للمحطة y مشغول، فعلى السفينة أن تنتظر دورها، و ذلك بافتراض أن النظام يتبع قاعدة FCFS، نقول في هذه الحالة أن السفينة في حالة انتظار.



شكل 4-6 : مخطط يمثل ظاهرة الانتظار في الرصيف
المصدر : من اعداد الطالب

ب. تحديد مكونات النظام:

من اجل تحديد هيكل الانتظار الملائم، لابد من تعريف مكوناته و ذلك من خلال :

1- المجتمع المصدري: **population source**

في الحالة قيد الدراسة، فان المجتمع المصدري ينطبق عليه مميزات المجتمع الغير محدود، أي اللانهائي **infinite population**، وهو عبارة عن سفن قادمين للرصيف لتفريغ أو شحن البضائع. من الناحية النظرية، فان أعداد كبيرة من المجتمع يمكن أن تطلب الخدمة في أي وقت.

2- مواصفات الواصلين :

تتضمن الخصائص المميزة للزبائن(السفن) الوافدين على مركز الخدمة بالرصيف، و المتمثلة بـ:

- **درجة التحكم في عدد الواصلين:** لا يمكن لإدارة الميناء التحكم في عدد السفن الواصلة إلى الرصيف و لا في أوقات وصولها.

- هيئة الواصلين: تصل السفن إلى الرصيف بشكل منفرد.
- **نقط الوصول:** يتم وصول السفن إلى الرصيف بطريقة عشوائية ، ويكون كل زبون(سفينة) مستقل عن الزبائن الآخرين ، كما انه لا يمكن التنبؤ بحدوث عملية الوصول لمتلقي الخدمة.
- **سلوك متلقي الخدمة:** من خلال الملاحظة، لم يتم تسجيل أي عملية انسحاب من الصف.

3- مواصفات صف الانتظار :

يمكن تحديد مواصفات صف الانتظار في الرصيف من خلال:

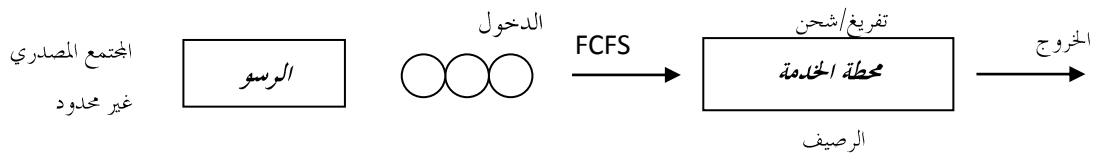
- ❖ **طول صف الانتظار:** خط الانتظار يكون عادة غير محدد، فليس له حد أقصى إذ يطول و يقصر حسب وصول السفن و دخولهم إلى الصف.
- ❖ **عدد صفوف الانتظار:** فرضا و للتبسيط، فإن السفن سوف يصطفون في صف واحد.

4- الأولويات المطبقة :

يشير ذلك إلى الترتيب الذي بواسطته يتم تقديم الخدمة للسفن الوافدين على مركز الخدمة ، وتقدم الخدمة تبعا لترتيب وصول السفن ، أي الواصل أولا يخدم أولا (FCFS)

5- خصائص محطة الخدمة :

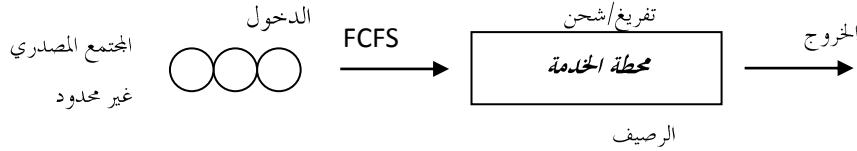
عندما تصل السفن إلى مركز الخدمة، يتم خدمتها حسب أولوية، وصولها سواء تفرغ أو شحن البضائع، ثم تقوم بمغادرة مركز الخدمة.



شكل 4-7: تمثيل مبسط هيكل الانتظار في مركز خدمة للرصيف

المصدر: تم إعداد هذا الشكل من طرف الطالب

إن عملية الرسو لا تعتبر في حد ذاتها خدمة مقدمة من طرف الميناء ، لهذا فزمن الانتظار في الميناء يحدده زمن تقديم الخدمة في مركز الخدمة للرصيف ، و المقدر بـ $1/\mu$ ، و بالتالي فان هيكل الانتظار يكون كالتالي:



شكل 4-7: تمثيل مبسط لهيكل الانتظار في مركز خدمة للرصيف
المصدر: تم إعداد هذا الشكل من طرف الطالب

6- معدل الوصول :

يشير إلى متوسط عدد الوحدات الطالبة للخدمة التي تصل إلى النظام في فترة زمنية معينة. في الفترة 2009 (12 شهر) ، كان معدل الوصول : $\lambda = 1.013$ سفينة في اليوم، مع العلم أن السفن تصل إلى مركز الخدمة بطريقة عشوائية.

7- الخروج من النظام:

بعد أن تتلقى الوحدات الخدمة المطلوبة فإنها تخرج من النظام، وهذا ينتج عنه احتمالان: أن ترجع السفينة إلى النظام مرة أخرى و تنضم إلى المجتمع المصدري، أو لا ترجع مرة أخرى.

4-3-4. الدراسة الإحصائية لهيكل الانتظار في الرصيف:

تختلف النماذج الرياضية لمعالجة ظاهرة الانتظار إلى نوع التوزيع النظري لأوقات الخدمة و معدل وصول السفن ، و عليه لابد من تحديدهما أولاً :

- تحديد فترات المشاهدة المناسبة :

- من اجل دراسة عملية وصول السفن إلى مركز الخدمة و مدة الخدمة فيه، تم اعتماد الخطوات التالية:
- تحديد الفترة الكلية للمشاهدة T و التي تكون ممثلة لنشاط المركز المدروس؛
- تحديد فترات الملاحظة t ، و يجب أن تكون كل فترات المشاهدة متساوية.

أ- تحديد الفترة الكلية للمشاهدة :

لكي يكون النموذج معبر عن الظاهرة ، يجب أن تكون المشاهدة في حالة استقرار النظام ، و يمكن تحليل ذلك من خلال دراسة التغيرات في الكميات المطلوبة و معرفة استقرار الطلب على هذه الخدمة ، وهل هناك اتجاه عام للتغير في الطلب ؟

و من أجل دراسة مدى استقرار الطلب على خدمة الرصيف نمر بالخطوات التالية:

1- تحديد حجم طلب الزبائن (السفن) على الرصيف (لسنة 12/2009 شهر)

2- تطبيق اختبار دانيال و الذي يعتبر أقوى الاختبارات لهذا الغرض¹

جدول 4-8: اختبار دانيال لتحليل الاتجاه العام للطلب على خدمة الرصيف

الأشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
عدد السفن	13	23	10	34	45	74	14	15	26	37	63	11
الرتبة	3	6	1	8	10	12	4	5	7	9	11	2
d	2-	4-	2	4-	5-	6-	3	3	2	1	0	10
D^2	4	16	4	16	25	36	9	9	4	1	0	100

حيث D^2 يمثل مجموع مربعات الفرق بين الترتيب التصاعدي و الزمني ، أي $d = (R-t)$

H_0 : السلسلة عشوائية / لا يوجد اتجاه عام

H_1 : يوجد اتجاه عام

¹ حشمان مولود، نماذج و تقنيات التنبؤ القصير المدى، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1998، ص 27

$$T_s = 1 - \frac{6 \sum d^2}{T(T^2 - 1)}$$

$$T=12, \alpha=5\%$$

$$T_s = 0.22 \quad T_{\alpha/2} = 0.5804$$

$$T_{\alpha/2} > [T_s]$$

و منه الفرضية H_1 مرفوضة أي لا يوجد اتجاه عام في السلسلة المدروسة.

تحديد فترة المشاهدة :

تم تحديد المدة الكلية للمشاهدة بعام (12 شهر) وذلك لتحديد متوسط العملاء الواصلين إلى الرصيف، و اعتبر سنة 2009 كفترة ممثلة للنظام المدروس، حيث تمتد فترة المشاهدة من 2009/01/01 إلى 2009/12/31.

الجدول التالي يبين طريقة تحديد فترة المشاهدة :

جدول 4-9: تحديد حجم فترات المشاهدة

العدد الكلي لفترات المشاهدة	مدة المشاهدة بالساعات	الساعات المعتمدة للمشاهدة	ساعات العمل الرسمية	أيام الأسبوع
	6 سا	9 سا-12 سا 13 سا-16 سا	8 سا إلى 16 سا	من السبت إلى الخميس
	6 سا . (5) = 30 سا	ساعات المشاهدة في الأسبوع		
	120 سا	ساعات المشاهدة في الشهر		
144 فترة في العام	1440 سا	ساعات المشاهدة في العام		

المصدر : تم إعداد الجدول من طرف الطالب

من خلال الجدول توصلنا إلى أن العدد الكلي لفترات المشاهدة خلال السنة قدر بحوالي 144 فترة تكون مكونة من 10 ساعات و مأخوذة بطريقة عشوائية، و يتم تسجيل وصول السفن على مدى طول الفترة :

التكرارات المشاهدة موضحة في الجدول الآتي :

01	02	01	00	01	03	00	01	03	02	01	01
02	03	01	01	02	01	03	03	01	01	03	02
02	00	01	02	00	01	03	02	01	03	02	01
03	03	04	01	03	05	02	03	03	04	00	03
05	03	05	03	04	06	03	02	03	05	03	03
06	07	05	06	05	04	02	05	06	05	03	06
00	01	00	03	01	00	03	02	01	01	02	00
00	01	00	03	01	03	02	01	02	00	00	02
01	04	03	00	03	02	00	02	03	05	00	03
04	03	03	04	05	03	04	00	02	02	03	04
05	06	06	05	06	04	06	05	04	05	06	05
03	01	02	00	01	01	03	00	01	00	01	01

الجدول 4-10 : قيمة المتغير n ، عدد السفن

نلاحظ أن أكبر قيمة ل n و التي تمثل عدد السفن هي 7 و أن متوسط وصول السفن هو: 2.534 سفينة كل 10 سا.

جدول 4-11: توزيع وصول السفن خلال فترة المشاهدة.

عدد السفن الواصلين خلال الفترة Δt	7	6	5	4	3	2	1	0
التكرارات المشاهدة	1	10	15	11	35	22	30	20

المصدر: تم إعداد الجدول من طرف الطالب

كما ذكرنا سابقا، فإن المتوسط الحسابي لوصول السفن قدر بـ: $\lambda = 2.534$ سفينة كل 10 ساعات، من اجل تحديد نوع التوزيع النظري لوصول السفن ننطلق من الفرضيات التالية:

H_0 : يتبع توزيع وصول السفن التوزيع النظري لبواسون.

H_1 : تتبع توزيع وصول السفن توزيعا آخر غير التوزيع البواسوني.

و تم اختيار اختبار كاي تربيع لهذا الغرض ، و الممثل في الجدول التالي :

جدول 4-12: جدول حساب مجموع الفروق التربيعية كاي تربيع لوصول السفن

الفئات	التكرارات المشاهدة	التكرارات النسبية النظرية	التكرارات المطلقة النظرية	Delta	Delta ²	khi ²
0	20	0,079	11,417	8,583	73,670	6,453
1	30	0,201	28,939	1,061	1,127	0,039
2	22	0,255	36,676	-14,676	215,374	5,872
3	35	0,215	30,987	4,013	16,100	0,520
4	11	0,136	19,636	-8,636	74,583	3,798
5	15	0,069	9,954	5,046	25,458	2,557
6	10	0,029	4,205	5,795	33,579	7,985
7	1	0,011	1,523	-0,523	0,273	0,179
المجموع	144	0,995	143,337	0,663		27,404

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$$

حيث:

f_0 = التكرارات المشاهدة

f_e = التكرارات المتوقعة

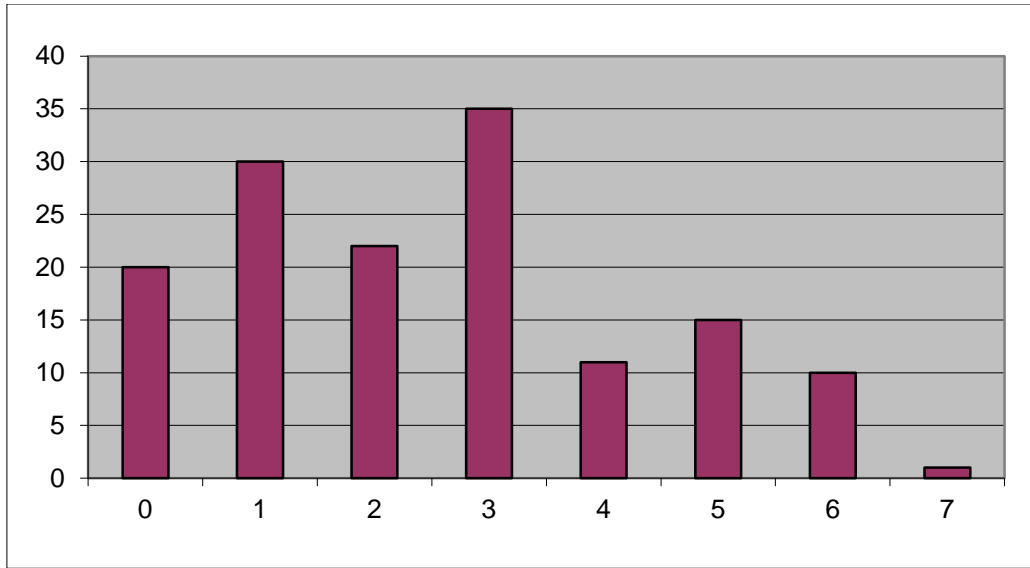
و بالاعتماد على برنامج SPSS ، و انطلاقا من جدول كاي تربيع عند درجة حرية 6 و مستوى

معنوية 5% ، تحصلنا على النتائج التالية :

$$\chi^2_{ar} = 0,000121644 \quad \chi^2_{0.05} = 12.59$$

و بما أن $\chi^2_{0.05} > \chi^2_{ar}$ نستنتج أن توزيع المشاهدات لوصول السفن يمكن تقريبه إلى التوزيع

النظري لبواسون، و المعرف بالمعلمة λ التي تقدر ب: 2.534 سفينة كل 10 سا



المنحنى 4-8 تكرارات وصول السفن الى الرصيف
المصدر : من اعداد الطالب

من اجل الوصول إلى متوسط وقت الخدمة على مستوى الرصيف و انطلاقا من الجدول الذي يمثل

(الفترة المتوسطة لبقاء السفن في الرصيف)، نجد أن معدل الخدمة قدر بـ : 92.684 سا.

و بنفس الطريقة تم تطبيق اختبار كاي تربيع من أجل تحديد التوزيع النظري للمشاهدات انطلاقا

من الفرضيات التالية :

H_0 : يتبع توزيع أوقات الخدمة التوزيع النظري الأسّي.

H_1 : تتبع توزيع أوقات الخدمة توزيعا آخر غير التوزيع الأسّي

جدول 4-13: حساب مجموع الفروق التربيعية كاي تربيع لأوقات الخدمة

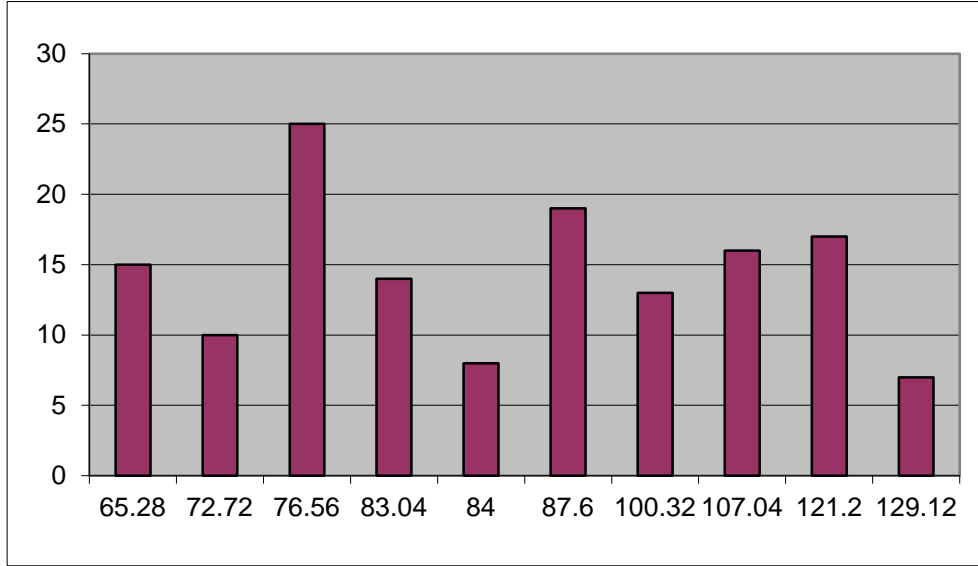
Delta^2	Delta	المطلق النظري	النسبي النظري	التكرارات المشاهدة	أوقات الخدمة
212,930	14,592	0,408	0,003	15	65,28
112,734	-10,618	20,618	0,143	10	72,72
7,355	2,712	22,288	0,155	25	76,56
76,341	8,737	5,263	0,037	14	83,04
10,506	3,241	4,759	0,033	8	84
4 272,886	- 65,367	84,367	0,586	19	87,6
7,602	-2,757	15,757	0,109	13	100,32
203,094	14,251	1,749	0,012	16	107,04
284,088	16,855	0,145	0,001	17	121,2
48,892	6,992	0,008	0,000	7	129,12
	-11,361	155,361	1,079	144	المجموع

المصدر : من اعداد الطالب

و بالاعتماد على برنامج SPSS و انطلاقا من جدول كاي تربيع ، وعند درجة حرية 6 و مستوى معنوية 5% تحصلنا على النتائج التالية :

$$\chi^2_{ar} \approx 0.00 \quad \chi^2_{0.05} = 12.59$$

و عليه نقبل الفرضية H_0 ، أي أن توزيع المشاهدات لأوقات الخدمة يمكن تقريبه إلى التوزيع الآسي ، و المعرف بالمعلمة $\mu = 92.684$.



المنحنى 9-4 تكرارات زمن الخدمة المصرفي
المصدر : من اعداد الطالب

و منه نستنتج أن النموذج المدروس يتميز بالخصائص التالية :

- عملية توافد تتبع عملية بواسون بمعدل $1/\lambda$ زبون في وحدة الزمن حيث الفترة الزمنية لوصول الزبائن تتبع العملية الأسية الماركوفية بمعدل $1/\mu$ ؛ .
 - عدد مقدمي الخدمة هو S ؛
 - متوسط زمن الخدمة μ لكل عميل؛
 - سعة الصف والنظام غير محدودة؛
 - أزمنة الخدمة في هذا النظام أسية بمعدل $1/\mu$ ؛
 - أسلوب الخدمة المتبع هو FcFs من يصل أولاً يُخدم أولاً؛
- و عليه النموذج الرياضي المتبع هو من نوع :

$$\underline{M/M/s}, FCFS, \infty, \infty$$

- يتمثل الأثر النهائي لاستخدام عدد S مقدم خدمة على التوازن في الإسراع بمعدل الخدمة مقارنة بحالة مقدم خدمة واحد وذلك لإمكانية خدمة عدد S عميل كحد أقصى في وقت واحد. ولذلك ، إذا

كان في النظام عدد n عميل وهذا العدد يساوي S على الأقل ، فسيكون مجموع معدل الخدمة (المغادرة) يساوي $S\mu$ ومن ناحية أخرى إذا كانت n أصغر من S فإن مجموع معدل الخدمة يساوي $n\mu$ حيث لا يوجد أكثر من n (أقل من S) مقدم خدمة مشغول لذلك لبلوغ حالة الاتزان يجب تحقيق هذه المعادلة:

$$(\lambda / S\mu) < 1$$

وبعد الاتزان فان احتمال أن يكون في النظام ككل n زبون هو :

$$p_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n p_0}{n! \mu^n}, & (1 < n < c) \\ \frac{\lambda^n p_0}{s^{(n-s)} s! \mu^n}, & (n > c) \end{cases}$$

ولحساب قيمة p_0 :

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \left(\frac{1}{n!}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \left(\frac{1}{s!}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\right)}$$

ومن ثم نوجد مقاييس الأداء للنظام كالتالي :

1. متوسط طول الطابور في النظام:

$$L_q = \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \lambda \mu}{(s-1)! (s\mu - \lambda)^0} \right] p_0$$

2. متوسط عدد الزبائن في النظام:

$$L = \lambda W$$

3. متوسط زمن الانتظار في الصف:

$$W_q = L_q / \mu$$

4. متوسط زمن الانتظار في النظام:

$$W = \left(\frac{1}{\mu} \right) + \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \mu}{(s-1)! (s\mu - \lambda)^2} \right] p_0$$

كما ذكرنا سابقا ، فانه في نظام مكون من عدة قنوات خدمة ، فان طول الصف و فترة الانتظار في الصف تكون مختزلة ، لهذا نعتبر انه لا يوجد إلا صف انتظار واحد ، فرغم تشكل عدة صفوف فان الزبائن يتوجهون نحو الصفوف الأقل مشغولية :، حيث يكون لهم سلوك كما لو أن هناك صف انتظار وحيد¹. إذن نفترض أن $s=1$.

احتمال أن لا يكون أي زبون داخل النظام هو :

$$P(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \left[\frac{1}{n!} \times \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] + \frac{1}{k!} \times \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \times \frac{k_\mu}{k_\mu - \lambda}} \quad \text{pour } k_\mu > \lambda$$

¹ Y.G.perreault, recherche operationnel :techniqueq decisionnelles,gaetan morin edition,allmagne,p192

احتمال وجود n زبون في النظام هو :

$$P(n) = \frac{1}{n!} \times \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \times P(0) \quad \text{pour } n \leq k$$

$$P(n) = \frac{1}{(k!) \times k^{n-k}} \times \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \times P(0) \quad \text{pour } n > k$$

و العدد المتوسط للزبائن في النظام هو :

$$\bar{n} = \frac{\lambda \mu \times \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{[(k-1)!] \times (k\mu - \lambda)^2} \times P(0) + \frac{\lambda}{\mu}$$

5-3-4 النموذج الرياضي للتكاليف :

يبين النموذج الرياضي للتكاليف اعتمادا على نموذج القناة الواحدة¹ M/M/1 :

$$Tc = Tc_n + Tc_s + sr$$

$$Tc_n = \varpi g_1 * t * Lq$$

$$Tc_n = \varpi g_2 * t$$

حيث تمثل :

Tc : التكاليف الكلية الضائعة .

Tc_n : التكاليف الضائعة للوحدات المتجمعة في الطابور؛

Tc_s : تكاليف مقدمي الخدمة ؛

ϖg_1 : تكاليف الوحدات في الطابور في الوحدة الزمنية ؛

ϖg_2 : تكاليف مقدم الخدمة في الوحدة الزمنية ؛

t : الوحدة الزمنية (ساعة)؛

¹ عبد الرزاق الموسوي، مدخل لبحوث العمليات ، دار وائل للنشر و التوزيع، الاردن ، 2001 ، ص: 280

Lq : متوسط عدد السفن في الطابور؛

sr : غرامات التأخير.

ملاحظة : بما أن معدل وصول السفن λ و معدل الخدمة μ هما صغيران نسبيا عند أخذ فترة المشاهدة تقدر بـ 10سا ، فإننا سوف نجعل هذه الفترة تقدر بشهر عند حساب التكاليف ، كما نفرض ن تكاليف غرامات التأخير قدرت بـ :

الكلفة الكلية (\$)	غرامات التأخير (\$)	متوسط كلفة انتظار الزبون في النظام (\$/سفينة)	متوسط عدد الزبائن في النظام \bar{n}	μ	λ
42000	5000	2000	6	35	30

مع العلم ان :

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

حيث أن k (عدد مراكز الخدمة) يساوي 1.

سوف نفترض الآن أن إدارة الميناء ستقوم بإضافة رصيف ثاني و ذلك لمواجهة الضغط المشكل على الرصيف الأول؛ و منه فان النظام سيكون مكون من قناتين للخدمة.

لحساب العدد المتوسط للزبائن \bar{n} ، يجب أولا حساب الاحتمال $P(0)$ ، و ذلك استنادا إلى مؤشرات النظام المفترض :

$$\lambda = 30$$

$$\mu = 35$$

$$k = 2$$

الفرق بين k=1 K==2	الكلفة الكلية (\$))	غرامات التأخير	كلفة انتظار الزبون في النظام (\$/سفينة)	متوسط عدد الزبائن في النظام \bar{n} (سفينة)	احتمال عدم وجود اي زبون في النظام $P(0)$	μ	λ
22330	19670	5000	2000	2.81	0.40	35	30

نلاحظ أن إضافة رصيف آخر يؤدي إلى تقليص عدد السفن في الميناء من 06 سفن إلى 2.81 سفن. و أن متوسط تكاليف الانتظار زائد غرامات التأخير سوف تنخفض بشكل محسوس بنسبة 53% ، حتى وان كانت تكلفة إنشاء رصيف آخر كبيرة فإنها سوف تملك مع مرور الوقت بهذا الفارق بين التكاليف.

6-3-4. المقاربة عن طريق المحاكاة :

هناك عدة لغات برمجية تسمح لنا بمحاكاة عمليات الوصول و فترات الخدمة للزبائن التي تتبع توزيعات احتمالية محددة، سوف نقوم في هذه الدراسة بمحاولة استعمال برنامج **Arena** الذي يعتبر من أجود البرامج المخصصة للمحاكاة و النمذجة .

هذا الاختيار تم على أساس بساطة هذا البرنامج ، كفاءته و إمكانية تنفيذه على حواسيب عادية لا تتطلب إمكانيات عالية.

من أهم العناصر في برنامج المحاكاة لصفوف الانتظار هو الساعة **L' horloge** ، في هذه الدراسة فان وحدة الزمن هي الساعة و نفترضها غير مترامنة¹ **Asynchrone** ، ففي حالة نموذج زبون واحد و مركز خدمة واحد ، فان سلوك الساعة الغير مترامنة يكون كالتالي :

¹ غير مترامنة تعني انها تتقدم بالقفزة عند وقوع أي حدث (عملية وصول و انتهاء الخدمة) ، وهذا عكس ساعة مترامنة synchrone التي تتقدم بالقفزة حسب وحدة الزمن المفترضة.

15.25	اخر حدث
20.50	زمن وصول السفينة التالية
22.27	زمن انتهاء خدمة السفينة خلال عملية تقديم الخدمة

الحدث الأخير قد تم على الساعة 15.25، إذن الساعة تكون 15.25

البرنامج يقوم بمعاينة الحدث التالي ، الحدث الأقرب من حيث التوقيت هو وصول السفينة التالية و ذلك لان $22.27 < 20.50$ ،الساعة ادن تعمل قفزة من 15.25 إلى 20.50 ، و البرنامج يقوم بحساب وقت عملية الوصول التالية :

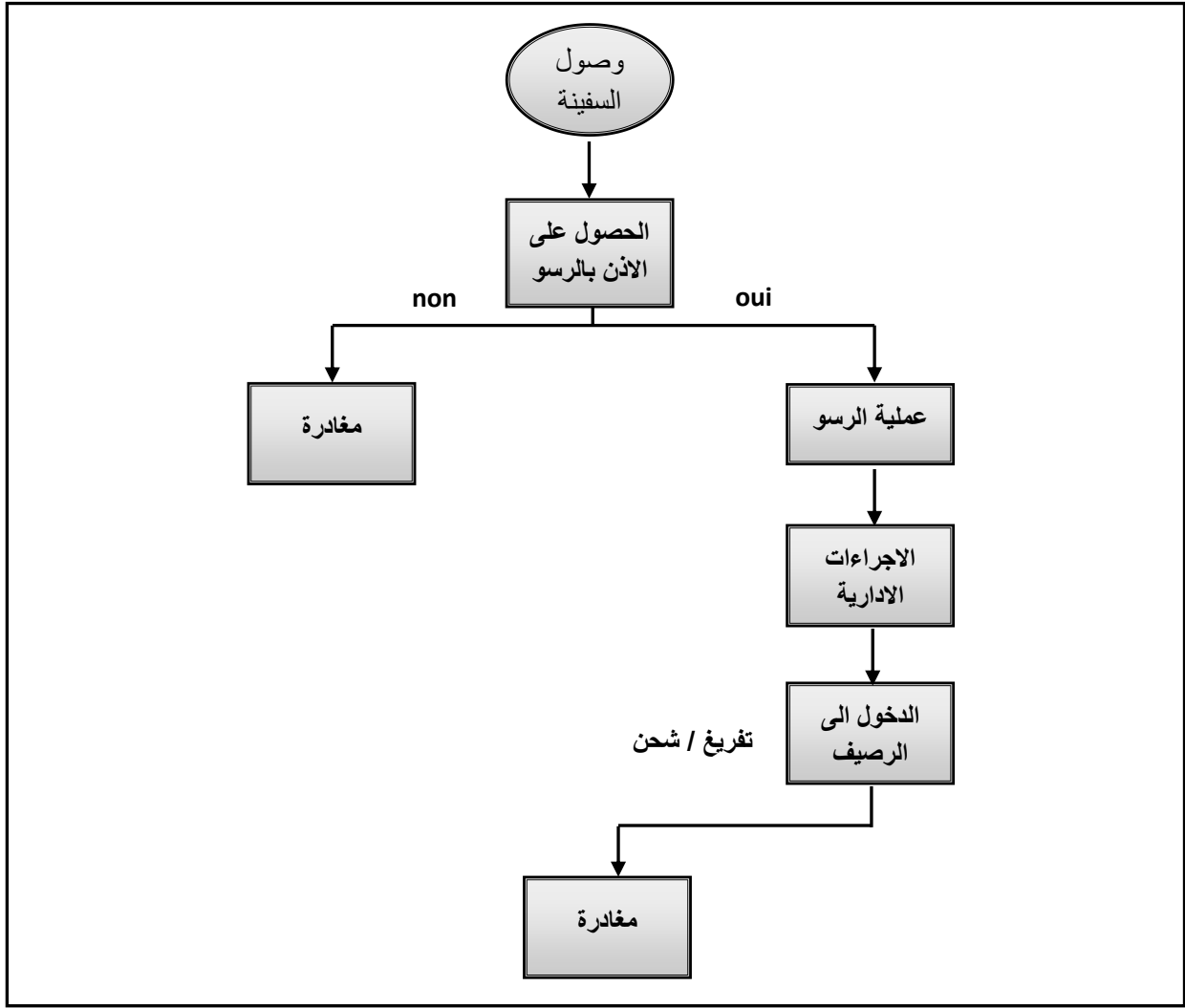
نفرضها 55.13، فان السفينة الواصلة إلى الرصيف تدخل في صف الانتظار و ذلك لان مركز الخدمة مشغول ،و البرنامج يقوم بإعادة الحلقة.و ذلك بإيجاد الحدث الأقرب من حيث الزمن.و في هذه الحالة سيكون زمن انتهاء من خدمة السفينة، ادن الساعة تعمل قفزة من 20.50 إلى 22.27 ؛ مركز الخدمة سيكون غير مشغول لمدة وجيزة حيث انه سوف يشغل من طرف السفينة التي كانت في الانتظار ؛ثم يحسب زمن خدمتها و يضاف لزمن بداية الخدمة و ذلك لإعطاء زمن انتهاء الخدمة .

نفرض أن فترة الخدمة كانت 22.57، وبما أن زمن بداية الخدمة هو 22.27، فان زمن انتهاء الخدمة سيكون $(22.27+22.57) = 44.84$ ؛ و هكذا يستمر البرنامج حتى نهاية المحاكاة.

هناك عنصر آخر أكثر أهمية في عملية المحاكاة لصفوف الانتظار والمتمثل في توليد الأرقام العشوائية ، سوف نعتمد على برنامج Arena لتوليد هذه الأرقام.

تمر عملية المحاكاة بواسطة الحزمة البرمجية Arena بعدة خطوات نذكرها فيمايلي :

- 1) الخطوة الأولى : جمع المعلومات اللازمة للبرنامج مع احترام الفرضيات النموذج المذكورة سابقا.
- 2) الخطوة الثانية : رسم مخطط سير العمليات الذي يوضح المراحل التي تمر بها السفينة للحصول على الخدمة.من الوصول إلى النظام حتى المغادرة .



الشكل 4-10 : مخطط سير العمليات داخل الرصيف

المصدر : من اعداد الطالب

3) الخطوة الثالثة : رسم المخطط الانسيابي الذي يعبر عن النظام و مركز الخدمة الموجود فيه، ويتم

ذلك على المراحل التالية :

• بناء النموذج:

النموذج بسيط جدا، السفينة تتجه إلى الرصيف وتلتحق بطابور:

1-صف الانتظار خالي:

أ -الرصيف خالي :يبدأ الخدمة مباشرة وتنصرف بعد نهاية خدمتها.

ب -الرصيف مشغول :تنتظر حتى خلو الرصيف ثم تدخل الرصيف وتبدأ الخدمة وتنصرف

بعد نهاية خدمتها.

2-صف الانتظار غير خالي:

أ -تلتحق بنهاية الطابور وتنتظر حتى تصبح الأولى في الصف وتباشر الخدمة وتنصرف بعد
نهاية خدمتها.

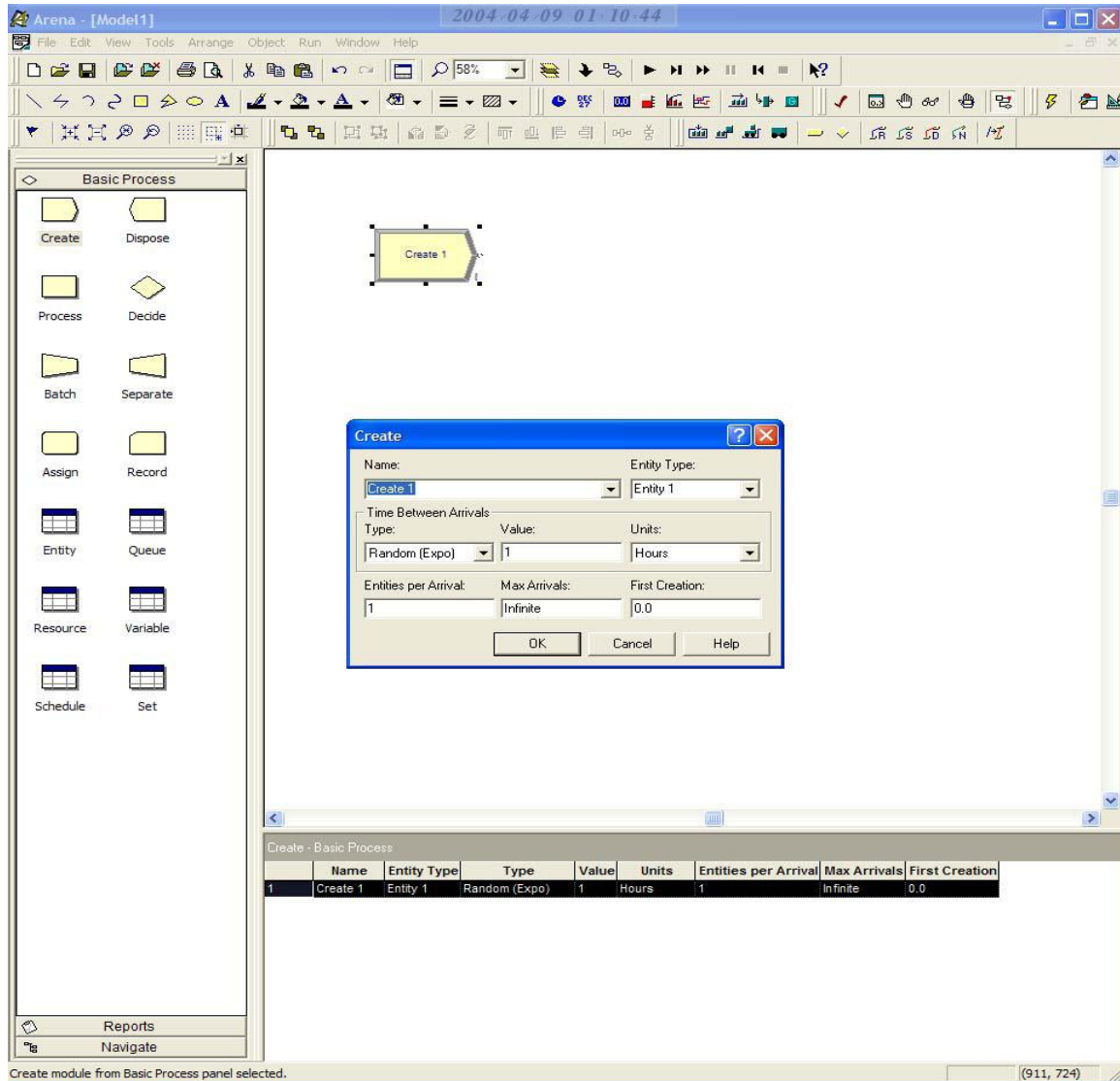
ب -لا يمكن أن تغادر النظام إلا من خلال نقطة نهاية خدمتها.

نضغط نسحب أيقونة Create نحتاج إلى توليد زبائن وذلك باستخدام Create

1. رسم رموز الإنشاء (create) : لإظهار نافذة خواصها نسحب وحدة Create ونضغط عليها

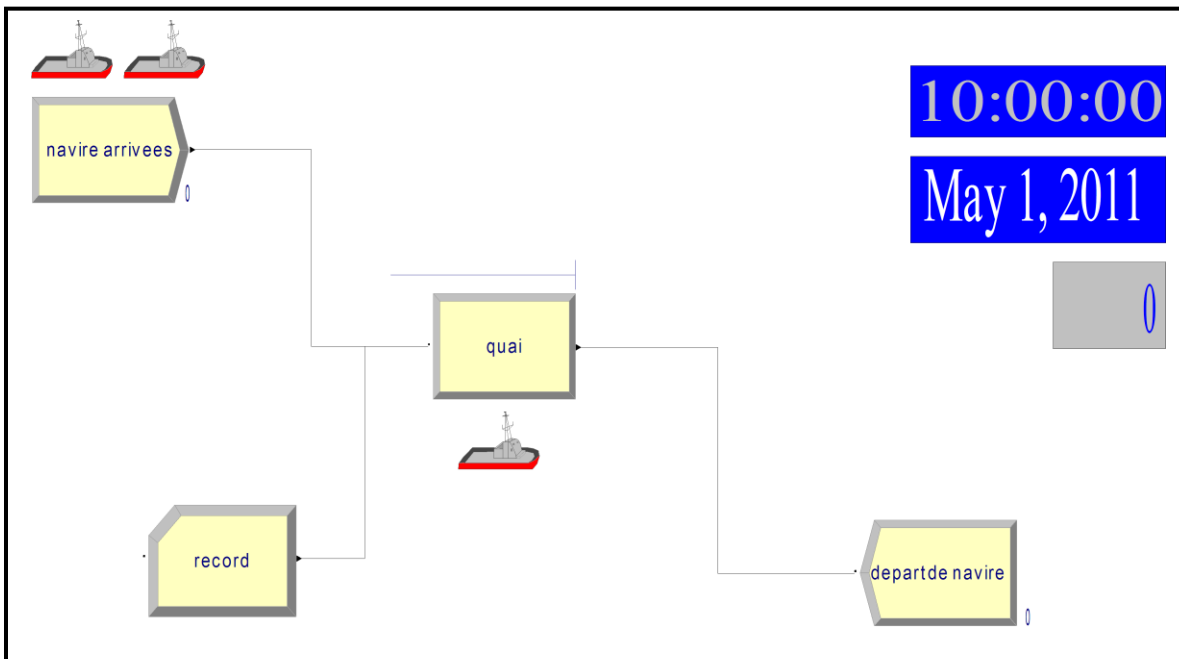
بالفارة مرتين فتظهر نافذة خواص Create التالية:

نافذة الخواص في طور مخطط الانسياب:



2. رسم رموز التعيين (assign): و هي الرموز التي تعطي صفات معينة للمدخلات
- رسم رموز العمليات (process): و هي الرموز التي تعبر عن مراكز الخدمة (الرصيف)
3. رسم رموز القرار (decide): وهي الرموز التي تحدد طبيعة اتخاذ القرار من قبل السفينة.
4. رسم رموز العدادات (record): و هي الرموز التي تقوم بعد المدخلات لمرحلة من مراحل النظام.
5. رسم رمز الخروج من النظام (despose): و هو الرمز الذي يعبر عن الخروج من النظام.
6. رسم رمز الساعة (clock): و هو الرمز الذي يظهر توقيت بداية و نهاية الفترة الزمنية المدروسة من النظام.
7. تعريف رمز الاتجاه (route): و هو الرمز الذي يعبر عن اتجاه سير المدخلات بطريقة متقدمة بدون إظهار خطوط سيرها.
8. تعريف المحطات (station): و هو الرمز الذي يعبر عن المحطة التي تستقبل الاتجاه.
9. رسم خطوط التوصيل (connection): و هي عبارة عن الخطوط التي تعبر عن سير المدخلات بين الرموز المختلفة.
10. إضافة جملة توضيحية (text): للمساعدة في فهم نموذج النظام.

و أخيرا سوف نحصل على المخطط الانسيابي التالي :



4) الخطوة الرابعة : تعريف المدخلات اللازمة لكل مرحلة في النظام ، ويتم تعريف المدخلات بالضغط على الرمز مرتين متتاليتين و تعبئة البيانات الموجودة فيه.

1. تعريف رمز الإنشاء create

نجعل نافذة الحوار من نوع عشوائي Random(Expo)

تعبئ البيانات كما في الشكل. لاحظ في حوار " نوع Type اخترنا " تعبير " Expression وفي حوار " تعبير " اخترنا $DISC(P1,V1,...)$ والتي تعني أن التوزيع لأزمنة ما بين الوصول هو توزيع منفصل معطى بجدول و الزوج $P1, V 1$ هو القيمة الأولى لدالة التوزيع التراكمي والقيمة الأولى الممكنة للمتغير العشوائي " زمن ما بين الوصول " والمدخل $DISC(F(x_1), x_1, F(x_2), x_2, ..., F(x_n), x_n)$

2. تعريف العمليات **Process** التي تقدم الخدمات للمدخلة:

لاحظ في حوار "موارد" Resources ضغطنا على Add... فظهرت النافذة

وملئنا المعلومات كما هو موضح. ثم نضغط OK ثم OK

3. تعريف العداد Record :

يقوم بعد المدخلات التي تمر في كل مرحلة في النظام.

The 'Record' dialog box contains the following fields and controls:

- Name:** A dropdown menu with 'Record 1' selected.
- Type:** A dropdown menu with 'Count' selected.
- Value:** A text input field containing '1'.
- Record into Set:** An unchecked checkbox.
- Counter Name:** A dropdown menu with 'Record 1' selected.
- Buttons:** 'OK', 'Cancel', and 'Help' buttons at the bottom.

4. تعريف رمز الخروج من النظام Dispose :



The 'Dispose' dialog box contains the following fields and controls:

- Name:** A dropdown menu with 'Finish Service' selected.
- Record Entity Statistics:** A checked checkbox.
- Buttons:** 'OK', 'Cancel', and 'Help' buttons at the bottom.

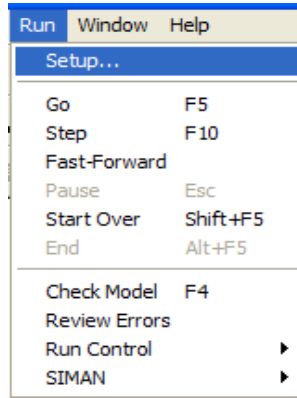
5. تعريف الساعة clock :

The 'Clock' dialog box contains the following fields and controls:

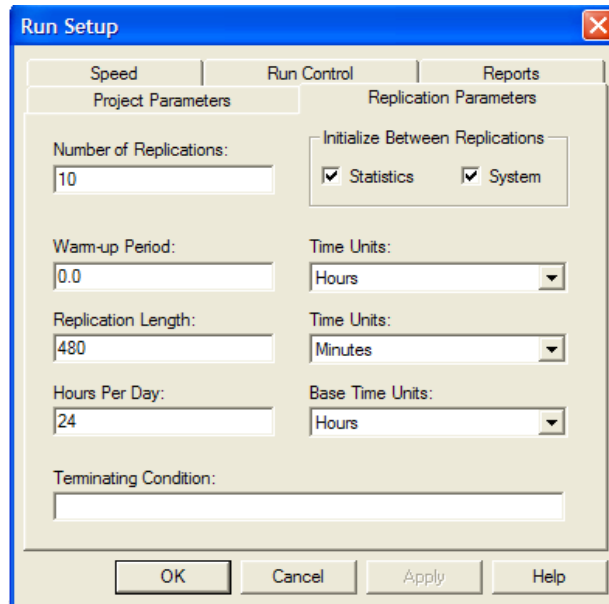
- Starting Time:** Three spinners for Hour (10), Min (0), and Sec (0). A digital display shows '12:00:00'.
- Display:** Radio buttons for 'Analog' and 'Digital' (selected).
- Time Format:** Radio buttons for '12 Hour' (selected) and '24 Hour'.
- Buttons:** 'Area...', 'Border...', 'No Border', and 'Digits...' buttons.
- Transparent Background:** An unchecked checkbox.
- Title:**
 - Use Title:** An unchecked checkbox.
 - Percent Height:** A dropdown menu with '25.0' selected.
 - Vert. Alignment:** A dropdown menu with 'Top' selected.
 - Horiz. Alignment:** A dropdown menu with 'Left' selected.
 - Title Text:** A text input field.
 - Font...:** A button next to the title text field.
- Buttons:** 'OK', 'Cancel', and 'Help' buttons at the bottom.

- (5) الخطوة الخامسة : القيام بفحص الأخطاء الموجودة في النموذج و تعديلها check model
- (6) الخطوة السادسة : القيام بتنفيذ البرنامج.

الآن النموذج جاهز للإجراء .من نافذة الأدوات نختار Run ثم Setup



فتظهر نافذة حوار التجهيز:

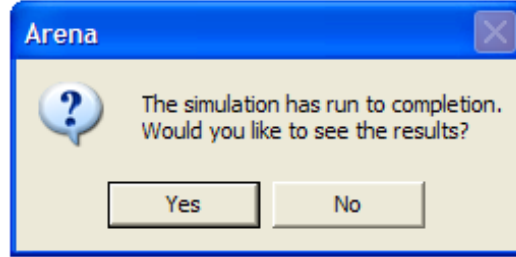


من نافذة معالم التكرار Replication Parameters ندخل عدد التكرارات Number of Replications 10 وهنا اخترنا 144 تكرارات وطول التكرار Replication Length 10

سا وعدد الساعات في اليوم 24 ساعة ومدة التسخين 0.0 ونبقي بقية المعالم في النوافذ الأخرى كما هي

Default Values

باختيار Run ثم Go تجري المحاكاة حتى الانتهاء ويظهر



نضغط على Yes لكي نشاهد التقرير

الخطوة السابعة : الحصول على التقارير و الرسومات البيانية التي تصف النتائج ؛ التقرير الذي تظهره

Arena مفصل (يجوي هنا 9 صفحات) (انظر الملحق) :

- [-] Unnamed Project
 - [-] Entity
 - [-] Time
 - NVA Time
 - Customer
 - Other Time
 - Customer
 - Total Time
 - Customer
 - Transfer Time
 - Customer
 - VA Time
 - Customer
 - Wait Time
 - Customer
 - Other
 - Number In
 - Customer
 - Number Out
 - Customer
 - WIP
 - Customer
 - [-] Queue
 - [-] Time
 - Waiting Time
 - Service Station.Queue
 - Other
 - Number Waiting
 - Service Station.Queue
 - [-] Resource
 - [-] Usage
 - Number Busy
 - Server
 - Number Scheduled
 - Server
 - Number Times Used
 - Server
 - Scheduled Utilization
 - Server
 - Utilization
 - Server

3:15:53AM

Category Overview

April 12, 2004

Values Across All Replications

Unnamed Project

Replications: 10 Time Units: Hours

System Summary

System	Average
Number Out	108.10

Model Filename: C:\Documents and Settings\lamb\Desktop\OR543\SingleServer
Page 1 of 9

4-4 تحليل النتائج:

كانت النتائج التي أظهرها النموذج كالتالي (انظر الملحق رقم 1) تعتبر مباشرة أن نتائج أي محاكاة تكون التقدير الصحيح لكفاءة النظام، حيث انه عند إعادة المحاكاة و استعمال أرقام عشوائية مختلفة فان النتيجة ستكون حتما مغايرة.

ولإعطاء مصداقية لعملية المحاكاة يجب أن تكون المشاهدات مستقلة و متشابهة فيما بينها ، أي تتبع نفس القانون الإحصائي و لها نفس التوقع الرياضي و نفس التباين ، و في هذه الحالة و إذا كانت العينة كبيرة ($n > 30$) ، و انطلاقا من نظرية الحد المركزي (théorème de la limite centrale)، نستطيع أن نعتبر أن المعدلات عادية¹.

أما فيما يخص الحالة التي نعالجها، فنحن نريد أن ندرس فترة انتظار السفن، و لسوء الحظ هناك ارتباط (Corrélation) بين فترات الانتظار لسفينتين متتاليتين، حيث أن السفينة التي تنتظر لتلقي الخدمة ترفع من احتمال انتظار السفينة التي بعدها، وهكذا...، لهذا لم نستعمل المشاهدات المسجلة مباشرة و إنما معدل هذه المشاهدات.

نلاحظ أن العدد المتوسط الأقصى لسفن المتواجدين في النظام قدر بـ 5.3 سفينة و هو غير بعد عن النتيجة المتحصل عليها في المقاربة التحليلية (06 سفن)، وان المعدل الأدنى يقدر بحوالي 1.4 سفينة. أي بمعدل عام يقدر بحوالي 2.78 سفينة.

فيما يخص معدل التكاليف فسوف تصل إلى \$19460

إن إضافة رصيف آخر سيؤدي إلى تقليص فترات الانتظار بصفة محسوسة ، و هذا ما ينعكس بصورة ايجابية على التكاليف التي تواجهها إدارة الميناء .

لكن بالمقابل يجب أن توازن هذا الاقتصاد في فترات الانتظار و التكاليف مع تكلفة تسيير هذا الرصيف الجديد (و ذلك رغم أن تكلفة الإنشاء باهظة إلا أنها تمتلك مع مرور الوقت).

¹ Martin lepine, etude de certaines files d attente : application dans un quai, universite de mentreal, canada, 1991, p :21

الكتابة والاستراتيجيات

خاتمة :

تعتبر نظرية صفوف الانتظار من بين أهم الوسائل المستعملة في التسيير و اتخاذ القرار، وعلى الرغم من قدمها فقد تجاوزت في العصر الحديث قطع الإدارة حيث أصبحت تطبق بكثرة في قطاعات المعلوماتية و الالكترونية (انترنت، حواسب ، دارات...الخ)

مع مرور الوقت تم تعميم النماذج البسيطة التي وضعها erlang و هذا لجعلها أكثر واقعية، حيث ظهرت عدة نظريات جديدة و تطورت منهجية المعالجة الرقمية، حيث شملت دراسة تأثير عملية الوصول و الخدمة، بالإضافة إلى قواعد الأولوية المستعملة في السلوك المؤقت و العرضي للنظام.

تم أيضا اكتشاف نتائج نظرية هامة من طرف جاكسون مملا سهل تحديد التوزيعات المستقرة للشبكات المستقرة لصفوف الانتظار الماركوفية بطريقة بسيطة.

كما يجب أن نذكر أن نظرية صفوف الانتظار تدرج ضمن برامج مدخل لبحوث العمليات ، فهي تعتبر أساسية عند الدراسة و المعالجة الكمية للطرق الحديثة للإنتاج ، مثل المعامل المرنة (atelier flexible) ، و بصفة عامة العمليات التي تطرأ على طول السلاسل اللوجستية (chaine logistique)

إن الهدف الأساسي من وراء هذه المذكرة هو وضع منهجية يمكن استعمالها لقياس جودة الخدمة على مستوى الموانئ الجزائرية ، خاصة فيما يتعلق بفترة الانتظار ، فتطبيقها يساعد على اتخاذ القرارات خاصة عندما يصبح قدرة النظام (أي الميناء) مشبعة، و هذا سواءا كانت فعلية أو تقديرية و هذا بدلالة القيود التي يضعها الزبائن (البواخر) .

النتائج:

إن تقنيات نظرية صفوف الانتظار تسمح لنا بوضع نموذج لحالة الانتظار المتواجدة على مستوى الرصيف، حيث وجدنا أن وصول البواخر إلى الرصيف يتبع قانون بواسون أما فترة الانتظار بين باخرتين متتاليتين فتتبع قانون آسي

و بما أن كفاءة الموانئ ليست مجرد قضية بنايات قاعدية ، إذ على الإدارة أن تمنح قدرة استيعاب و استقبال كافية تسمح بالوقوف في وجه الزيادة الثابتة في حركة الملاحة و بإمكانها تقديم مساعدة للسفن التي تجوب المياه الإقليمية للوطن.

و ككل مؤسسة ربحية ، فعلى إدارة الميناء أن تهدف إلى رفع مردوديتها و تقليص التكاليف و تزيد من قدراتها التنافسية وذلك في محيط يتميز عادة بالمخاطرة و عدم التأكد.

أما فيما يخص نتيجة التطبيق العملي لنظرية الصفوف على ميناء مستغام، و كإجابة مباشرة على الإشكالية المطروحة في بداية الدراسة ، فلتقليص وقت مكوث البواخر يجب بناء رصيف آخر إضافي و هذا لمص وقت الانتظار الناتج من تشبع الأرصفة القديمة و بما أن تكلفته ستكون أقل من تكلفة التي تسببها حالة الانتظار (و هذا مع الوقت) فان لاستثمار هو في حد ذاته ذو مردودية.

يمكن كذلك تقليص من فترة الخدمة بزيادة نشاط الرصيف عن طريق زيادة العمال او التجهيزات.. الخ.

كما نلاحظ أيضا أن نظرية صفوف الانتظار تسمح لنا بمحاكاة الأنظمة خاصة المعقدة منها (كقنوات جاكسون أو القنوات المغلقة ذات التغذية العكسية (feed back)) .

التوصيات:

بهدف تجنب السلبيات السابقة نقتراح جملة من التوصيات ندرجها فيما يلي :

- ❖ ضرورة استخدام الأساليب الكمية و بحوث العمليات بشكل عام و المحاكاة بشكل خاص في اتخاذ القرارات في المؤسسات الجزائرية.
- ❖ إضافة رصيف آخر سوف يقلل من فترات الانتظار الناتجة عن تشبع الرصيف الأول ، مع التركيز على إنشاء موازنة بين الأعباء التي تم تفاديها و كذا التكاليف التي ستترتب عن عملية تسيير هذا الرصيف الجديد.
- ❖ ضرورة إضافة مكاتب مخصصة لدراسات بحوث العمليات و أساليب التسيير الحديثة.

- ❖ إدراج نظم المعلومات كعنصر مهم في عملية صنع القرار، و كذا أتمتة هذه النظم و تبسيطها.
- ❖ تطوير و رفع كفاءات عناصر الأنظمة المعلوماتية للإدارة (معدات، برمجيات، اتصالات، قواعد بيانات، أفراد... الخ)
- ❖ محاولة تقليص مراحل الإجراءات الإدارية و كذا تبسيطها ، مع محاولة جعلها تتم بصورة آلية.
- ❖ تشجيع على استخدام المحاكاة لتحليل الحالات و الحوادث عند اتخاذ القرار.
- ❖ تشجيع صانعي القرار و تدريبهم على استخدام الأساليب الكمية و البرامج التحليلية و المحاكاة لرفع كفاءة و فعالية القرارات المتخذة ، و ذلك عن طريق عقد الندوات و المحاضرات و اللقاءات المفتوحة بين الأكاديميين و متخذي القرار .

المراجع

أولاً: المراجع باللغة العربية :

1. إسماعيل السيد، جلال العبد، *الأساليب الكمية في الإدارة*، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2003
2. بلال احمد إسماعيل *بحوث العمليات، استخدام الأساليب الكمية في صنع القرار*، دار الجامعة الجديدة، مصر، 2005
3. بفا ألوود اسن و سارن راكيش كي، *إدارة الإنتاج و العمليات مدخل حديث*، دار المريخ، الرياض ، السعودية، الطبعة الاولى، 1999
4. جلال إبراهيم العبد، *استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية*، دار الجامعة الجديدة للنشر، الإسكندرية، 2004
5. جلال احمد فهمي، *مقدمة في بحوث العمليات و العلوم الإدارية*، دار الفكر العربي، القاهرة، 1993
6. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، نجم عبد الله الحميدي، *الأساليب الكمية التطبيقية في إدارة الأعمال*، دار وائل للنشر، عمان، 2008
7. عدنان ماجد عبدالرحمن بري، *النمذجة و المحاكاة، قسم الاحصاء و بحوث العمليات*، جامعة الملك سعود، السعودية، 2002
8. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، *المدخل لبحوث العمليات*، دار وائل للنشر، عمان، 2001
9. علي العلاونة-محمد عبيدات-عبد الكريم عواد، *بحوث العمليات في العلوم التجارية*، مركز يزيد للنشر، عمان الأردن، 2005
10. عمار محمود سرحان، لطفى تاج، *مقدمة في العمليات العشوائية*، جامعة الملك سعود، الرياض، 2002
11. عاشور يوسف حسين، *مذكرات في بحوث العمليات*، فلسطين، 1995

12. حشمان مولود، نماذج و تقنيات التنبؤ القصير المدى، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1998
13. الموسوي منعمة زمزير، مقدمة في بحوث العمليات، ب.م: منشورات الجامعة المفتوحة، عمان، 1995
14. الحناوي محمد صالح، ماضي محمد توفيق بحوث العمليات في تخطيط و مراقبة الإنتاج، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2001
15. مجيد علي حسين - عفاف عبد الجبار سعيد، الاقتصاد القياسي : النظرية و التطبيق، دار وائل للنشر، عمان، 1998
16. نصر نعيم ، الأساليب الكمية و بحوث العمليات في الإدارة، عالم الكتب الحديث، الأردن ، الطبعة الأولى ، 2004
17. سهيلة عبد الله سعيد، الجديد في الأساليب الكمية و بحوث العمليات، دار الراية للنشر و التوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 2007
18. راتول محمد بحوث العمليات، د و ج، الجزائر، 2004
19. نور احمد، المحاسبة الإدارية، اتخاذ القرارات، بحوث العمليات، تقييم الأداء، الدار الجامعية، الإسكندرية، 1996

ثانيا : المراجع باللغة الأجنبية

1. Andreas Willig , *A Short Introduction to Queueing Theory* , Telecommunication Networks Group, Sekr., Berlin, 1999
2. A. C. Davison, *Statistical models*, Cambridge University Press ,New York, 2008

3. Andres Weintraub Carlos Romero Trond Bjørndal, **HANDBOOK OF OPERATIONS RESEARCH IN NATURAL RESOURCES**, springer,usa, 2007
4. BERNARD YCART, **Model et algorithme markovienne**, springer édition, Springer –Verlag Berlin, Heidelberg, 2002
5. D.salvator, **économétrie et statistique appliquée** , trad.g.loudieremc.grew-hill, paris, 1985
6. Dr. Y. İlker Topcu, **OPERATIONS RESEARCH LECTURE NOTES**, www.ilkertopcu.net
7. FRANÇOIS HACHE, THOMAS M.LIEBLING ; DOMINIQUÉ DE WERRA, **Recherche opérationnel pour ingénieurs 2** , 1er édition, presse polytechnique et universitaire, RAMANDE, france, 2003
8. G.PUJOLLE, S.FDIDA, **Modèle De Systèmes Et De Réseaux : Files D'attente**, Eyrolles, Paris, 1989
9. Hwei P. Hsu, Ph.D., **Theory and Problems of, Probability, Random Variables, and Random Processe**, Schaum's outline series McGraw-Hill, 1996
10. Houda Mehri , Taoufik Djemel, **Etude de l'Attente Prioritaire Dans Les Ports** , Laboratoire GIAD-FSEG-Sfax, Sfax-TUNISIA, 2009
11. Ivo Adan and Jacques Resing, **Queueig Theory**, Department of Mathematics and Computing Science, The Netherlands, 2002
12. Jean-Louis Boimond, **Simulation Systèmes De Production, Réseaux De Petri** , SIMAN – ARENA, France, 2000

13. Mlika Babes, *Statistique ,files d'attente et simulation* ,OPU ,algerie ,1995
14. Maria Di Mascolo, *Utilisation des réseaux de files d'attente pour l'évaluation de performances de réseaux logistiques*, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, France, 2002
15. Marietta Manolessou, *Théorie des files d'attente*, EISTI - Département Mathématiques, France, 2003.
16. Sheldon M. Ross, *INTRODUCTION TO, PROBABILITY AND STATISTICS FOR ENGINEERS AND SCIENTISTS* ,Third Edition, Elsevier Academic Press, USA, 2004.
17. MURRAY R. SPIEGEL, Ph.D., *THEORY AND PROBLEMS of ,PROBABILITY ,and STATISTICS*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, USA, 1998.
18. MURRAY R. SPIEGEL, Ph.D. , *Theory and Problems of STATISTICS* ,Third Edition, Schaum's Outline Series, usa, 1998.
19. N. Balakrishnan, *An Introduction to Queueing Theory ,Modeling and Analysis in Applications*, Birkhauser, Boston, 2008
20. PERRAULT YVOU G , *Recherche opérationnel : techniques décisionnels*, 2eme édition, ;GAETAN MANIN, Montréal, 1980.
21. Philippe Robert, *Réseaux et files d'attente : méthode probabiliste,* *Mathématique* Subject, Clasification, Newyork ,2000.
22. P. QUITTARD, *Elements De Statistiques, Processus Stochastique Et File D'attente*, OPU, Algérie, 1983.

- 23.R.FAURE, *Précis De Recherche Opérationnelle*, 4eme édition, Dunod, Paris, 1979.
- 24.Rechard bronson, *Theory and probleme for matrix operation*, Schaum's Outline Series, usa, 1989.
- 25.ROSEAUX (preface: Robert Faure),*exercice et probleme resolut de recherche operationnele* T.3,MASSON,paris France,1991.
- 26.Tayfur Altioek, Benjamin Melamed, *Simulation Modeling and Analysis with ARENA*, Academic Press,usa,2007
- 27.Shafer scot M & merdih jack R, *opérations management a process approachwith spreadsheets*,john wiley&son,usa,1998
- 28.U. Narayan Bhat, *An Introduction to Queueing Theory*, Birkhauser, Boston Basel, Berlin, 2008
- 29.W.J. DeCoursey,*Statistics and Probability,for Engineering Applications*,Newnes,,Elsevier Science,USA).,2003
- 30.W. David Kelton, Randall P. Sadowski, Deborah A. Sadowski, *Simulation with Arena*, McGraw-Hill Science /Engineering / Math , usa, 2001

ثالثا: البحوث الجامعية :

1. منال اسماعيل البحيصي، *استخدام الاساليب الكمية في اتخاذ القرارات دراسة تطبيقية*
: استخدام نموذج محاكاة بالحاسوب لحل مشكل خطوط الانتظار في عيادة
صحية، مذكرة ماجستير غير منشورة، لجامعة الاسلامية - غزة، كلية التجارة قسم ادارة
الاعمال، غزة، 2005

2. محمد بن سالم العمري، **تحديد حجم طاقم التمريض باستخدام نماذج الصفوف**،،مذكرة ماجستير غير منشورة، جامعة الملك سعود - كلية العلوم- قسم الاحصاء و بحوث العمليات،المملكة العربية السعودية،1430هـ

1. DOMINIQUE POTIER, *modèle a files d'attente et gestion des ressources dans les system informatique*, thèse de doctorat en science informatique,université scientifique et medecale de gronoble,institut national polytechnique,1977
2. HOUDA MEHRI, TAOUFIK DJEMEL, *étude de l'attente prioritaire dans les ports*, laboratoire GIAD-FSEG –Sfax, institut supérieur de gestion industrielle, tunis, 2009
3. Martin Lépine, *etude de certaine files d'attente : application a un quai*, universite de montreal :departement des science economique faculte des art et des science, canada, 1991
4. RICHARD LOULOU, *les processus d'attente dans les files d'attente multi-serveurs saturées*, thèse de doctorat en science informatique,université scientifique et medecale de gronoble,institut national polytechnique,1978
5. Salah BOUABDALLAH, *application de la theorie des files d'attente pour mesurer la qualite de la prestation des services au secteur des postes. etude pratique au centre payeur de m'sila hodna.*, these de magistere non publier, UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA, M'SILA

رابعاً: الدوريات :

1. A.aissani, *propriétés de second ordre des modèles d'attente*, 4eme rencontre de recherche opérationnelle, U.S.T.H.B, Alger, 1996
2. G.de monie Nation unis, *Cnuced monographies sur la gestion portuaire, mesure et évaluation du rendement et de la productivité des ports*, new York, 1988

خامساً : مواقع الانترنت:

1. www.philadelphia.edu.jo
2. it.kau.edu.sa
3. <http://www.arabicstat.com>
4. <http://forum.arabsbook.com>
5. <http://www.freebookcentre.net>
6. <http://membres.multimania.fr>
7. www-rst.int-evry.fr
8. forums.futura-sciences.com
9. www.techniques-ingenieur.fr

الأملاح

الملحق رقم 1: نتائج تقرير برنامج Arena محاكاة صف الانتظار في الرصيف

لسنة 2009

quai simulation

Replications: 144

Replication 1

Start Time:

0,00 Stop Time:

10,00 Time Units: Hours

Entity

Other

Number In	Value
navire1	7

Number Out	Value
navire1	0

WIP	Average	Half Width	Minimum	Maximum
navire1	5.3000	(Insufficient)	0	7.0000

Queue

Time

Waiting Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
quai.Queue	0	(Insufficient)	0	0

Other

Number Waiting	Average	Half Width	Minimum	Maximum
quai.Queue	4.3000	(Insufficient)	0	6.0000
Queue 1	0	(Insufficient)	0	0

Resource

Usage

Instantaneous Utilization	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Resource 1	1.0000	(Insufficient)	0	1.0000

Number Busy	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Resource 1	1.0000	(Insufficient)	0	1.0000

Number Scheduled	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Resource 1	1.0000	(Insufficient)	1.0000	1.0000

Scheduled Utilization	Value
Resource 1	1.0000

quai simulation

Replications: 144

Replication 1 Start Time: 0,00 Stop Time: 10,00 Time Units: Hours

Resource

Usage

Total Number Seized	Value
Resource 1	1.0000

System

Other

Number Out	Value
System	0

Replication 10 Start Time: 0,00 Stop Time: 10,00 Time Units: Hours

Entity

Other

Number In	Value
navire1	6

Number Out	Value
navire1	0

WIP	Average	Half Width	Minimum	Maximum
navire1	3.1000	(Insufficient)	0	6.0000

Queue

Time

Waiting Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
quai.Queue	0	(Insufficient)	0	0

Other

quai simulation

Replications: 144

Replication 10

Start Time: 0,00 Stop Time: 10,00 Time Units: Hours

Queue

Other

Number Waiting	Average	Half Width	Minimum	Maximum
quai.Queue	2.1000	(Insufficient)	0	5.0000
Queue 1	0	(Insufficient)	0	0

Resource

Usage

Instantaneous Utilization	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Resource 1	1.0000	(Insufficient)	0	1.0000
Number Busy	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Resource 1	1.0000	(Insufficient)	0	1.0000
Number Scheduled	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Resource 1	1.0000	(Insufficient)	1.0000	1.0000
Scheduled Utilization	Value			
Resource 1	1.0000			
Total Number Seized	Value			
Resource 1	1.0000			

System

Other

Number Out	Value
System	0

Replication 100

Start Time: 0,00 Stop Time: 10,00 Time Units: Hours

Entity

Other

quai simulation

Replications: 144

Replication 100

Start Time:

0,00 Stop Time:

10,00 Time Units: Hours

Entity

Other

Number In	Value
navire1	5

Number Out	Value
navire1	0

WIP	Average	Half Width	Minimum	Maximum
navire1	3.1000	(Insufficient)	0	5.0000

Queue

Time

Waiting Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
quai.Queue	0	(Insufficient)	0	0

Other

Number Waiting	Average	Half Width	Minimum	Maximum
quai.Queue	2.1000	(Insufficient)	0	4.0000
Queue 1	0	(Insufficient)	0	0

Resource

Usage

Instantaneous Utilization	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Resource 1	1.0000	(Insufficient)	0	1.0000

Number Busy	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Resource 1	1.0000	(Insufficient)	0	1.0000

Number Scheduled	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Resource 1	1.0000	(Insufficient)	1.0000	1.0000

Scheduled Utilization	Value
Resource 1	1.0000

quai simulation

Replications: 144

Replication 100

Start Time: 0,00 Stop Time: 10,00 Time Units: Hours

Resource

Usage

Total Number Seized	Value
Resource 1	1.0000

System

Other

Number Out	Value
System	0

Replication 101

Start Time: 0,00 Stop Time: 10,00 Time Units: Hours

Entity

Other

Number In	Value
navire1	10

Number Out	Value
navire1	0

WIP	Average	Half Width	Minimum	Maximum
navire1	4.4000	(Insufficient)	0	10.0000

Queue

Time

Waiting Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
quai.Queue	0	(Insufficient)	0	0

Other

quai simulation

09:13:01

Replications: 144

Time Units: Hours

Key Performance Indicators

System

Average

Number Out

0

Values Across All Replications

quai simulation

Replications: 144 Time Units: Hours

Entity

Other

Number In

	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average
navire1	4.8333	0,26	2.0000	10.0000

Number Out

	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average
navire1	0.00	0,00	0.00	0.00

WIP

	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average	Minimum Value	Maximum Value
navire1	2.7882	< 0,14	1.4000	5.3000	0.00	10.0000

Queue

Time

Waiting Time

	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average	Minimum Value	Maximum Value
quai.Queue	0.00	< 0,00	0.00	0.00	0.00	0.00

Other

Number Waiting

	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average	Minimum Value	Maximum Value
quai.Queue	1.7882	< 0,14	0.4000	4.3000	0.00	9.0000
Queue 1	0.00	< 0,00	0.00	0.00	0.00	0.00

Values Across All Replications

quai simulation

Replications: 144 Time Units: Hours

Resource

Usage

Instantaneous Utilization	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average	Minimum Value	Maximum Value
Resource 1	1.0000	< 0,00	1.0000	1.0000	0.00	1.0000
Number Busy	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average	Minimum Value	Maximum Value
Resource 1	1.0000	< 0,00	1.0000	1.0000	0.00	1.0000
Number Scheduled	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average	Minimum Value	Maximum Value
Resource 1	1.0000	< 0,00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Scheduled Utilization	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average		
Resource 1	1.0000	0,00	1.0000	1.0000		
Total Number Seized	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average		
Resource 1	1.0000	0,00	1.0000	1.0000		

quai simulation

Replications: 144

Replication 1

Start Time:

0,00

Stop Time:

10,00

Time Units: Hours

Queue Detail Summary

Time

Waiting Time

0.00

quai.Queue

Other

Number Waiting

4.30

0.00

quai.Queue
Queue 1

quai simulation

Replications: 144

Replication 1

Start Time:

0,00

Stop Time:

10,00

Time Units: Hours

quai.Queue

Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Waiting Time	0	(Insufficient)	0	0
Other	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Number Waiting	4.3000	(Insufficient)	0	6.0000

Queue 1

Other	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Number Waiting	0	(Insufficient)	0	0

quai simulation

Replications: 144

Replication 1

Start Time:

0,00

Stop Time:

10,00

Time Units: Hours

Resource Detail Summary

Usage

	<u>Inst Util</u>	<u>Num Busy</u>	<u>Num Sched</u>	<u>Num Seized</u>	<u>Sched Util</u>
Resource 1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

الملحق رقم 2: القيم النموذجية للرصيف خلال الأعوام 2005-2009

Durée moyenne attente en rade et séjour à quai des navires
2006/2005

Désignation	Navires Traités		Attente Moyenne en Rade (jour)			Séjour Moyen à Quai (jour)		
	2005	2006	2005	2006	Ecart %	2005	2006	Ecart %
Installations Spécialisées								
Dont :								
Céréales	34	25	1,32	1,14	-14	6,43	6,10	-5
Sucre Roux	1	-	0,08	-	-100	14,00	-	-100
Bitume	8	9	0,44	0,47	916	3,48	2,59	-26
Vin	-	2	-	0,64	-	-	4,00	-
Mélasses	1	1	0,29	0,70	141	10,96	4,03	-63
Installations hors Spécial.								
Dont :								
Fers / Tubes	30	102	0,41	0,72	76	3,67	3,61	-2
Bois	5	2	0,22	0,03	-86	2,85	4,09	44
Ro/Ro	83	78	0,19	0,40	111	0,73	0,83	14
Ciment	4	6	0,78	0,45	-42	2,49	2,10	-16
Divers Cargos	125	134	0,45	1,04	131	3,66	2,42	-34

• **Attente moyenne en rade**

La durée moyenne d'attente des navires en rade a connu durant l'année 2006 un accroissement de 74% par rapport à l'année écoulée. elle passe ainsi de 0,47 jour en 2005 à **0,82** jour en 2006.

• **Séjour moyen à quai**

Comparativement aux réalisations antérieures, la durée moyenne de séjour à quai des navires a connu une baisse de 15%, il est passé de 3,19 jours en 2005 à **2,72** jours en 2006.

- Rendements des postes à quai

Le trafic de **841.763** tonnes sur une capacité nominale fixée à 1.200.000 tonnes / an affiche un taux d'utilisation de **70,15 %** sur les postes à quai utilisés à vocation commerciale.

➤ Rendements des postes à quai par mètre linéaire de quai

Postes à quai	1 ^{er} Bassin						2 ^{ème} Bassin		
	P0	P1	P2	P3	P4	P5	NP1 et NP2	P6	P7
Longueur en mètres	117	135	135	135	135	135	217	140	140
Tonnage par poste à quai	80.989	47.377	70.881	47.724	50.866	83.335	183 357	-	277 233
Rendement 2006	692	351	525	354	377	595	845	-	1.980

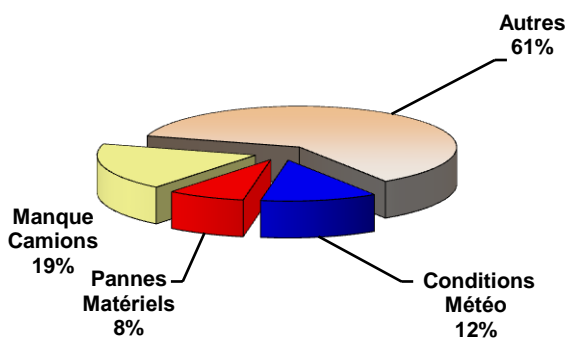
NB : Le poste 6 est occupé par les embarcations de pêches.

15 - Durée des attentes et arrêts des équipes de manutention

Les temps d'attentes et arrêts des équipes de manutention ont atteint **1.607** heures. La répartition par cause d'arrêts est composée comme suit :

- ➔ Conditions météorologiques.....**192 H** soit **12 %**
- ➔ Pannes du matériel.....**128 H** soit **8 %**
- ➔ Manque de camions.....**300 H** soit **19 %**
- ➔ Autres causes.....**987 H** soit **61 %**

(Accomplissement formalités douanières, contrôle de qualité, phyto sanitaire, attentes documents de bord, fins de shift etc....)



Evolution de l'attente et du séjour des navires
2007/2006

• **Attente moyenne en rade**

Par rapport à l'exercice précédent, la durée moyenne d'attente des navires en rade a connu un accroissement de **0,03 jour**. Elle passe ainsi de 0,82 jour en 2006 à **0,85 jour** en 2007 à cause de l'occupation des quais commerciaux par la présence d'une importante flottille de pêche.

• **Séjour moyen à quai**

Le séjour moyen à quai des navires passe de 2,72 jours en 2006 à **3,03 jours** en 2007 en affichant une hausse de **0,31 jour** du essentiellement au trafic important en sacheries unitaires et produits en sacs.

U : Jours

Désignation	Navires traités		Attente Moyenne en Rade			Séjour Moyen à Quai		
	2006	2007	2006	2007	Ecart %	2006	2007	Ecart %
Installations Spécialisées dont:								
Céréales	25	26	1,14	1,33	17	6,10	4,52	-26
Sucre Roux	-	-	-	-	-	-	-	-
Bitume	9	3	0,47	0,36	-23	2,59	2,02	-22
Vin	2	1	0,64	0,52	-19	4,00	4,06	1
Mélasses	1	-	0,70	-	-	4,03	-	-
Installations hors Spécial. dont :								
Fers / Tubes	102	95	0,72	0,79	10	3,61	3,87	7
Bois	2	6	0,03	0,72	2300	4,09	2,92	-29
Ro/Ro	78	60	0,40	0,36	-10	0,83	0,95	14
Ciment	6	8	0,45	0,52	16	2,10	1,49	-29
Divers Cargos	134	153	1,04	0,84	-19	2,42	2,96	22

14 – Trafic manipulé par poste à quai

Sur une capacité nominale fixée à 1.200.000 tonnes / an, le trafic de **865.804 tonnes** affiche un taux d'utilisation de **72,15 %** sur les dix (10) postes à quai utilisés à vocation commerciale.

Postes à quai	1 ^{er} Bassin						2 ^{ème} Bassin		
	P0	P1	P2	P3	P4	P5	NP1 et 2	P6	P7
Longueur (Mètres)	117	135	135	135	135	135	217	140	140
Tonnage par quai	125.738	19.128	80.146	25.916	51.338	197.460	171.476	-	194.602
Rendement 2007	1.075	142	594	192	380	1.410	790	-	1.390

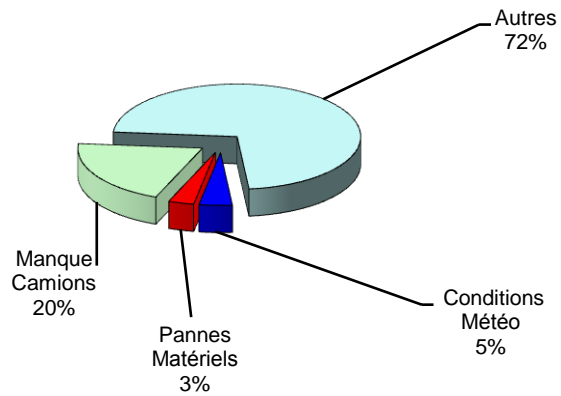
NB: Le poste 6 est envahi par les embarcations de pêches.

15 - Durée des attentes et arrêts des équipes de manutention

Les temps d'attentes et arrêts des équipes de manutention ont atteint **2.114 heures**. La répartition par cause d'arrêts est composée comme suit :

→ Conditions météorologiques.....**91 H** soit **5%**

- Pannes du matériel.....**70 H** soit **3%**
 - Manque de camions..... **429 H** soit **20%**
 - Autres causes..... **1.524 H** soit **72%**
- (Accomplissement formalités douanières, contrôle de qualité, phyto sanitaire, attentes documents de bord, fins de shift etc....)



**Evolution de l'attente et du séjour des navires
2008/2007**

• **Attente moyenne en rade**

Par rapport à l'exercice précédent, la durée moyenne d'attente des navires en rade a connu un accroissement de **1,51 jours**. Elle passe ainsi de 0,85 jour en 2007 à **2,36 jours** en 2008 à cause de l'occupation des quais commerciaux par la présence d'une importante flottille de pêche où quatre (04) postes sont totalement amputés sur les postes à vocation commerciale.

• **Séjour moyen à quai**

Le séjour moyen à quai des navires passe de 3,03 jours en 2007 à **3,65 jours** en 2008 en affichant une hausse de **0.62 jour** du essentiellement au trafic important de céréales et de ciment à l'exportation

Désignation	Navires à l'Entrée		Attente Moyenne en Rade			Séjour Moyen à Quai		
	2007	2008	2007	2008	Ecart %	2007	2008	Ecart %
Installations Spécialisées								
Céréales	26	43	1,33	5,98	350	4,52	7,85	74
Sucre Roux	-	-	-	-	-	-	-	-
Bitume	3	16	0,36	1,06	194	2,02	3,23	60
Vin	1	1	0,52	1,74	235	4,06	0,92	-77
Mélasse	-	2	-	4,11	-	-	9,87	-
Installations hors Spécial.								
Fers / Tubes	95	91	0,79	1,15	46	3,87	3,61	-7
Bois	6	3	0,72	2,15	199	2,92	2,77	-5
Ro/Ro	60	38	0,36	0,71	97	0,95	1,08	14
Ciments	8	9	0,52	1,79	244	1,49	5,4	262
Minerais	33	38	0,39	1,99	410	2,60	2,58	-1
Divers Cargos	120	107	1,06	2,72	157	3,08	3,29	7

14 – Rendement des postes à quai

Postes à quai	1 ^{er} Bassin						2 ^{ème} Bassin		
	P0	P1	P2	P3	P4	P5	NP1 et 2	P6	P7
Longueur (Mètres)	117	135	135	135	135	135	217	140	140
Tonnage par quai	122.682	30.135	100.850	55.900	40.929	206.093	228.703	-	251.537
Rendement 2008	1.049	223	747	414	303	1.472	1.054	-	1.797

NB: Le poste 6 est envahi en permanence par les embarcations de pêches.

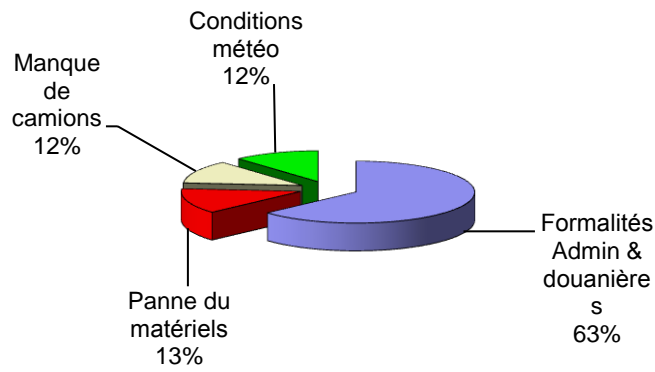
15 - Attentes et arrêts des équipes de manutention

Les temps d'attentes et arrêts des équipes de manutention ont atteint **1.797 heures**. La répartition par cause d'arrêts est composée comme suit :

- Formalités administratives et douanières, contrôle de qualité, contrôle phyto sanitaire, attentes documents de bord, débuts et fins de shift etc.

- Pannes du matériel.....**235 H** soit **13%**
- Manque de camions.....**216 H** soit **12%**
- Conditions météorologiques.....**209 H** soit **12%**

1.137 H soit **63%**



Evolution de l'attente et du séjour des navires 2009/2008

- **Attente moyenne en rade**

Par rapport à l'exercice précédent, la durée moyenne d'attente des navires en rade a connu un

Désignation	Navires à l'Entrée		Attente Moyenne en Rade		Séjour Moyen à Quai	
	2008	2009	2008	2009	2008	2009
Céréales	43	20	5,98	4,50	7,84	6,37
Porte-conteneurs	-	-	-	-	-	-
Ro-Ro	40	38	0,71	1,80	1,08	0,83
Cargos (tous types de cargos)						
Dont : Fers / Tubes	91	92	1,15	4,72	3,61	4,97
Déchets ferreux	-	-	-	-	-	-
Bois	3	7	2,15	0,67	2,77	2,17
Ciments	9	16	1,79	2,30	5,40	4,03
Pétroliers, méthaniers, butaniers	-	-	-	-	-	-
Autres tankers	-	-	-	-	-	-

accroissement de **1,12 jour**. Elle passe ainsi de 2,36 jours en 2008 à **3,48 jours** en 2009 à cause de l'occupation des quais commerciaux par la présence d'une importante flottille de pêche où quatre (04) postes sont totalement amputés sur les postes à vocation commerciale.

- **Séjour moyen à quai**

Le séjour moyen à quai des navires a connu une baisse de 0,15 jour passant de 3,65 à **3,50 jours** en 2009.

U: Jour

Bitumiers	16	25	1,06	2,50	3,23	2,82
Minéraliers	38	22	1,99	1,71	2,35	3,29
Autres navires	108	145	2,72	0,57	5,50	4,84

14 – Rendement des postes à quai

Postes à quai	1 ^{er} Bassin						2 ^{ème} Bassin		
	P0	P1	P2	P3	P4	P5	NP1 & 2	P6	P7
Longueur (Mètres)	117	135	135	135	135	135	217	140	140
Tonnage par quai	112.023	94.616	128.809	19.610	-	164.159	271.497	-	381.724
Rendement 2009	957	701	954	145	-	1.173	1.251	-	2.727

15 - Attentes et arrêts des équipes de manutention

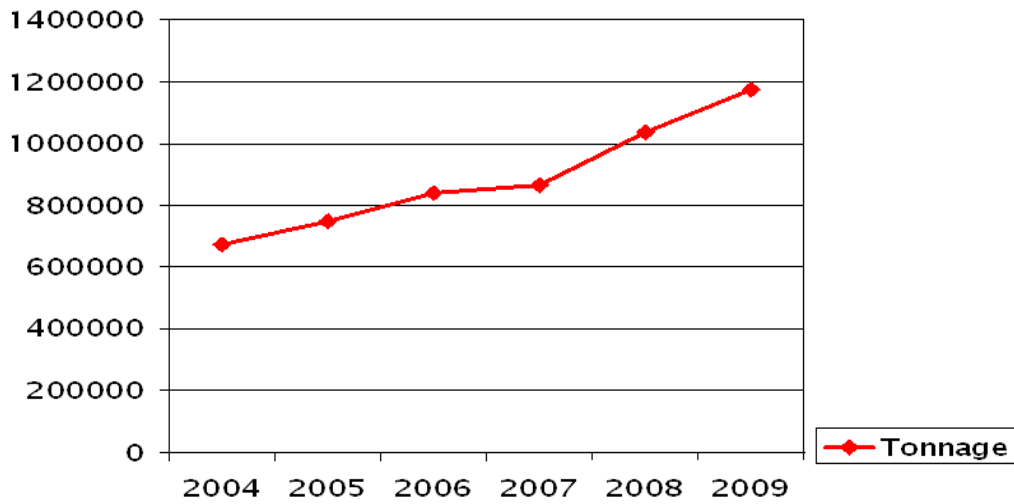
Les temps d'attentes et arrêts des équipes de manutention ont atteint **2.429 heures**. La répartition par cause d'arrêts est composée comme suit :

- Formalités administratives et douanières, contrôle de qualité, contrôle phytosanitaire, attentes documents de bord, départs et fins de shift etc.....
1.524 H soit **62%**
- Pannes du matériel..... **310 H** soit **13%**
- Manque de camions..... **434 H** soit **18%**
- Conditions météorologiques..... **161 H** soit **7%**

الملحق رقم 03 : حركة النقل في الرصيف خلال سنة 2009

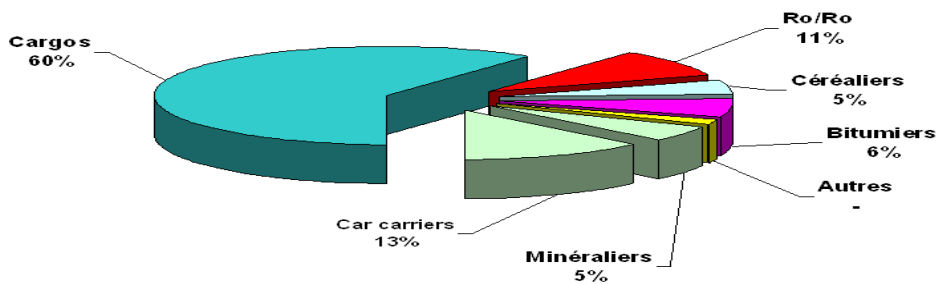
Indicateurs	2005	2006	2007	2008	2009	2010 (au 28/02)
Navires à l'Entrée	293	359	352	348	419	
Trafic en Tonne	750.071	841.763	865.804	1.036.829	1.172.439	

□ **ÉVOLUTION DU TRAFIC**

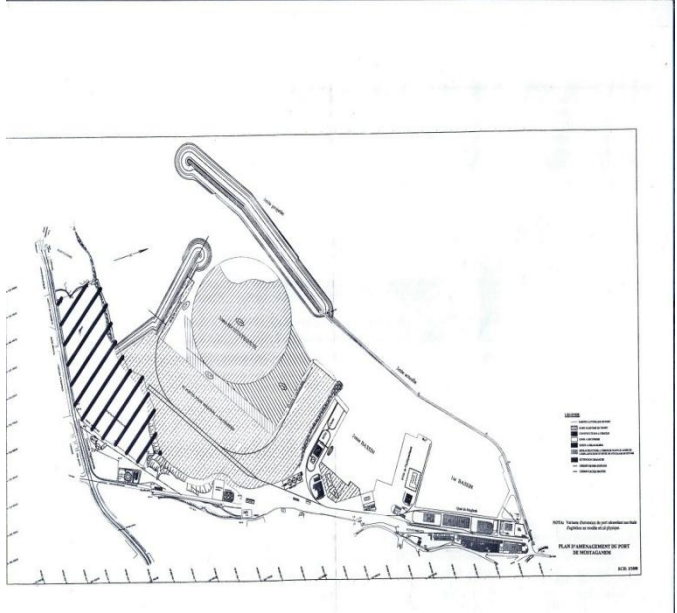
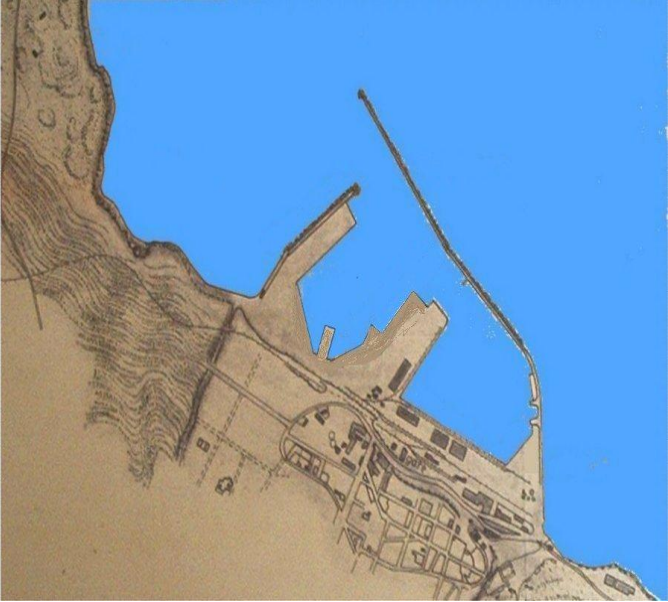


□ **RÉPARTITION DU TRAFIC**

	Import	Export	Cabotage	total	taux
Débarqué	1.122.143	-	-	1.122.143	96%
Embarqué	-	50.296	-	50.296	4%
Total	1.122.143	50.296	-	1.172.439	



الملحق رقم 04 : موقع الرصيف



الملحق رقم 05 : توزيع كاي تربيع

TABLE DU CHI-DEUX : $\chi^2(n)$

p

n P	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11										
12										
13	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
14	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
15	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
16	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
17	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
18	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
19	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
20	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
21	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
22	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
23										
24										
25	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
26	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
27	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
28	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
29	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
30	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Pour $n > 30$, on peut admettre que $\chi^2 - 2n-1 \sim N(0,1)$

الملحق رقم 06 : توزيع ارلانج

Erlang B Traffic Table

Maximum Offered Load Versus B and N

B is in %

N/B	0.01	0.05	0.1	0.51.02510					15	20	30	40
1	.0001	.0005	.0010	.0050	.0101	.0204	.0526	.1111	.1765	.2500	.4286	.6667
2	.0142	.0321	.0458	.1054	.1526	.2235	.3813	.5954	.7962	1.000	1.449	2.000
3	.0868	.1517	.1938	.3490	.4555	.6022	.8994	1.271	1.603	1.930	2.633	3.480
4	.2347	.3624	.4393	.7012	.8694	1.092	1.525	2.045	2.501	2.945	3.891	5.021
5	.4520	.6486	.7621	1.132	1.361	1.657	2.219	2.881	3.454	4.010	5.189	6.596
6	.7282	.9957	1.146	1.622	1.909	2.276	2.960	3.758	4.445	5.109	6.514	8.191
7	1.054	1.392	1.579	2.158	2.501	2.935	3.738	4.666	5.461	6.230	7.856	9.800
8	1.422	1.830	2.051	2.730	3.128	3.627	4.543	5.597	6.498	7.369	9.213	11.42
9	1.826	2.302	2.558	3.333	3.783	4.345	5.370	6.546	7.551	8.522	10.58	13.05
10	2.260	2.803	3.092	3.961	4.461	5.084	6.216	7.511	8.616	9.685	11.95	14.68
11	2.722	3.329	3.651	4.610	5.160	5.842	7.076	8.487	9.691	10.86	13.33	16.31
12	3.207	3.878	4.231	5.279	5.876	6.615	7.950	9.474	10.78	12.04	14.72	17.95
13	3.713	4.447	4.831	5.964	6.607	7.402	8.835	10.47	11.87	13.22	16.11	19.60
14	4.239	5.032	5.446	6.663	7.352	8.200	9.730	11.47	12.97	14.41	17.50	21.24
15	4.781	5.634	6.077	7.376	8.108	9.010	10.63	12.48	14.07	15.61	18.90	22.89
16	5.339	6.250	6.722	8.100	8.875	9.828	11.54	13.50	15.18	16.81	20.30	24.54
17	5.911	6.878	7.378	8.834	9.652	10.66	12.46	14.52	16.29	18.01	21.70	26.19
18	6.496	7.519	8.046	9.578	10.44	11.49	13.39	15.55	17.41	19.22	23.10	27.84
19	7.093	8.170	8.724	10.33	11.23	12.33	14.32	16.58	18.53	20.42	24.51	29.50
20	7.701	8.831	9.412	11.09	12.03	13.18	15.25	17.61	19.65	21.64	25.92	31.15
21	8.319	9.501	10.11	11.86	12.84	14.04	16.19	18.65	20.77	22.85	27.33	32.81
22	8.946	10.18	10.81	12.64	13.65	14.90	17.13	19.69	21.90	24.06	28.74	34.46
23	9.583	10.87	11.52	13.42	14.47	15.76	18.08	20.74	23.03	25.28	30.15	36.12
24	10.23	11.56	12.24	14.20	15.30	16.63	19.03	21.78	24.16	26.50	31.56	37.78
25	10.88	12.26	12.97	15.00	16.13	17.51	19.99	22.83	25.30	27.72	32.97	39.44
26	11.54	12.97	13.70	15.80	16.96	18.38	20.94	23.89	26.43	28.94	34.39	41.10
27	12.21	13.69	14.44	16.60	17.80	19.27	21.90	24.94	27.57	30.16	35.80	42.76
28	12.88	14.41	15.18	17.41	18.64	20.15	22.87	26.00	28.71	31.39	37.21	44.41
29	13.56	15.13	15.93	18.22	19.49	21.04	23.83	27.05	29.85	32.61	38.63	46.07
30	14.25	15.86	16.68	19.03	20.34	21.93	24.80	28.11	31.00	33.84	40.05	47.74
31	14.94	16.60	17.44	19.85	21.19	22.83	25.77	29.17	32.14	35.07	41.46	49.40
32	15.63	17.34	18.21	20.68	22.05	23.73	26.75	30.24	33.28	36.30	42.88	51.06
33	16.34	18.09	18.97	21.51	22.91	24.63	27.72	31.30	34.43	37.52	44.30	52.72
34	17.04	18.84	19.74	22.34	23.77	25.53	28.70	32.37	35.58	38.75	45.72	54.38
35	17.75	19.59	20.52	23.17	24.64	26.44	29.68	33.43	36.72	39.99	47.14	56.04
36	18.47	20.35	21.30	24.01	25.51	27.34	30.66	34.50	37.87	41.22	48.56	57.70
37	19.19	21.11	22.08	24.85	26.38	28.25	31.64	35.57	39.02	42.45	49.98	59.37
38	19.91	21.87	22.86	25.69	27.25	29.17	32.62	36.64	40.17	43.68	51.40	61.03
39	20.64	22.64	23.65	26.53	28.13	30.08	33.61	37.72	41.32	44.91	52.82	62.69
40	21.37	23.41	24.44	27.38	29.01	31.00	34.60	38.79	42.48	46.15	54.24	64.35
41	22.11	24.19	25.24	28.23	29.89	31.92	35.58	39.86	43.63	47.38	55.66	66.02
42	22.85	24.97	26.04	29.09	30.77	32.84	36.57	40.94	44.78	48.62	57.08	67.68
43	23.59	25.75	26.84	29.94	31.66	33.76	37.57	42.01	45.94	49.85	58.50	69.34

44	24.33	26.53	27.64	30.80	32.54	34.68	38.56	43.09	47.09	51.09	59.92	71.01
45	25.08	27.32	28.45	31.66	33.43	35.61	39.55	44.17	48.25	52.32	61.35	72.67
46	25.83	28.11	29.26	32.52	34.32	36.53	40.55	45.24	49.40	53.56	62.77	74.33
47	26.59	28.90	30.07	33.38	35.22	37.46	41.54	46.32	50.56	54.80	64.19	76.00
48	27.34	29.70	30.88	34.25	36.11	38.39	42.54	47.40	51.71	56.03	65.61	77.66
49	28.10	30.49	31.69	35.11	37.00	39.32	43.53	48.48	52.87	57.27	67.04	79.32
50	28.87	31.29	32.51	35.98	37.90	40.26	44.53	49.56	54.03	58.51	68.46	80.99
51	29.63	32.09	33.33	36.85	38.80	41.19	45.53	50.64	55.19	59.75	69.88	82.65
52	30.40	32.90	34.15	37.72	39.70	42.12	46.53	51.73	56.35	60.99	71.31	84.32
53	31.17	33.70	34.98	38.60	40.60	43.06	47.53	52.81	57.50	62.22	72.73	85.98
54	31.94	34.51	35.80	39.47	41.51	44.00	48.54	53.89	58.66	63.46	74.15	87.65
55	32.72	35.32	36.63	40.35	42.41	44.94	49.54	54.98	59.82	64.70	75.58	89.31
56	33.49	36.13	37.46	41.23	43.32	45.88	50.54	56.06	60.98	65.94	77.00	90.97
57	34.27	36.95	38.29	42.11	44.22	46.82	51.55	57.14	62.14	67.18	78.43	92.64
58	35.05	37.76	39.12	42.99	45.13	47.76	52.55	58.23	63.31	68.42	79.85	94.30
59	35.84	38.58	39.96	43.87	46.04	48.70	53.56	59.32	64.47	69.66	81.27	95.97
60	36.62	39.40	40.80	44.76	46.95	49.64	54.57	60.40	65.63	70.90	82.70	97.63
61	37.41	40.22	41.63	45.64	47.86	50.59	55.57	61.49	66.79	72.14	84.12	99.30
62	38.20	41.05	42.47	46.53	48.77	51.53	56.58	62.58	67.95	73.38	85.55	101.0
63	38.99	41.87	43.31	47.42	49.69	52.48	57.59	63.66	69.11	74.63	86.97	102.6
64	39.78	42.70	44.16	48.31	50.60	53.43	58.60	64.75	70.28	75.87	88.40	104.3
65	40.58	43.52	45.00	49.20	51.52	54.38	59.61	65.84	71.44	77.11	89.82	106.0
66	41.38	44.35	45.85	50.09	52.44	55.33	60.62	66.93	72.60	78.35	91.25	107.6
67	42.17	45.18	46.69	50.98	53.35	56.28	61.63	68.02	73.77	79.59	92.67	109.3
68	42.97	46.02	47.54	51.87	54.27	57.23	62.64	69.11	74.93	80.83	94.10	111.0
69	43.77	46.85	48.39	52.77	55.19	58.18	63.65	70.20	76.09	82.08	95.52	112.6
70	44.58	47.68	49.24	53.66	56.11	59.13	64.67	71.29	77.26	83.32	96.95	114.3
71	45.38	48.52	50.09	54.56	57.03	60.08	65.68	72.38	78.42	84.56	98.37	116.0
72	46.19	49.36	50.94	55.46	57.96	61.04	66.69	73.47	79.59	85.80	99.80	117.6
73	47.00	50.20	51.80	56.35	58.88	61.99	67.71	74.56	80.75	87.05	101.2	119.3
74	47.81	51.04	52.65	57.25	59.80	62.95	68.72	75.65	81.92	88.29	102.7	120.9
75	48.62	51.88	53.51	58.15	60.73	63.90	69.74	76.74	83.08	89.53	104.1	122.6
76	49.43	52.72	54.37	59.05	61.65	64.86	70.75	77.83	84.25	90.78	105.5	124.3
77	50.24	53.56	55.23	59.96	62.58	65.81	71.77	78.93	85.41	92.02	106.9	125.9
78	51.05	54.41	56.09	60.86	63.51	66.77	72.79	80.02	86.58	93.26	108.4	127.6
79	51.87	55.25	56.95	61.76	64.43	67.73	73.80	81.11	87.74	94.51	109.8	129.3
80	52.69	56.10	57.81	62.67	65.36	68.69	74.82	82.20	88.91	95.75	111.2	130.9
81	53.51	56.95	58.67	63.57	66.29	69.65	75.84	83.30	90.08	96.99	112.6	132.6
82	54.33	57.80	59.54	64.48	67.22	70.61	76.86	84.39	91.24	98.24	114.1	134.3
83	55.15	58.65	60.40	65.39	68.15	71.57	77.87	85.48	92.41	99.48	115.5	135.9
84	55.97	59.50	61.27	66.29	69.08	72.53	78.89	86.58	93.58	100.7	116.9	137.6
85	56.79	60.35	62.14	67.20	70.02	73.49	79.91	87.67	94.74	102.0	118.3	139.3
86	57.62	61.21	63.00	68.11	70.95	74.45	80.93	88.77	95.91	103.2	119.8	140.9
87	58.44	62.06	63.87	69.02	71.88	75.42	81.95	89.86	97.08	104.5	121.2	142.6
88	59.27	62.92	64.74	69.93	72.82	76.38	82.97	90.96	98.25	105.7	122.6	144.3
89	60.10	63.77	65.61	70.84	73.75	77.34	83.99	92.05	99.41	107.0	124.0	145.9
90	60.92	64.63	66.48	71.76	74.68	78.31	85.01	93.15	100.6	108.2	125.5	147.6

91	61.75	65.49	67.36	72.67	75.62	79.27	86.04	94.24	101.8	109.4	126.9	149.3
92	62.58	66.35	68.23	73.58	76.56	80.24	87.06	95.34	102.9	110.7	128.3	150.9
93	63.42	67.21	69.10	74.50	77.49	81.20	88.08	96.43	104.1	111.9	129.8	152.6
94	64.25	68.07	69.98	75.41	78.43	82.17	89.10	97.53	105.3	113.2	131.2	154.3
95	65.08	68.93	70.85	76.33	79.37	83.13	90.12	98.63	106.4	114.4	132.6	155.9
96	65.92	69.79	71.73	77.24	80.31	84.10	91.15	99.72	107.6	115.7	134.0	157.6
97	66.75	70.65	72.61	78.16	81.25	85.07	92.17	100.8	108.8	116.9	135.5	159.3
98	67.59	71.52	73.48	79.07	82.18	86.04	93.19	101.9	109.9	118.2	136.9	160.9
99	68.43	72.38	74.36	79.99	83.12	87.00	94.22	103.0	111.1	119.4	138.3	162.6
100	69.27	7~.25	75.24	80.91	84.06	87.97	95.24	104.1	112.3	120.6	139.7	164.3

N is the number of servers. The numerical column headings indicate blocking probability B in %. Table generated by Dan Dexter

Erlang C Traffic Table

Maximum Offered Load Versus B and N
B is in %

N/B	0.01	0.05	0.1	0.51.02510				15	20	30	40	
1	.0001	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0500	.1000	.1500	.2000	.3000	.4000
2	.0142	.0319	.0452	.1025	.1465	.2103	.3422	.5000	.6278	.7403	.9390	1.117
3	.0860	.1490	.1894	.3339	.4291	.5545	.7876	1.040	1.231	1.393	1.667	1.903
4	.2310	.3533	.4257	.6641	.8100	.9939	1.319	1.653	1.899	2.102	2.440	2.725
5	.4428	.6289	.7342	1.065	1.259	1.497	1.905	2.313	2.607	2.847	3.241	3.569
6	.7110	.9616	1.099	1.519	1.758	2.047	2.532	3.007	3.344	3.617	4.062	4.428
7	1.026	1.341	1.510	2.014	2.297	2.633	3.188	3.725	4.103	4.406	4.897	5.298
8	1.382	1.758	1.958	2.543	2.866	3.246	3.869	4.463	4.878	5.210	5.744	6.178
9	1.771	2.208	2.436	3.100	3.460	3.883	4.569	5.218	5.668	6.027	6.600	7.065
10	2.189	2.685	2.942	3.679	4.077	4.540	5.285	5.986	6.469	6.853	7.465	7.959
11	2.634	3.186	3.470	4.279	4.712	5.213	6.015	6.765	7.280	7.688	8.336	8.857
12	3.100	3.708	4.018	4.896	5.363	5.901	6.758	7.554	8.099	8.530	9.212	9.761
13	3.587	4.248	4.584	5.529	6.028	6.602	7.511	8.352	8.926	9.379	10.09	10.67
14	4.092	4.805	5.166	6.175	6.705	7.313	8.273	9.158	9.760	10.23	10.98	11.58
15	4.614	5.377	5.762	6.833	7.394	8.035	9.044	9.970	10.60	11.09	11.87	12.49
16	5.150	5.962	6.371	7.502	8.093	8.766	9.822	10.79	11.44	11.96	12.77	13.41
17	5.699	6.560	6.991	8.182	8.801	9.505	10.61	11.61	12.29	12.83	13.66	14.33
18	6.261	7.169	7.622	8.871	9.518	10.25	11.40	12.44	13.15	13.70	14.56	15.25
19	6.835	7.788	8.263	9.568	10.24	11.01	12.20	13.28	14.01	14.58	15.47	16.18
20	7.419	8.417	8.914	10.27	10.97	11.77	13.00	14.12	14.87	15.45	16.37	17.10
21	8.013	9.055	9.572	10.99	11.71	12.53	13.81	14.96	15.73	16.34	17.28	18.03
22	8.616	9.702	10.24	11.70	12.46	13.30	14.62	15.81	16.60	17.22	18.19	18.96
23	9.228	10.36	10.91	12.43	13.21	14.08	15.43	16.65	17.47	18.11	19.10	19.89
24	9.848	11.02	11.59	13.16	13.96	14.86	16.25	17.51	18.35	19.00	20.02	20.82
25	10.48	11.69	12.28	13.90	14.72	15.65	17.08	18.36	19.22	19.89	20.93	21.76
26	11.11	12.36	12.97	14.64	15.49	16.44	17.91	19.22	20.10	20.79	21.85	22.69
27	11.75	13.04	13.67	15.38	16.26	17.23	18.74	20.08	20.98	21.68	22.77	23.63
28	12.40	13.73	14.38	16.14	17.03	18.03	19.57	20.95	21.87	22.58	23.69	24.57
29	13.05	14.42	15.09	16.89	17.81	18.83	20.41	21.82	22.75	23.48	24.61	25.50
30	13.71	15.12	15.80	17.65	18.59	19.64	21.25	22.68	23.64	24.38	25.54	26.44
31	14.38	15.82	16.52	18.42	19.37	20.45	22.09	23.56	24.53	25.29	26.46	27.38
32	15.05	16.53	17.25	19.18	20.16	21.26	22.93	24.43	25.42	26.19	27.39	28.33
33	15.72	17.24	17.97	19.95	20.95	22.07	23.78	25.30	26.32	27.10	28.31	29.27
34	16.40	17.95	18.71	20.73	21.75	22.89	24.63	26.18	27.21	28.01	29.24	30.21
35	17.09	18.67	19.44	21.51	22.55	23.71	25.48	27.06	28.11	28.92	30.17	31.16
36	17.78	19.39	20.18	22.29	23.35	24.53	26.34	27.94	29.00	29.83	31.10	32.10
37	18.47	20.12	20.92	23.07	24.15	25.36	27.19	28.82	29.90	30.74	32.03	33.05
38	19.17	20.85	21.67	23.86	24.96	26.18	28.05	29.71	30.80	31.65	32.97	34.00
39	19.87	21.59	22.42	24.65	25.77	27.01	28.91	30.59	31.71	32.57	33.90	34.94
40	20.58	22.33	23.17	25.44	26.58	27.84	29.77	31.48	32.61	33.48	34.83	35.89
41	21.28	23.07	23.93	26.23	27.39	28.68	30.63	32.37	33.51	34.40	35.77	36.84
42	22.00	23.81	24.69	27.03	28.21	29.51	31.50	33.26	34.42	35.32	36.70	37.79
43	22.71	24.56	25.45	27.83	29.02	30.35	32.36	34.15	35.33	36.23	37.64	38.74

44	23.43	25.31	26.22	28.63	29.84	31.19	33.23	35.04	36.23	37.15	38.58	39.69
45	24.15	26.06	26.98	29.44	30.67	32.03	34.10	35.93	37.14	38.07	39.51	40.64
46	24.88	26.82	27.75	30.24	31.49	32.87	34.97	36.83	38.05	39.00	40.45	41.59
47	25.60	27.57	28.52	31.05	32.32	33.72	35.84	37.72	38.96	39.92	41.39	42.54
48	26.34	28.33	29.30	31.86	33.14	34.56	36.72	38.62	39.87	40.84	42.33	43.50
49	27.07	29.10	30.08	32.68	33.97	35.41	37.59	39.52	40.79	41.76	43.27	44.45
50	27.80	29.86	30.86	33.49	34.80	36.26	38.47	40.42	41.70	42.69	44.21	45.40
51	28.54	30.63	31.64	34.31	35.64	37.11	39.35	41.32	42.61	43.61	45.15	46.36
52	29.28	31.40	32.42	35.12	36.47	37.97	40.23	42.22	43.53	44.54	46.10	47.31
53	30.03	32.17	33.21	35.94	37.31	38.82	41.10	43.12	44.44	45.47	47.04	48.27
54	30.77	32.95	33.99	36.76	38.15	39.67	41.99	44.02	45.36	46.39	47.98	49.22
55	31.52	33.72	34.78	37.59	38.99	40.53	42.87	44.93	46.28	47.32	48.93	50.18
56	32.27	34.50	35.57	38.41	39.83	41.39	43.75	45.83	47.20	48.25	49.87	51.13
57	33.03	35.28	36.37	39.24	40.67	42.25	44.64	46.74	48.12	49.18	50.82	52.09
58	33.78	36.06	37.16	40.07	41.51	43.11	45.52	47.64	49.04	50.11	51.76	53.05
59	34.54	36.85	37.96	40.90	42.36	43.97	46.41	48.55	49.96	51.04	52.71	54.01
60	35.30	37.63	38.76	41.73	43.20	44.83	47.29	49.46	50.88	51.97	53.65	54.96
61	36.06	38.42	39.56	42.56	44.05	45.70	48.18	50.37	51.80	52.90	54.60	55.92
62	36.82	39.21	40.36	43.39	44.90	46.56	49.07	51.27	52.72	53.83	55.55	56.88
63	37.59	40.00	41.16	44.23	45.75	47.43	49.96	52.18	53.64	54.77	56.49	57.84
64	38.35	40.80	41.97	45.06	46.60	48.30	50.85	53.10	54.57	55.70	57.44	58.80
65	39.12	41.59	42.78	45.90	47.45	49.16	51.74	54.01	55.49	56.63	58.39	59.76
66	39.89	42.39	43.58	46.74	48.30	50.03	52.64	54.92	56.42	57.57	59.34	60.72
67	40.66	43.18	44.39	47.58	49.16	50.90	53.53	55.83	57.34	58.50	60.29	61.68
68	41.44	43.98	45.20	48.42	50.01	51.77	54.42	56.75	58.27	59.44	61.24	62.64
69	42.21	44.78	46.02	49.26	50.87	52.65	55.32	57.66	59.20	60.37	62.19	63.60
70	42.99	45.58	46.83	50.10	51.73	53.52	56.21	58.57	60.12	61.31	63.14	64.56
71	43.77	46.39	47.64	50.95	52.59	54.39	57.11	59.49	61.05	62.25	64.09	65.52
72	44.55	47.19	48.46	51.79	53.45	55.27	58.01	60.41	61.98	63.18	65.04	66.48
73	45.33	48.00	49.28	52.64	54.31	56.14	58.90	61.32	62.91	64.12	65.99	67.44
74	46.11	48.81	50.10	53.49	55.17	57.02	59.80	62.24	63.84	65.06	66.94	68.40
75	46.90	49.61	50.92	54.34	56.03	57.90	60.70	63.16	64.76	66.00	67.89	69.37
76	47.68	50.42	51.74	55.19	56.89	58.78	61.60	64.07	65.69	66.94	68.85	70.33
77	48.47	51.23	52.56	56.04	57.76	59.65	62.50	64.99	66.63	67.88	69.80	71.29
78	49.26	52.05	53.38	56.89	58.62	60.53	63.40	65.91	67.56	68.82	70.75	72.25
79	50.05	52.86	54.21	57.74	59.49	61.41	64.30	66.83	68.49	69.76	71.70	73.22
80	50.84	53.68	55.03	58.60	60.36	62.30	65.21	67.75	69.42	70.70	72.66	74.18
81	51.63	54.49	55.86	59.45	61.22	63.18	66.11	68.67	70.35	71.64	73.61	75.14
82	52.43	55.31	56.69	60.30	62.09	64.06	67.01	69.59	71.28	72.58	74.57	76.11
83	53.22	56.13	57.52	61.16	62.96	64.94	67.92	70.52	72.22	73.52	75.52	77.07
84	54.02	56.95	58.35	62.02	63.83	65.83	68.82	71.44	73.15	74.46	76.47	78.04
85	54.81	57.77	59.18	62.88	64.70	66.71	69.73	72.36	74.08	75.40	77.43	79.00
86	55.61	58.59	60.01	63.73	65.57	67.60	70.63	73.28	75.02	76.35	78.38	79.97
87	56.41	59.41	60.84	64.59	66.45	68.48	71.54	74.21	75.95	77.29	79.34	80.93
88	57.21	60.23	61.67	65.45	67.32	69.37	72.45	75.13	76.89	78.23	80.30	81.90
89	58.02	61.06	62.51	66.32	68.19	70.26	73.35	76.06	77.82	79.18	81.25	82.86
90	58.82	61.88	63.34	67.18	69.07	71.15	74.26	76.98	78.76	80.12	82.21	83.83

91	59.62	62.71	64.18	68.04	69.94	72.04	75.17	77.91	79.69	81.06	83.16	84.79
92	60.43	63.54	65.02	68.90	70.82	72.92	76.08	78.83	80.63	82.01	84.12	85.76
93	61.23	64.36	65.86	69.77	71.70	73.81	76.99	79.76	81.57	82.95	85.08	86.73
94	62.04	65.19	66.70	70.63	72.57	74.71	77.90	80.69	82.50	83.90	86.03	87.69
95	62.85	66.02	67.54	71.50	73.45	75.60	78.81	81.61	83.44	84.84	86.99	88.66
96	63.66	66.85	68.38	72.36	74.33	76.49	79.72	82.54	84.38	85.79	87.95	89.62
97	64.47	67.69	69.22	73.23	75.21	77.38	80.63	83.47	85.32	86.74	88.91	90.59
98	65.28	68.52	70.06	74.10	76.09	78.27	81.54	84.39	86.26	87.68	89.87	91.56
99	66.09	69.35	70.90	74.97	76.97	79.17	82.46	85.32	87.20	88.63	90.82	92.53
100	66.91	70.19	71.75	75.84	77.85	80.06	83.37	86.25	88.13	89.58	91.78	93.49

N is the number of servers. The numerical column headings indicate blocking probability B in %. Table generated by Dan Dexter

الملحق رقم 07: توزيع بواسون

Poisson Traffic Table

Maximum Offered Load Versus B and N

B is in %

N/B	0.01	0.05	0.1	0.51.02510					15	20	30	40
1	.0001	.0005	.0010	.0050	.0101	.0202	.0513	.1054	.1625	.2231	.3567	.5108
2	.0142	.0320	.0454	.1035	.1486	.2147	.3554	.5318	.6832	.8244	1.097	1.376
3	.0862	.1497	.1905	.3379	.4360	.5672	.8177	1.102	1.331	1.535	1.914	2.285
4	.2318	.3552	.4286	.6722	.8232	1.016	1.366	1.745	2.039	2.297	2.764	3.211
5	1.078	1.279	1.530	1.970	2.433	2.785	3.090	3.634	4.148			
6	.7137	.9672	1.107	1.537	1.785	2.089	2.613	3.152	3.557	3.904	4.517	5.091
7	1.030	1.348	1.520	2.037	2.330	2.684	3.285	3.895	4.348	4.734	5.411	6.039
8	1.387	1.768	1.971	2.571	2.906	3.307	3.981	4.656	5.155	5.576	6.312	6.991
9	1.778	2.220	2.452	3.132	3.508	3.953	4.695	5.433	5.973	6.429	7.220	7.947
10	2.198	2.699	2.961	3.717	4.130	4.618	5.425	6.221	6.802	7.289	8.133	8.904
11	2.643	3.202	3.492	4.321	4.771	5.300	6.169	7.021	7.639	8.157	9.050	9.864
12	3.112	3.726	4.042	4.943	5.428	5.996	6.924	7.829	8.484	9.031	9.972	10.83
13	3.600	4.269	4.611	5.580	6.099	6.704	7.690	8.646	9.336	9.910	10.90	11.79
14	4.106	4.828	5.195	6.231	6.782	7.424	8.464	9.470	10.19	10.79	11.82	12.76
15	4.629	5.402	5.794	6.893	7.477	8.153	9.246	10.30	11.06	11.68	12.75	13.72
16	5.167	5.990	6.405	7.567	8.181	8.891	10.04	11.14	11.92	12.57	13.69	14.69
17	5.718	6.590	7.028	8.251	8.895	9.638	10.83	11.98	12.79	13.47	14.62	15.66
18	6.281	7.201	7.662	8.943	9.616	10.39	11.63	12.82	13.67	14.37	15.56	16.63
19	6.856	7.822	8.306	9.645	10.35	11.15	12.44	13.67	14.55	15.27	16.50	17.60
20	7.442	8.453	8.958	10.35	11.08	11.92	13.26	14.53	15.43	16.17	17.44	18.57
21	8.037	9.093	9.619	11.07	11.83	12.69	14.07	15.38	16.31	17.08	18.38	19.54
22	8.642	9.741	10.29	11.79	12.57	13.47	14.89	16.24	17.20	17.99	19.32	20.51
23	9.255	10.40	10.96	12.52	13.33	14.25	15.72	17.11	18.09	18.90	20.27	21.48
24	9.876	11.06	11.65	13.26	14.09	15.04	16.55	17.98	18.98	19.81	21.21	22.46
25	10.50	11.73	12.34	14.00	14.85	15.83	17.38	18.84	19.88	20.73	22.16	23.43
26	11.14	12.41	13.03	14.74	15.62	16.63	18.22	19.72	20.77	21.64	23.10	24.41
27	11.78	13.09	13.73	15.49	16.40	17.43	19.06	20.59	21.67	22.56	24.05	25.38
28	12.43	13.78	14.44	16.25	17.18	18.23	19.90	21.47	22.57	23.48	25.00	26.36
29	13.09	14.47	15.15	17.00	17.96	19.04	20.75	22.35	23.48	24.40	25.95	27.33
30	13.75	15.17	15.87	17.77	18.74	19.85	21.59	23.23	24.38	25.32	26.91	28.31
31	14.42	15.87	16.59	18.53	19.53	20.66	22.45	24.11	25.29	26.24	27.86	29.29
32	15.09	16.58	17.32	19.31	20.32	21.48	23.30	25.00	26.19	27.17	28.81	30.26
33	15.76	17.30	18.05	20.08	21.12	22.30	24.15	25.89	27.10	28.09	29.76	31.24
34	16.44	18.01	18.78	20.86	21.92	23.12	25.01	26.77	28.01	29.02	30.72	32.22
35	17.13	18.73	19.52	21.64	22.72	23.95	25.87	27.66	28.92	29.95	31.67	33.20
36	17.82	19.46	20.26	22.42	23.53	24.77	26.73	28.56	29.84	30.88	32.63	34.18
37	18.52	20.19	21.01	23.21	24.33	25.60	27.60	29.45	30.75	31.81	33.59	35.16
38	19.21	20.92	21.75	24.00	25.14	26.44	28.46	30.35	31.66	32.74	34.54	36.14
39	19.92	21.66	22.51	24.79	25.96	27.27	29.33	31.24	32.58	33.67	35.50	37.11
40	20.62	22.40	23.26	25.59	26.77	28.11	30.20	32.14	33.50	34.60	36.46	38.09
41	21.33	23.14	24.02	26.38	27.59	28.95	31.07	33.04	34.42	35.54	37.42	39.07
42	22.05	23.88	24.78	27.18	28.41	29.79	31.94	33.94	35.33	36.47	38.38	40.05
43	22.76	24.63	25.54	27.99	29.23	30.63	32.81	34.84	36.26	37.41	39.34	41.04

44	23.48	25.38	26.31	28.79	30.05	31.47	33.69	35.74	37.18	38.34	40.30	42.02
45	24.20	26.14	27.08	29.60	30.88	32.32	34.56	36.65	38.10	39.28	41.26	43.00
46	24.93	26.90	27.85	30.41	31.71	33.17	35.44	37.55	39.02	40.22	42.22	43.98
47	25.66	27.65	28.62	31.22	32.53	34.01	36.32	38.46	39.94	41.16	43.18	44.96
48	26.39	28.42	29.40	32.03	33.37	34.87	37.20	39.36	40.87	42.09	44.14	45.94
49	27.13	29.18	30.18	32.85	34.20	35.72	38.08	40.27	41.79	43.03	45.10	46.92
50	27.86	29.95	30.96	33.66	35.03	36.57	38.97	41.18	42.72	43.97	46.06	47.90
51	28.60	30.72	31.74	34.48	35.87	37.43	39.85	42.09	43.65	44.91	47.03	48.89
52	29.34	31.49	32.53	35.30	36.71	38.28	40.73	43.00	44.58	45.85	47.99	49.87
53	30.09	32.26	33.31	36.13	37.55	39.14	41.62	43.91	45.50	46.80	48.95	50.85
54	30.84	33.04	34.10	36.95	38.39	40.00	42.51	44.82	46.43	47.74	49.92	51.83
55	31.59	33.82	34.90	37.78	39.23	40.86	43.40	45.74	47.36	48.68	50.88	52.82
56	32.34	34.60	35.69	38.60	40.07	41.72	44.29	46.65	48.29	49.63	51.85	53.80
57	33.09	35.38	36.48	39.43	40.92	42.59	45.18	47.56	49.22	50.57	52.81	54.78
58	33.85	36.16	37.28	40.26	41.77	43.45	46.07	48.48	50.15	51.51	53.78	55.77
59	34.60	36.95	38.08	41.09	42.61	44.32	46.96	49.40	51.09	52.46	54.74	56.75
60	35.36	37.73	38.88	41.93	43.46	45.18	47.85	50.31	52.02	53.40	55.71	57.73
61	36.13	38.52	39.68	42.76	44.31	46.05	48.75	51.23	52.95	54.35	56.68	58.72
62	36.89	39.31	40.48	43.60	45.16	46.92	49.64	52.15	53.89	55.30	57.64	59.70
63	37.66	40.11	41.29	44.43	46.02	47.79	50.54	53.07	54.82	56.24	58.61	60.68
64	38.42	40.90	42.09	45.27	46.87	48.66	51.43	53.99	55.76	57.19	59.58	61.67
65	39.19	41.70	42.90	46.11	47.73	49.53	52.33	54.91	56.69	58.14	60.54	62.65
66	39.96	42.49	43.71	46.95	48.58	50.41	53.23	55.83	57.63	59.08	61.51	63.64
67	40.74	43.29	44.52	47.79	49.44	51.28	54.13	56.75	58.56	60.03	62.48	64.62
68	41.51	44.09	45.33	48.64	50.30	52.16	55.03	57.67	59.50	60.98	63.45	65.61
69	42.29	44.89	46.15	49.48	51.16	53.03	55.93	58.59	60.44	61.93	64.41	66.59
70	43.07	45.70	46.96	50.33	52.02	53.91	56.83	59.52	61.37	62.88	65.38	67.58
71	43.84	46.50	47.78	51.17	52.88	54.79	57.73	60.44	62.31	63.83	66.35	68.56
72	44.63	47.31	48.60	52.02	53.74	55.66	58.63	61.36	63.25	64.78	67.32	69.54
73	45.41	48.11	49.42	52.87	54.60	56.54	59.54	62.29	64.19	65.73	68.29	70.53
74	46.19	48.92	50.24	53.72	55.47	57.42	60.44	63.21	65.13	66.68	69.26	71.52
75	46.98	49.73	51.06	54.57	56.33	58.30	61.35	64.14	66.07	67.63	70.23	72.50
76	47.76	50.54	51.88	55.42	57.20	59.19	62.25	65.06	67.01	68.58	71.20	73.49
77	48.55	51.36	52.70	56.28	58.07	60.07	63.16	65.99	67.95	69.54	72.17	74.47
78	49.34	52.17	53.53	57.13	58.94	60.95	64.06	66.92	68.89	70.49	73.14	75.46
79	50.13	52.98	54.35	57.98	59.80	61.84	64.97	67.85	69.83	71.44	74.11	76.44
80	50.92	53.80	55.18	58.84	60.67	62.72	65.88	68.77	70.77	72.39	75.08	77.43
81	51.72	54.62	56.01	59.70	61.54	63.61	66.79	69.70	71.72	73.35	76.05	78.41
82	52.51	55.43	56.84	60.55	62.41	64.49	67.70	70.63	72.66	74.30	77.02	79.40
83	53.31	56.25	57.67	61.41	63.29	65.38	68.60	71.56	73.60	75.25	77.99	80.39
84	54.10	57.07	58.50	62.27	64.16	66.27	69.51	72.49	74.54	76.21	78.96	81.37
85	54.90	57.89	59.33	63.13	65.03	67.15	70.43	73.42	75.49	77.16	79.93	82.36
86	55.70	58.72	60.16	63.99	65.91	68.04	71.34	74.35	76.43	78.11	80.91	83.34
87	56.50	59.54	61.00	64.85	66.78	68.93	72.25	75.28	77.38	79.07	81.88	84.33
88	57.31	60.37	61.83	65.72	67.66	69.82	73.16	76.21	78.32	80.02	82.85	85.32
89	58.11	61.19	62.67	66.58	68.53	70.71	74.07	77.14	79.27	80.98	83.82	86.30
90	58.91	62.02	63.51	67.44	69.41	71.61	74.98	78.08	80.21	81.93	84.79	87.29

91	59.72	62.84	64.34	68.31	70.29	72.50	75.90	79.01	81.16	82.89	85.77	88.28
92	60.52	63.67	65.18	69.17	71.17	73.39	76.81	79.94	82.10	83.85	86.74	89.26
93	61.33	64.50	66.02	70.04	72.05	74.28	77.73	80.88	83.05	84.80	87.71	90.25
94	62.14	65.33	66.86	70.91	72.93	75.18	78.64	81.81	83.99	85.76	88.68	91.24
95	62.95	66.16	67.70	71.77	73.81	76.07	79.56	82.74	84.94	86.72	89.66	92.22
96	63.76	66.99	68.55	72.64	74.69	76.97	80.47	83.68	85.89	87.67	90.63	93.21
97	64.57	67.83	69.39	73.51	75.57	77.86	81.39	84.61	86.83	88.63	91.60	94.20
98	65.38	68.66	70.23	74.38	76.45	78.76	82.31	85.55	87.78	89.59	92.58	95.19
99	66.19	69.50	71.08	75.25	77.33	79.65	83.22	86.48	88.73	90.54	93.55	96.17
100	67.01	70.33	71.92	76.12	78.22	80.55	84.14	87.42	89.68	91.50	94.52	97.16

N is the number of servers. The numerical column headings indicate blocking probability B in %. Table generated by Dan Dexter