Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et d'Informatique

Memoire Master

Thème

Inégalité d'Hermite-Hadamard pour Différents Types de Convexité

.....

Soutenu le /05/2017

Année Universitaire 2016 -2017

Table des matières

Remerciements **i**

Résumé **ii**

Introduction **1**

1 Notations et Préliminaire **1**

1.1 Fonction Convexe 1

1.2 Fonction s-Convexe 4

1.3 Fonction m-Convexe 6

1.4 Fonction (s,m)-Convexe 8

1.5 Fonction h-Convexe 10

1.6 Fonction log-Convexe 11

1.7 Fonction r-Convexe 12

2 Les Inégalités d'Hermite-Hadamard **14**

3 Les Inégalités d'Hermite-Hadamard-Fejér **30**

Conclusion **34**

Bibliographie **34**

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir donné la volonté et le courage afin d'arriver à ce modeste travail.

Je tiens à exprimer vivement ma profonde gratitude à ma professeur TAF Sabrina pour sa confiance, ses encouragements, son suivi et pour les conseils qu'elle a apporté pour l'achévement de ce mémoire.

Je remercie mes amis pour l'apport de leurs idées et les efforts fournis avec moi durant ma période de travail.

Je remercie aussi mes parents pour les sacrifices et les encouragements qu'ils n'ont cessé de me conférer. Que Dieu les garde éternellement heureux.

Je tiens également à remercie l'ensemble des membres du jury qui m'au fait l'honneur de juger ce mémoire.

Merci

Résumé

Dans ce mémoire, on va définir plusieurs types de fonctions convexes. Ainsi, on va donner des résultats liés aux inégalités de type Hermite-Hadamard suivis par des preuves. Puis on présentera également des inégalités de type Hermité-Hadamard-Fejèr pour certains cas de convexité.

INTRODUCTION

Les inégalités jouent un rôle important dans le développement de toutes les branches de la mathématique. L'un des résultats les plus influents de la théorie des fonctions convexes est l'inégalité d'Hermite-Hadamard ou ses versions pondérées. Cette inégalité à été découverte par Charles Hermite en 1883, et à été prouvée par Jaques Hadamard en 1893. Une richesse de littérature des inégalités mathématiques est due à des fonctions convexes également déterminées par l'inégalité d'Hadamard.

Le concept des fonctions convexes à effectivement trouvé une place importante dans les mathématiques modernes, comme on peut le voir dans un grand nombre d'articles de recherche et des livres consacrés au domaine de nos jours. Dans ce contexte, l'inégalité d'Hermite-Hadamard qui on peut dire est le premier résultat fondamental pour les fonctions convexes définies sur un intervalle de nombres réels avec une interprétation géométrique naturelle et de nombreuses applications, à attiré et continue d'attirer beaucoup d'intérêt pour les mathématiques élémentaires. De nombreux mathématiciens ont consacré leurs efforts à généraliser, affiner et l'étendre pour différentes classes de fonctions telles que fonctions s-convexes, m-convexes, log-convexes,... etc ($Voir$ $[7, 8, 9]$). Au cours des dernières années, plusieurs généralisations et extensions de la notion classique de fonction convexe ont été introduites, Cette recherche traite de certaines inégalités liées aux convexités classiques de Ch.Hermite, J.Hadamard et Lipoèt Fejèr. Ce dernier a établi l'inégalité de Hermite-Hadamard-Fejèr qui est la généralisation pondérée de l'inégalité Hermite-Hadamard.

L'objectif de ce mémoire est de traiter les inégalités d'Hermite-Hadamard pour différents types de convexité, passant par trois chapitres dont le premier est consacré à quelques définitions et propriétés sur les types de convexités. Dans le deuxième chapitre, nous présentons un certain nombre d'inégalités de type Hermite-Hadamard qui peuvent être obtenues pour d'autres concepts de convexités en plus, nous établissons ces inégalités pour le produit de deux fonctions. Le dernier chapitre consiste à définir quelques inégalités d'Hermite-Hadamard-Fejèr.

Chapitre 1

Notations et Préliminaire

Dans ce chapitre, on va donner des définitions et leurs propriétés avec des exemples pour chaque type de convexité.

1.1 Fonction Convexe

Définition 1.1.1 *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite convexe si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \tag{1.1.1}$$

pour tous $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$.

Exemple

- $f(x) = x^2$ est une fonction convexe dans $\mathbb{R}$.
- $f(x) = e^x$ est convexe dans $\mathbb{R}$.
- $f(x) = |x|$ est convexe dans $\mathbb{R}$.

Interprétation Géométrique

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur $[a, b]$, si la corde prise entre a et b est au-dessus du graphe de f sur tout l'intervalle $[a, b]$ alors on a

$$f(x) \leq f(a) + \frac{x-a}{b-a}\left(f(b) - f(a)\right) \ , \ \forall x \in [a, b]\,. \tag{1.1.2}$$

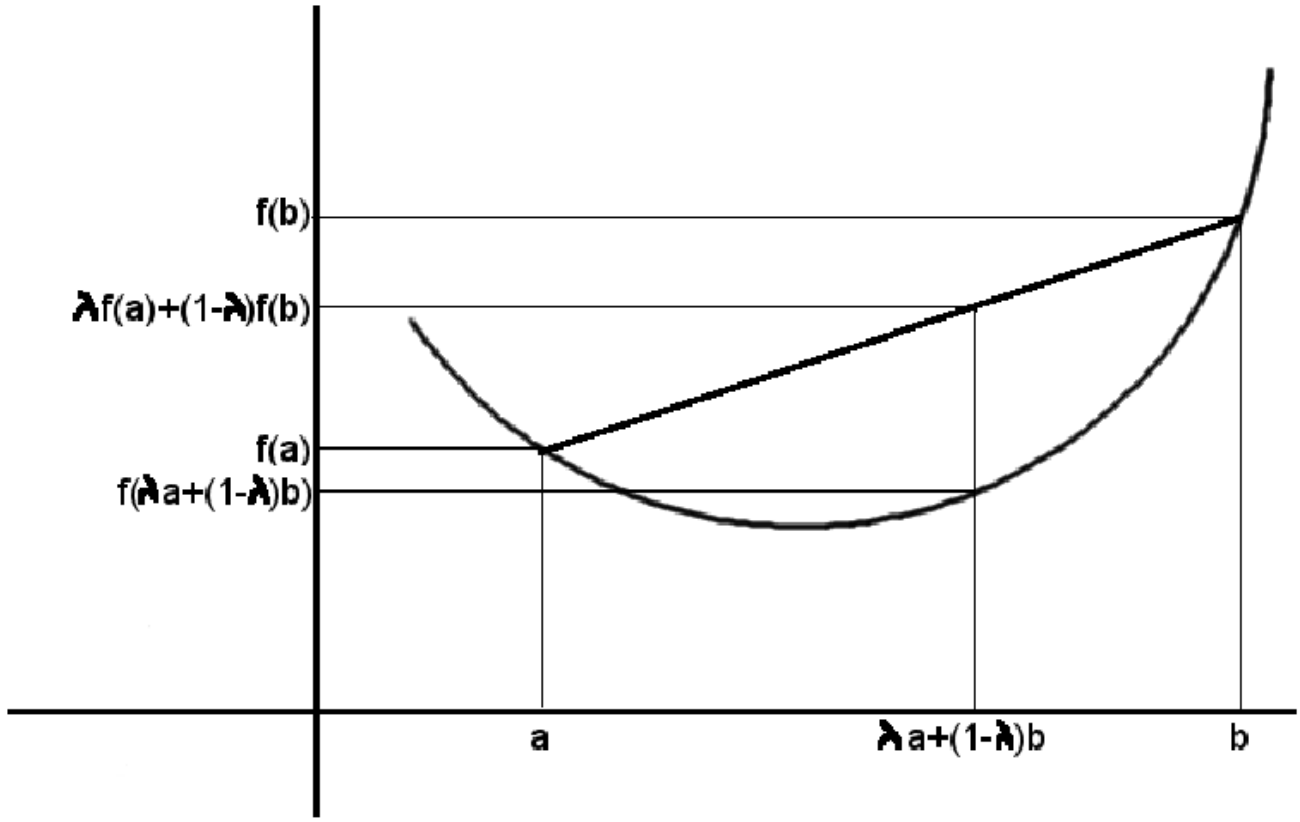

Figure : **Fonction Convexe**.

Définition 1.1.2 (*inégalité de pente*)*On suppose que f est une fonction convexe définie sur $I \subset \mathbb{R}$. Si a, b, c sont trois points de I telle que $a < b < c$, on a*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Propriétés

1. Une fonction f est convexe sur $I \subset \mathbb{R}$ si et seulement si $df\ (t)$ est croissante.
2. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions convexes, alors $f + g$ convexes aussi.
3. Si f et g sont deux fonctions convexes sur $[a, b]$, alors $(f \circ g)(x)$ n'est pas nécessairement convexe. Une condition nécessaire est que f soit croissante.

Preuve.

1. On suppose que f est convexe sur $[a, b]$, $a < b$. D'après l'inégalité de pente on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x},\ \forall x \in \left]a, b\right[.$$

En faisant tendre x vers a, on obtient

$$\frac{df}{dt}(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

et en faisant tendre x vers b on en déduit que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{df}{dt}(b),$$

donc

$$\frac{df}{dt}(a) \leq \frac{df}{dt}(b).$$

D'où $\frac{df}{dt}(t)$ est croissante.

Réciproquement, si $\frac{df}{dt}(t)$ est croissante, pour tous $a < b \in I$ et tout $x \in]a, b[$.

D'aprés le T.A.F, il existe $\alpha \in]a, x[$, $\beta \in]x, b[$ tels que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{df}{dt}(\alpha) \text{ et } \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \leq \frac{df}{dt}(\beta),$$

puisque $\alpha < \beta$ donc

$$\frac{df}{dt}(\alpha) \leq \frac{df}{dt}(\beta),$$

d'où

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

Alors

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}\left(f(b)-f(a)\right).$$

D'aprés (1.1.2) , on conclut que f est convexe.

2. Supposons que f et g sont convexes sur I, alors on a

$$f\left(tx+(1-t)y\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

$$g\left(tx+(1-t)y\right) \leq tg(x) + (1-t)g(y),$$

pour tous $x, y \in I$, $t \in [0,1]$.

Ce qui implique

$$\begin{aligned} f\left(tx+(1-t)y\right) + g\left(tx+(1-t)y\right) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) + tg(x) + (1-t)g(y) \\ &\leq t\left(f(x)+g(x)\right) + (1-t)\left(f(y)+g(y)\right). \end{aligned}$$

D'où

$$(f+g)(tx+(1-t)y) \leq t(f+g)(x)+(1-t)(f+g)(y).$$

3. Soit g une fonction convexe sur $[a,b]$, et $t \in [0,1]$ alors on a :

$$g(tx+(1-t)y) \leq tg(x)+(1-t)g(y), \quad \forall x,y \in [a,b],$$

par application de la fonction f et puisque f est croissante. Alors

$$f(g(tx+(1-t)y)) \leq f(tg(x)+(1-t)g(y)).$$

D'où

$$f(g(tx+(1-t)y)) \leq tf(g(x))+(1-t)f(g(y)).$$

□

1.2 Fonction s-Convexe

Dans [7] , Hudzik et Maligranda ont considéré entre autre la classe de fonctions qui sont s-convexes dans le premier et le deuxième sens. Cette classe est définie de la manière suivante :

Définition 1.2.1 *Une fonction $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ est dite s-convexe dans le premier sens si*

$$f(\alpha x+\beta y) \leq \alpha^s f(x)+\beta^s f(y) \ ; \ \forall s \in]0,1], \forall \alpha,\beta \geq 0. \tag{1.2.1}$$

Pour tous $x,y \in [0,+\infty[$ avec $\alpha^s+\beta^s=1$.
Nous désignons cette classe des fonctions par K_s^1.

Définition 1.2.2 *Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dite s-convexe dans le second sens si pour tous $x,y \in [0,+\infty[$ on a*

$$f(tx+(1-t)y) \leq t^s f(x)+(1-t)^s f(y), \ \forall t \in [0,1] \tag{1.2.2}$$

pour tout $s \in]0,1]$ avec $t+(1-t)=1$.
Nous désignons cette classe des fonctions par K_s^2.

Remarque 1.2.1 *Pour $s=1$, la s-convexité se réduit à la convexité ordinaire sur $[0,+\infty[$.*

Exemple

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} a & , \quad \text{si} : x = 0 \\ bx^s + c & , \quad \text{si} : x > 0 \end{cases} \; ; \; s \in]0, 1] \, ,$$

est une fonction s-convexe dans $[0, +\infty[$.

Propriétés

1. Si $f \in K_s^2$ alors f est positive sur $[0, +\infty[$.
2. Soit $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$, si $f \in K_{s_2}^2$ et $f(0) = 0$ alors $f \in K_{s_1}^2$.
3. Soit $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$, si $f \in K_{s_2}^1$ et $f(0) \leq 0$ alors $f \in K_{s_1}^1$.
4. Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, si $f, g \in K_s^1$ alors $f + g \in K_s^1$.

Remarque 1.2.2 *Pour démontrer ces propriétés, W. Orlicz.* [19] *a redéfinie la fonction s-convexe dans le second sens comme suit :*

Une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dite s-convexe dans le second sens si

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y), \; \forall s \in]0, 1], \forall \alpha, \beta \geq 0. \tag{1.2.3}$$

Pour tous $x, y \in [0, +\infty[$ avec $\alpha + \beta = 1$.

Preuve.

1. Soit $f \in K_s^2$. Alors on a

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \leq \frac{f(x)}{2^s} + \frac{f(x)}{2^s} = 2^{1-s} f(x),$$

donc

$$2^{1-s} f(x) - f(x) \geq 0.$$

Ce qui implique que

$$f(x)\left(2^{1-s} - 1\right) \geq 0,$$

et comme $2^{1-s} - 1 \geq 0$. Alors $f(x) \geq 0$.

2. On suppose que $f \in K_{s_2}^2$, pour tous $x, y \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, 1]$ on a

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &\leq \alpha^{s_2} f(x) + \beta^{s_2} f(y) \\ &\leq \alpha^{s_1} f(x) + \beta^{s_1} f(y). \end{aligned}$$

Ce qui signifie que $f \in K^2_{s_1}$.

3. On suppose que $f \in K^1_{s_2}$, pour tous $x, y \in [0, +\infty[$ et $\alpha, \beta \geq 0$ on a

$$\alpha^{s_2} + \beta^{s_2} \leq \alpha^{s_1} + \beta^{s_1} = 1.$$

Alors on a

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^{s_2} f(x) + \beta^{s_2} f(y) \leq \alpha^{s_1} f(x) + \beta^{s_1} f(y).$$

4. Supposons que $f, g \in K^1_s$ alors pour tous $x, y \in [0, +\infty[$, $\alpha, \beta \geq 0$ on a

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y).$$

$$g(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s g(x) + \beta^s g(y).$$

Ce qui implique que

$$f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s (f(x) + g(x)) + \beta^s (f(y) + g(y)).$$

Donc

$$(f + g)(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s (f + g)(x) + \beta^s (f + g)(y).$$

□

1.3 Fonction m-Convexe

Dans [15] , G. H. Toader a définit le concept de m-convexité comme suit :

Définition 1.3.1 *La fonction $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ est dite m-convexe, $m \in [0, 1]$ on a*

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq tf(x) + m(1 - t)f(y). \tag{1.3.1}$$

Pour tous $x, y \in [0, b]$ et $t \in [0, 1]$.

On note par $K_m(b)$ l'ensemble des fonctions m-convexe sur $[0, b]$.

Remarque 1.3.1 *Pour $m = 1$, m-convexité se ramène au concepte de convexité habituelle sur $[0, b]$.*

Exemple

Soit $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases} , m \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

est m-convexe sur $[0, 2]$.

Interprétation Géométrique

Une fonction $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ est dite m-convexe, $m \in [0, 1]$ si pour tous $x, y \in [0, b]$ avec $x \leq y$, le segment entre les points $(x, f(x))$ et $(my, mf(y))$ est au-dessus du graphe de f dans (x, my).

Propriétés1.3.1

1. Si f est m-convexe et $0 \leq n < m \leq 1$ alors f est n-convexe.
2. Soient $f, g : [0, b] \to \mathbb{R}$, si f est m_1-*convexe* et g est m_2-*convexe* avec $m_1 \leq m_2$ alors $f + g$ et αf $(\alpha \geq 0)$ sont m_1-*convexe*.
3. Si $f, g : [0, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions positives, croissantes et m-convexe alors fg est m-convexe.

Preuve.

1. Soient $x, y \in [0, b]$ et $t \in [0, 1]$ alors

$$\begin{aligned} f\left(tx + n(1-t)y\right) &= f\left(tx + m(1-t)\left(\frac{n}{m}\right)y\right) \\ &\leq tf(x) + m(1-t)f\left(\left(\frac{n}{m}\right)y\right) \\ &\leq tf(x) + n(1-t)f(y). \end{aligned}$$

2. Puisque g est m_2-convexe et $m_1 \leq m_2$ alors g est m_1-convexe(*propriété* 1.3.1.1). Ainsi pour tous $x, y \in [0, b]$ et $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} (f+g)(tx + m_1(1-t)y) &= f(tx + m_1(1-t)y) + g(tx + m_1(1-t)y) \\ &\leq t(f+g)(x) + m_1(1-t)(f+g)(y). \end{aligned}$$

D'autre part, on a pour $\alpha \geq 0$

$$\begin{aligned}(\alpha f)(tx + m_1(1-t)y) &\leq \alpha[tf(x) + m_1(1-t)f(y)] \\ &= t(\alpha f)(x) + m_1(1-t)(\alpha f)(y).\end{aligned}$$

3. Si $x \leq y$ alors $f(x) - f(y) \leq 0$ et $g(y) - g(x) \geq 0$ ce qui implique que

$$f(x)g(y) + f(y)g(x) \leq f(x)g(x) + f(y)g(y). \tag{1.3.2}$$

Pour tous $x, y \in [0, b]$ et $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}(fg)(tx + m(1-t)y) &= f(tx + m(1-t)y)g(tx + m(1-t)y) \\ &\leq [tf(x) + m(1-t)f(y)][tg(x) + m(1-t)g(y)] \\ &= t^2(fg)(x) + m^2(1-t)^2(fg)(y) + mt(1-t)[f(x)g(y) + f(y)g(x)].\end{aligned}$$

D'aprés (1.3.2) on a

$$\begin{aligned}(fg)(tx + m(1-t)y) &\leq t^2(fg)(x) + m^2(1-t)^2(fg)(y) + mt(1-t)[(fg)(x) + (fg)(y)] \\ &= t[t + m(1-t)]f(x)g(x) + m(1-t)[t + m(1-t)]f(y)g(y).\end{aligned}$$

Mais $t + m(1-t) \leq 1$, alors

$$\begin{aligned}(fg)(tx + m(1-t)y) &\leq tf(x)g(x) + (1-t)f(y)g(y) \\ &\leq t(fg)(x) + (1-t)(fg)(y).\end{aligned}$$

(le même cas pour $y \leq x$). □

1.4 Fonction (s,m)-Convexe

Dans [11], V.G. Mihşen a introduit la definition d'une fonction (s, m)-convexe suivante :

Définition 1.4.1 *Une fonction $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ est dite (s, m)-convexe où $(s, m) \in (]0, 1])^2$, si pour tous $x, y \in [0, b]$, nous avons*

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^s f(x) + m(1-t)^s f(y). \tag{1.4.1}$$

On note par $K_m^s(b)$ l'ensemble de toutes les fonctions (s, m)-convexe sur $[0, b]$.

Remarque 1.4.1 *Pour $(s,m) = (1,m)$, la (s,m)-convexité se réduit à m-convexité, pour $(s,m) = (s,1)$, (s,m)-convexité se ramène à s-convexité et pour $(s,m) = (1,1)$, la (s,m)-convexité devient convexité .*

Exemple

La fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{12}\left(x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x\right),$$

est $\left(1, \frac{16}{17}\right)$-*convexe*.

Propriétés

· Soient $f, g : [0,b] \to \mathbb{R}$, si $f, g \in K_m^s(b)$ alors : $f+g$ et αf $(\alpha \geq 0)$ sont $(s,m) - convexe$.

Preuve.

Supposons que $f, g \in K_m^s(b)$ alors pour tous $x, y \in [0,b]$ et $t \in [0,1]$ on a

$$f\left(tx + m(1-t)y\right) \leq t^s f(x) + m(1-t)^s f(y),$$

$$g\left(tx + m(1-t)y\right) \leq t^s g(x) + m(1-t)^s g(y).$$

Ce qui implique que

$$f\left(tx + m(1-t)y\right) + g\left(tx + m(1-t)y\right) \leq t^s\left(f(x) + g(x)\right) + m(1-t)^s\left(f(y) + g(y)\right).$$

Donc

$$\left(f+g\right)\left(tx + m(1-t)y\right) \leq t^s\left(f+g\right)(x) + m(1-t)^s\left(f+g\right)(y).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(\alpha f)(tx + m(1-t)y) &\leq \alpha[t^s f(x) + m(1-t)^s f(y)] \\ &\leq t^s(\alpha f)(x) + m(1-t)^s(\alpha f)(y).\end{aligned}$$

□

1.5 Fonction h-Convexe

Dans [17] , S.Varosanec ont introduit la fonction h-convexe comme suit :

Définition 1.5.1 *Soit $h : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction positive, disons que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction h-convexe si f est positive et pour tous $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ on a*

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y). \tag{1.5.1}$$

On désigne cette classe de fonction par $SX(h, I)$.

Remarque 1.5.1 *Pour $h(t) = t$, toutes les fonctions convexes non négatives appartiennent à $SX(h, I)$, si $h(t) = t^s$ alors $K_s^2 \subset SX(h, I)$.*

Propriétés

1. Soient h_1, h_2 deux fonction positives définies sur J, avec $h_2(t) \leq h_1(t)$, $t \in [0,1]$. Si f est $SX(h_2, I)$, *alors* f est $SX(h_1, I)$.
2. Si $f, g \in SX(h, I)$ et $\lambda > 0$, alors $f + g$, $\lambda f \in SX(h, I)$.

Preuve.

1. Supposons que $f \in SX(h_2, I)$, alors pour tous $x, y \in I$, $t \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq h_2(t)f(x) + h_2(1-t)f(y) \\ &\leq h_1(t)f(x) + h_1(1-t)f(y). \end{aligned}$$

Donc $f \in SX(h_1, I)$.

2. Supposons que $f, g \in SX(h, I)$, alors on a

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y),$$

$$g(tx + (1-t)y) \leq h(t)g(x) + h(1-t)g(y),$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} (f+g)(tx + (1-t)y) &\leq h(t)(f(x) + g(x)) + h(1-t)(f(y) + g(y)) \\ &\leq h(t)(f+g)(x) + h(1-t)(f+g)(y) \end{aligned}$$

D'où $(f+g) \in SX(h,I)$.

Soit $f \in SX(h,I)$, alors Pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\begin{aligned} \lambda f(tx+(1-t)y) &\leq h(t)\lambda f(x) + h(1-t)\lambda f(y) \\ &\leq h(t)\left(\lambda f\right)(x) + h(1-t)\left(\lambda f\right)(y). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

1.6 Fonction log-Convexe

Dans [6] , Gill et al. ont introduit la fonction log-convexe comme suit :

Définition 1.6.1 *On dit que* $f : I \to]0,+\infty[$ *est une fonction* log-*convexe si* $\log f$ *est convexe autrement dit si pour tout* $t \in [0,1]$ *et* $(x,y) \in I^2$ *on a l'inégalité suivante*

$$f(tx+(1-t)y) \leq f(x)^t f(y)^{1-t}. \tag{1.6.1}$$

Exemple

- $f(x) = \frac{1}{x}$ est une fonction log-*convexe* sur $]0,+\infty[$.
- $f(x) = \Gamma(x)$ est une fonction log-*convexe* sur $]0,+\infty[$.

Propriétés 1.6.1

1. Soient $f : I \subset \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, si f est log-convexe alors f est convexe.
2. f est log-convexe si et seulement si pour tout $c > 0$, $c^x f(x)$ est convexe.

Preuve.

1. Soient $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$. Supposons que $\log f(x)$ est convexe, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} \log(f(tx+(1-t)y)) &\leq t\log(f(x)) + (1-t)\log(f(y)) \\ &\leq \log(tf(x)+(1-t)f(y)) \quad \text{(car la fonction log est concave)}. \end{aligned}$$

Puis en prenant l'exponentielle on obtient

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

2. Supposons que $\log f(x)$ convexe et soit $c > 0$. La fonction

$$\log f(x) + x \log(c),$$

est convexe comme somme de deux fonctions convexes, autrement dit $\log(c^x f(x))$ est convexe et donc d'aprés (*propriété* 1.6.1.1) $c^x f(x)$ est convexe.
Réciproquement, supposons que pour tout $c > 0$, $c^x f(x)$ est convexe on a donc, pour tous $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$,

$$c^{tx+(1-t)y} f(tx + (1-t)y) \leq tc^x f(x) + (1-t)c^y f(y).$$

Soit en divisant par $c^{tx+(1-t)y}$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tc^{(1-t)(x-y)} f(x) + (1-t)c^{t(y-x)} f(y),$$

L'inégalité étant vraie pour tout $c > 0$, on va choisir de minimiser celle-ci avec $c = \left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{x-y}}$, on obtient

$$f(tx + (1-t)y) \leq t\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{1-t} f(x) + (1-t)\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^{t} f(y).$$

Ce qui implique

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x)^t f(y)^{1-t}.$$

□

1.7 Fonction r-Convexe

Dans [6], Gill et al. ont définit la fonction r-convexe suivante :

Définition 1.7.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction positive. On dit que f est une fonction r-convexe si pour tous $x, y \in [a,b]$, $t \in [0,1]$ et $r \in \mathbb{R}$*

$$f(tx + (1-t)y) \leq \begin{cases} (tf(x)^r + (1-t)f(y)^r)^{\frac{1}{r}} & si : r \neq 0 \\ f(x)^t f(y)^{1-t} & si : \ r = 0 \end{cases} \tag{1.7.1}$$

Remarque 1.7.1 *Nous avons les fonctions 0-convexe sont simplement des fonctions* log-*convexe.*

Propriétés

1. Si $0 \leq \alpha \leq 1$ et $0 < r \leq s$, alors l'inégalité suivante est vérifiee pour chaque paire de nombres réels non négatifs x et y
$$x^{\alpha} y^{1-\alpha} \leq (\alpha x^r + (1-\alpha) y^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\alpha x^s + (1-\alpha) y^s)^{\frac{1}{s}} .$$
2. Soit $f : [a,b] \to [0,+\infty[$ une fonction r-convexe sur $[a,b]$ et $0 \leq r \leq s$, alors f est s-convexe. En particulier si f est r-convexe et $0 \leq r \leq 1$ alors f est convexe.

Preuve.

1. Le côté gauche de l'inégalité est clair par l'inégalité de Young. Le côté droit est évident si $x = 0$ ou $y = 0$.

Soit $x > 0$ et $y > 0$, on considère $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$f(t) = (\alpha t^r + 1 - \alpha)^s - (\alpha t^s + 1 - \alpha)^r , \quad (r, s > 0) .$$
Donc
$$\frac{df}{dt}(t) = rs\alpha[t^{r-1}(\alpha t^r + 1 - \alpha)^{s-1} - t^{s-1}(\alpha t^s + 1 - \alpha)^{r-1}].$$
Alors $t = 1$ est un point critique de f. On voit que
$$\frac{d^2 f}{dt^2}(1) = rs\alpha(1-\alpha)(r-s) \leq 0,$$
Il s'ensuit que f atteint son maximum lorsque $t = 1$, ainsi $f(t) \leq f(1) = 0$ alors
$$(\alpha t^r + 1 - \alpha)^s \leq (\alpha t^s + 1 - \alpha)^r. \tag{1.7.2}$$
Maintenent si on prend $t = \frac{x}{y}$ dans l'inégalité (1.7.2) on obtient
$$(\alpha x^r + (1-\alpha) y^r)^s \leq (\alpha x^s + (1-\alpha) y^s)^r ,$$
ce qui implique que
$$((\alpha x^r + (1-\alpha) y^r)^s)^{\frac{1}{rs}} \leq ((\alpha x^s + (1-\alpha) y^s)^r)^{\frac{1}{rs}} ,$$
Donc
$$(\alpha x^r + (1-\alpha) y^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\alpha x^s + (1-\alpha) y^s)^{\frac{1}{s}} .$$
2. Puisque f est r-convexe alors par (*propriété* 1.7.1.1), on a pour tous $x, y \in [a,b]$ et $t \in [0,1]$
$$f(tx + (1-t)y) \leq \begin{cases} (tf(x)^r + (1-t) f(y)^r)^{\frac{1}{r}} \leq (tf(x)^s + (1-t) f(y)^s)^{\frac{1}{s}} & , \quad 0 < r \leq s, \\ f(x)^t f(y)^{1-t} \leq (tf(x)^s + (1-t) f(y)^s)^{\frac{1}{s}} & , \quad 0 = r \leq s. \end{cases}$$
Alors f est s-convexe. □

Chapitre 2

Les Inégalités d'Hermite-Hadamard

Dans ce chapitre, on va traiter des résultats liées au chapitre précédent. On commence par le premier cas :

Cas Convexe

Théorème 2.0.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors l'inégalité d'Hermite-Hadamard définit comme suit*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.0.1}$$

Preuve.

On suppose que f est convexe sur $[a, b]$, alors on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}(a+b-x)+\frac{1}{2}f(x)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f(a+b-x)+\frac{1}{2}f(x). \end{aligned} \tag{2.0.2}$$

On pose $x = ta + (1-t)b$, avec $t \in [0, 1]$ on obtient

$$\begin{aligned} f(a+b-x)+f(x) &= f\left(a+b-ta-(1-t)\,b\right)+f\left(ta+(1-t)b\right) \\ &= f\left((1-t)\,a+tb\right)+f\left(ta+(1-t)\,b\right) \\ &\leq f(a)+f(b). \end{aligned} \tag{2.0.3}$$

D'aprés (2.0.2) et (2.0.3) on a

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a+b-x)+f(x) \leq f(a)+f(b),$$

on intègre les deux cotés de l'inégalité sur $[a,b]$ on trouve

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

□

Dans [12] , B. G. Pachpatte a établi deux inégalités de type Hermite-Hadamard pour les produits de fonctions convexes comme suit

Théorème 2.0.2 *Soient $f,g:[a,b]\subset\mathbb{R}\to[0,+\infty[$ deux fonctions convexes sur $[a,b]$, $a<b$ on a*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b), \tag{2.0.4}$$

et

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx+\frac{1}{6}M(a,b)+\frac{1}{3}N(a,b) \tag{2.0.5}$$

où : $M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b)$ et $N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$.

Preuve.

D'une part, supposons que f,g sont convexes sur $[a,b]$, alors pour tout $t\in[0,1]$ on a

$$f(ta+(1-t)\,b) \leq tf(a)+(1-t)f(b),$$

$$g(ta+(1-t)b) \leq tg(a)+(1-t)g(b).$$

Alors

$$(fg)\,(ta+(1-t)b) \leq t^2\,(fg)\,(a)+(1-t)^2\,(fg)\,(b)+t\,(1-t)\,[f(a)g(b)+f(b)g(a)]\,.$$

De même on a

$$(fg)\,((1-t)a+tb) \leq (1-t)^2\,(fg)\,(a)+t^2\,(fg)\,(b)+t\,(1-t)\,[f(a)g(b)+f(b)g(a)]\,,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} & (fg)\,(ta+(1-t)b)+(fg)\,((1-t)a+tb) \\ \leq\ & (2t^2-2t+1)[(fg)\,(a)+(fg)\,(b)]+2t(1-t)[f(a)g(b)+f(b)g(a)]. \end{aligned} \tag{2.0.6}$$

On intègre l'inégalité (2.0.6) sur $[0,1]$, on aura

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[(fg)\left(ta+(1-t)b\right)+(fg)\left((1-t)a+tb\right)\right]dt \\
\leq\ & \left[(fg)(a)+(fg)(b)\right]\int_0^1 (2t^2-2t+1)dt+2\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\int_0^1 t(1-t)dt \\
=\ & \frac{2}{3}\left[(fg)(a)+(fg)(b)\right]+\frac{1}{3}\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right].
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{3}\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]+\frac{1}{6}\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right].$$

D'autre part, on a

$$\frac{a+b}{2}=\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right]\left[g\left(ta+(1-t)b\right)+g\left((1-t)a+tb\right)\right] \\
&\leq \frac{1}{4}\left[(fg)\left(ta+(1-t)b\right)+(fg)\left((1-t)a+tb\right)\right] \\
&\quad +\frac{1}{4}\left[tf(a)+(1-t)f(b)\right]\left[(1-t)g(a)+tg(b)\right] \\
&\quad +\frac{1}{4}\left[(1-t)f(a)+tf(b)\right]\left[tg(a)+(1-t)g(b)\right] \\
&\leq \frac{1}{4}\left[(fg)\left(ta+(1-t)b\right)+(fg)\left((1-t)a+tb\right)\right]+ \\
&\quad +\frac{1}{4}\left\{2t(1-t)\left[(fg)(a)+(fg)(b)\right]+\left[t^2+(1-t)^2\right]\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

On intègre les deux cotés de l'inégalité sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{4}\int_0^1 \left\{(fg)\left(ta+(1-t)b\right)+(fg)\left((1-t)a+tb\right)\right\}dt \\
&\quad +\frac{1}{12}\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]+\frac{1}{6}\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right].
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (fg)(x)dx+\frac{1}{6}\left[(fg)(a)+(fg)(b)\right]+\frac{1}{3}\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right].$$

□

Cas s-Convexe

Dans [4] , Dragomir et Fitzpatrick ont prouvé l'inégalité de type Hadamard pour les fonctions s-convexes au premier sens :

Théorème 2.0.3 *Soit* $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *est une fonction* s*-convexe dans le premier sens où* $s \in]0, 1]$ *et* $a, b \in [0, +\infty[$ *, avec* $a < b$*, si* $f \in L^1([a, b])$ *on a*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+sf(b)}{s+1}. \tag{2.0.7}$$

Preuve.

Supposons que f est s-convexe dans le premier sens, alors on a

$$f(ta+(1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b),\ t^s + (1-t)^s = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(ta+(1-t)b) &\leq t^s f(a) + (1-t^s) f(b) \\ &\leq t^s (f(a) - f(b)) + f(b). \end{aligned}$$

On fait une intégration sur $[0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt &\leq (f(a)-f(b))\int_0^1 t^s dt + f(b)\int_0^1 dt \\ &\leq \frac{f(a)+sf(b)}{s+1}. \end{aligned}$$

On sait que

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

D'où

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+sf(b)}{s+1}.$$

□

Dans [4] , Dragomir et Fitzpatrick ont prouvé l'inégalité de type Hadamard pour les fonctions s-convexes au deuxième sens :

Théorème 2.0.4 *Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est une fonction s-convexe dans le second sens où $s \in]0, 1]$ et $a, b \in [0, +\infty[$ avec $a < b$, si $f \in L^1([a, b])$ on a*

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{2.0.8}$$

Preuve.

On suppose que f est s-convexe dans le second sens, alors on a

$$f(ta + (1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b),$$

On intègre cette inégalité sur $[0, 1]$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &\leq f(a)\int_0^1 t^s dt + f(b)\int_0^1 (1-t)^s\, dt \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}. \end{aligned}$$

Pour la second inégalité de (2.0.8), on remarque que pour tous $x, y \in [0, +\infty[$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2^s}.$$

Posons $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$, avec $t \in [0, 1]$, on aura

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)}{2^s}.$$

Ce qui implique

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

□

Kirmaci et al. [10] ont établi certaines inégalités pour le produit des fonctions s-convexes comme suit :

Théorème 2.0.5 *Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in [0, +\infty[$, $a < b$ deux fonctions telle que g et $fg \in L^1([a, b])$. Si f est convexe et positive sur $[a, b]$, et si g est s-convexe sur $[a, b]$; $s \in]0, 1]$. Alors*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{(s+2)}M(a,b) + \frac{1}{(s+1)(s+2)}N(a,b), \tag{2.0.9}$$

et

$$2^s (fg)\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (fg)(x)dx + \frac{1}{(s+1)(s+2)}M(a,b) + \frac{1}{(s+2)}N(a,b). \tag{2.0.10}$$

Où : $M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$ *et* $N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$.

Preuve.

Puisque f est convexe et g est s-convexe, alors on a

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b),$$

$$g(ta + (1-t)b) \leq t^s g(a) + (1-t)^s g(b),$$

pour tout $t \in [0,1]$, f et g sont positives. Alors

$$(fg)(ta + (1-t)b) \leq t^{s+1}(fg)(a) + (1-t)^{s+1}(fg)(b) + t(1-t)^s f(a)g(b) + t^s(1-t)f(b)g(a).$$

En intégrant les deux côtés de l'inégalité sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(ta + (1-t)b)g(ta + (1-t)b)dt &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \\
&\leq \frac{1}{(s+2)}\left[f(a)g(a) + f(b)g(b)\right] \\
&\quad + \frac{1}{(s+1)(s+2)}\left[f(a)g(b) + f(b)g(a)\right].
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
(fg)\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{ta + (1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a + tb}{2}\right) g\left(\frac{ta + (1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a + tb}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{2^{s+1}}\left[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)\right]\left[g(ta + (1-t)b) + g((1-t)a + tb)\right] \\
&\leq \frac{1}{2^{s+1}}\left[(fg)(ta + (1-t)b) + (fg)((1-t)a + tb)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2^{s+1}}\left[tf(a) + (1-t)f(b)\right]\left[(1-t)^s g(a) + t^s g(b)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2^{s+1}}\left[(1-t)f(a) + tf(b)\right]\left[t^s g(a) + (1-t)^s g(b)\right] \\
&\leq \frac{1}{2^{s+1}}\left[(fg)(ta + (1-t)b) + (fg)((1-t)a + tb)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2^{s+1}}\left(t(1-t)^s + (1-t)t^s\right)\left[f(a)g(a) + f(b)g(b)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2^{s+1}}\left(t^{s+1} + (1-t)^{s+1}\right)\left[f(a)g(b) + f(b)g(a)\right].
\end{aligned}$$

On intègre sur $[0,1]$ on obtient le résultat. $\square$

Théorème 2.0.6 *Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in [0, +\infty[$, $a < b$ deux fonctions telle que g et$(fg) \in L^1([a,b])$. Si f est s_1-convexe et g est s_2-convexe sur $[a,b]$ pour $s \in]0,1]$, alors*

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx &\leq \frac{1}{s_1+s_2+1}M(a,b) + B(s_1+1, s_2+1)N(a,b) \qquad (2.0.11) \\ &= \frac{1}{s_1+s_2+1}\left[M(a,b) + s_1 s_2 \frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2+1)}N(a,b)\right], \end{aligned}$$

où : $M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$ et $N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$.

Preuve.

Puisque f est s_1-convexe et g est s_2-convexe sur $[a,b]$, alors on a

$$f(ta + (1-t)b) \leq t^{s_1} f(a) + (1-t)^{s_1} f(b),$$

$$g(ta + (1-t)b) \leq t^{s_2} g(a) + (1-t)^{s_2} g(b),$$

et comme f et g sont positives. Alors pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} (fg)(ta + (1-t)b) &\leq t^{s_1+s_2}(fg)(a) + t^{s_1}(1-t)^{s_2} f(a)g(b) \qquad (2.0.12) \\ &\quad + t^{s_2}(1-t)^{s_1} f(b)g(a) + (1-t)^{s_1+s_2}(fg)(b). \end{aligned}$$

On intègre l'inégalité (2.0.12) sur $[0,1]$, on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \\ \leq\ & \frac{1}{s_1+s_2+1}\left[(fg)(a) + (fg)(b)\right] + f(a)g(b)\int_0^1 t^{s_1}(1-t)^{s_2}dt + f(b)g(a)\int_0^1 t^{s_2}(1-t)^{s_1}dt \\ \leq\ & \frac{1}{s_1+s_2+1}\left[(fg)(a) + (fg)(b)\right] + f(a)g(b)B(s_1+1, s_2+1) + f(b)g(a)B(s_2+1, s_1+1) \\ =\ & \frac{1}{s_1+s_2+1}\left[(fg)(a) + (fg)(b)\right] + B(s_1+1, s_2+1)\left[f(a)g(b) + f(b)g(a)\right] \\ =\ & \frac{1}{s_1+s_2+1}\left[\left[(fg)(a) + (fg)(b)\right] + s_1 s_2 \frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2+1)}\left[f(a)g(b) + f(b)g(a)\right]\right]. \end{aligned}$$

□

Cas m-Convexe

Dans [5], Dragomir et Toader ont introduit l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour une fonction m-convexe comme suit :

Théorème 2.0.7 *Soit* $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *est une fonction* m*-convexe avec* $m \in]0,1]$ *si* $0 < a < b + \infty$ *et* $f \in L^1([0,b])$ *alors on a*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \min\left\{\frac{f(a)+mf\left(\frac{b}{m}\right)}{2}, \frac{f(b)+mf\left(\frac{a}{m}\right)}{2}\right\}. \tag{2.0.13}$$

Preuve.

Supposons que f est m-convexe. Alors on a

$$f(tx+m(1-t)y) \leq tf(x)+m(1-t)f(y),$$

posons $x = a$, $y = \frac{b}{m}$ avec $m \in]0,1]$. Alors on obtient

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+m(1-t)f\left(\frac{b}{m}\right),$$

et pour $x = b$, $y = \frac{a}{m}$ avec $m \in]0,1]$, on a

$$f(tb+(1-t)a) \leq tf(b)+m(1-t)f\left(\frac{a}{m}\right).$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq \frac{f(a)+mf\left(\frac{b}{m}\right)}{2},$$

et

$$\int_0^1 f(tb+(1-t)a)dt \leq \frac{f(b)+mf\left(\frac{a}{m}\right)}{2}.$$

On sait que $\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \int_0^1 f(tb+(1-t)a)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Donc

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \min\left\{\frac{f(a)+mf\left(\frac{b}{m}\right)}{2}, \frac{f(b)+mf\left(\frac{a}{m}\right)}{2}\right\}.$$

□

Dans [2] , M.K. Bakula, M.E. Ozdemir et J.Pecaric ont prouvé l'inégalité suivante :

Théorème 2.0.8 *Soit* $f, g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *telle que* $(fg) \in L^1([0,b])$ *où* $0 \leq a < b < +\infty$. *Si* f *est décroissante et* $m_1 -$ *convexe et si* g *est décroissante et* $m_2 -$ *convexe sur* $[a,b]$,*alors on a pour tout* m_1, $m_2 \in]0,1]$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \min\{M_1, M_2\}. \tag{2.0.14}$$

Où :

$$M_1 = \frac{1}{6}\left[f^2(a) + g^2(a) + m_1 f(a) f\left(\frac{b}{m_1}\right) + m_2 g(a) g\left(\frac{b}{m_2}\right) + m_1^2 f^2\left(\frac{b}{m_1}\right) + m_2^2 g^2\left(\frac{b}{m_2}\right)\right].$$

$$M_2 = \frac{1}{6}\left[f^2(b) + g^2(b) + m_1 f(b) f\left(\frac{a}{m_1}\right) + m_2 g(b) g\left(\frac{a}{m_2}\right) + m_1^2 f^2\left(\frac{a}{m_1}\right) + m_2^2 g^2\left(\frac{a}{m_2}\right)\right].$$

Preuve.

Puisque f est $m_1 - convexe$ et g est $m_2 - convexe$, alors on a

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + m_1(1-t) f\left(\frac{b}{m_1}\right),$$

et

$$g(ta + (1-t)b) \leq tg(a) + m_2(1-t) g\left(\frac{b}{m_2}\right).$$

On utillise l'inégalité élémentaire $cd \leq \frac{1}{2}\left(c^2 + d^2\right)$ $(c, d \in [0, +\infty[)$, alors on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\{f(ta + (1-t)b)\}^2 + \{g(ta + (1-t)b)\}^2\right] dt \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(tf(a) + m_1(1-t) f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right)^2 + \left(tg(a) + m_2(1-t) g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right)^2\right] dt \\
=\ & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}f^2(a) + \frac{1}{3}m_1^2 f^2\left(\frac{b}{m_1}\right) + \frac{1}{3}m_1 f(a) f\left(\frac{b}{m_1}\right) + \frac{1}{3}g^2(a) + \frac{1}{3}m_2^2 g^2\left(\frac{b}{m_2}\right) + \frac{1}{3}m_2 g(a) g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right] \\
=\ & \frac{1}{6}\left[f^2(a) + g^2(a) + m_1 f(a) f\left(\frac{b}{m_1}\right) + m_2 g(a) g\left(\frac{b}{m_2}\right) + m_1^2 f^2\left(\frac{b}{m_1}\right) + m_2^2 g^2\left(\frac{b}{m_2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \ \leq\ & \frac{1}{6}\left[f^2(b) + g^2(b) + m_1 f(b) f\left(\frac{a}{m_1}\right) + m_2 g(b) g\left(\frac{a}{m_2}\right)\right] \\
& + \frac{1}{6}\left[m_1^2 f^2\left(\frac{a}{m_1}\right) + m_2^2 g^2\left(\frac{a}{m_2}\right)\right].
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Cas (s,m)-Convexe

Dans [4], Dragomir et Fitzpatrick ont introduit l'inégalité suivante :

Théorème 2.0.9 *Soit* $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *est une fonction* (s,m)*-convexe, avec* $(s,m) \in (]0,1])^2$ *si* $0 < a < b < +\infty$ *et* $f \in L^1([a,b])$. *Alors on a*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \min\left\{\frac{f(a)+smf\left(\frac{b}{m}\right)}{s+1}, \frac{f(b)+smf\left(\frac{a}{m}\right)}{s+1}\right\}. \tag{2.0.15}$$

Preuve.

Supposons que f est (s,m)-convexe. Alors pour tous $(s,m) \in (]0,1])^2$ on a

$$f(tx+m(1-t)y) \leq t^s f(x) + m(1-t)^s f(y),$$

posons $x = a$, $y = \frac{b}{m}$ alors on obtient

$$f(ta+(1-t)b) \leq t^s f(a) + m(1-t)^s f\left(\frac{b}{m}\right),$$

et pour $x = b$, $y = \frac{a}{m}$. On a

$$f(tb+(1-t)a) \leq t^s f(b) + m(1-t)^s f\left(\frac{a}{m}\right).$$

Pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq \frac{f(a)+smf\left(\frac{b}{m}\right)}{s+1}.$$

Et

$$\int_0^1 f(tb+(1-t)a)dt \leq \frac{f(b)+smf\left(\frac{a}{m}\right)}{s+1}.$$

Ce qui implique que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \min\left\{\frac{f(a)+smf\left(\frac{b}{m}\right)}{s+1}, \frac{f(b)+smf\left(\frac{a}{m}\right)}{s+1}\right\}.$$

□

Cas h-Convexe

Dans [14], Sarikaya et al. ont établi l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour une fonction h-convexe comme suit

Théorème 2.0.10 *Soit* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction* $h-$*convexe sur* I *et* $a, b \in I$, *avec* $a < b$ *et* $f \in L^1([a,b])$. *Alors on a*

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq (f(a)+f(b))\int_0^1 h(\alpha)d\alpha. \tag{2.0.16}$$

Preuve.

On suppose que f est $h-$convexe sur I, c'est à dire

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq h(\alpha)f(x)+h(1-\alpha)f(y),\quad \forall\alpha>0. \tag{2.0.17}$$

On pose que $x=ta+(1-t)b$, $y=(1-t)a+tb$ et $\alpha=\frac{1}{2}$, on obtient

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left(f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\right),$$

et puis on intègre sur $[0,1]$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Donc

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

D'où la première inégalité est prouvée.

Soit $x=a$, $y=b$ dans l'inégalité $(2.0.17)$, puis en intégrant par rapport à α sur $[0,1]$ on trouve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq(f(a)+f(b))\int_0^1 h(\alpha)d\alpha.$$

D'où le résultat. □

Théorème 2.0.11 *Soient $f\in SX(h_1,I)$, $g\in SX(h_2,I)$, $a,b\in I$ avec $a<b$ telle que $fg\in L^1([a,b])$, $h_1h_2\in L^1([0,1])$. Alors*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b(fg)(x)dx\leq M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt+N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt, \tag{2.0.18}$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)}(fg)\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b(fg)(x)dx \qquad (2.0.19)\\ \leq\ & M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt+N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt.\end{aligned}$$

Où : $M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b)$ et $N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$.

Preuve.

Soit $f\in SX(h_1,I)$ et $g\in SX(h_2,I)$, on a

$$f(ta+(1-t)b)\leq h_1(t)f(a)+h_1(1-t)f(b),$$

$$g(ta+(1-t)b) \leq h_2(t)g(a)+h_2(1-t)g(b).$$

Alors

$$\begin{aligned} f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) &\leq h_1(t)h_2(t)\left(fg\right)(a)+h_1(1-t)h_2(1-t)\left(fg\right)(b)+ \\ &\quad +h_1(t)h_2(1-t)f(a)g(b)+h_1(1-t)h_2(t)f(b)g(a). \end{aligned}$$

Puis on intègre sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt &\leq \left[\left(fg\right)(a)+\left(fg\right)(b)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt+ \\ &\quad +\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx &\leq \left[\left(fg\right)(a)+\left(fg\right)(b)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt \\ &\quad +\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt. \end{aligned}$$

D'où la première inégalité.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\ &\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right] \\ &\quad \times h_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[g\left(ta+(1-t)b\right)+g\left((1-t)a+tb\right)\right] \\ &\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(fg\right)\left(ta+(1-t)b\right)+\left(fg\right)\left((1-t)a+tb\right) \\ &\quad +h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(t)f(a)+h_1(1-t)f(b)\right]\left[h_2(1-t)g(a)+h_2(t)g(b)\right] \\ &\quad +h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[h_1(1-t)f(a)+h_1(t)f(b)\right]\left[h_2(t)g(a)+h_2(1-t)g(b)\right], \end{aligned}$$

puis on intègre sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)}\left(fg\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(fg\right)(x)dx \\ \leq\ &\left[\left(fg\right)(a)+\left(fg\right)(b)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt+\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt. \end{aligned}$$

□

Cas Log-Convexe

Dans [6] , Gill et al. ont établi l'inégalité suivante :

Théorème 2.0.12 *Soit* $f : I \to]0, +\infty[$ *est une fonction* log-*convexe, si* $0 < a < b < +\infty$, *on a*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right) \leq \sqrt{f(a)f(b)}. \tag{2.0.20}$$

et

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq L\left(f(a), f(b)\right). \tag{2.0.21}$$

Avec $L(a,b)$ *est la moyenne logarithmique des nombres réels positifs* a *et* b *telle que :*

$$L\left(a,b\right) = \begin{cases} \frac{a-b}{\ln a - \ln b} & ; \quad a \neq b \\ a & ; \quad a = b \end{cases}.$$

Preuve.

On suppose que f est une fonction log-convexe, alors $\log f(x)$ est convexe donc l'inégalité d'Hermite-Hadamard donne

$$\ln f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx \leq \frac{\ln f(a) + \ln f(b)}{2}.$$

Ce qui implique que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right) \leq \sqrt{f(a)f(b)}.$$

D'où le résultat.

Pour l'inégalité (2.0.21), on suppose que $f(a) \neq f(b)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt \\
&\leq \int_0^1 f(a)^{1-t} f(b)^t dt \\
&= f(a)\int_0^1 \left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^t dt \\
&= f(a)\left[\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^t / \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{f(b) - f(a)}{\ln f(b) - \ln f(a)} = L\left(f(a), f(b)\right).
\end{aligned}$$

Pour $f(a) = f(b)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt \\ &\leq \int_0^1 f(a)dt = L(f(a), f(a)).\end{aligned}$$

□

Dans [13] , B. G. Pachpatte ont prouvé l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour le produit des fonctions log-convexes suivante :

Théorème 2.0.13 *Soient $f, g : I \to]0, +\infty[$ deux fonctions* log-*convexe sur I et $a, b \in I$ avec $a < b$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)f(a+b-x)+g(x)g(a+b-x)]\,dx\right\} \\ &\leq \frac{f(a)f(b)+g(a)g(b)}{2}. \end{aligned} \tag{2.0.22}$$

Preuve.

On a

$$\frac{a+b}{2} = \frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}.$$

On utilisant l'inégalité élémentaire $cd \leq \frac{1}{2}[c^2+d^2]$ $(c, d \in [0, +\infty[)$, alors on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)+g^2\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[f^2\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)+tb}{2}\right)+g^2\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)+tb}{2}\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\left[(f(ta+(1-t)b))^{\frac{1}{2}}\right]^2\left[(f((1-t)a+tb))^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}\left[(g(ta+(1-t)b))^{\frac{1}{2}}\right]^2\left[(g((1-t)a+tb))^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\ &\leq \frac{1}{2}[f(ta+(1-t)b)f((1-t)a+tb)+g(ta+(1-t)b)g((1-t)a+tb)] \\ &\leq \frac{f(a)f(b)+g(a)g(b)}{2}, \end{aligned}$$

et puis on intègre sur $[0, 1]$. On aura

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)f(a+b-x)+g(x)g(a+b-x)]\,dx\right] \\ &\leq \frac{f(a)f(b)+g(a)g(b)}{2}. \end{aligned}$$

□

Cas r-Convexe

Dans [6] , Gill et al. ont établit l'inégalité suivante :

Théorème 2.0.14 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction positive et r-convexe sur $[a, b]$, alors*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq L_r\left(f(a), f(b)\right), \tag{2.0.23}$$

avec

$$L_r(x,y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1}\frac{x^{r+1}-y^{r+1}}{x^r-y^r} & ; \quad r \neq 0,-1 \quad , \quad x \neq y \\ \frac{x-y}{\ln x - \ln y} & ; \quad r = 0 \quad , \quad x \neq y \\ xy\frac{\ln x - \ln y}{x-y} & ; \quad r = -1 \quad , \quad x \neq y \\ x & ; \quad x = y \end{cases}$$

Où : $L_r(x, y)$ est la moyenne logarithmique d'ordre r des nombres positifs a, b.

Preuve. • Si : $r \neq 0, -1$ et $f(a) \neq f(b)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt \\ &\leq \int_0^1 \left((1-t)f(a)^r + tf(b)^r\right)^{\frac{1}{r}} dt. \end{aligned}$$

On pose $t\left(f(b)^r - f(a)^r\right) + f(a)^r = S$ on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &\leq \frac{1}{f(b)^r - f(a)^r}\int_{f(a)^r}^{f(b)^r} S^{\frac{1}{r}} dS \\ &= \frac{r}{r+1}\frac{f(b)^{r+1} - f(a)^{r+1}}{f(b)^r - f(a)^r} = L_r\left(f(a), f(b)\right). \end{aligned}$$

Pour $f(a) = f(b)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &\leq \int_0^1 \left(tf(a)^r + (1-t)f(a)^r\right)^{\frac{1}{r}} dt \\ &= f(a) = L_r\left(f(a), f(a)\right). \end{aligned}$$

• Pour $r = -1$ et $f(a) \neq f(b)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &\leq \int_0^1 \left(tf(b)^{-1} + (1-t)f(a)^{-1}\right)^{-1} dt \\ &= \frac{1}{f(b)^{-1} - f(a)^{-1}}\int_{f(a)^{-1}}^{f(b)^{-1}} t^{-1} dt \\ &= \frac{1}{f(b)^{-1} - f(a)^{-1}}\left(\ln\left(\frac{1}{f(b)}\right) - \ln\left(\frac{1}{f(a)}\right)\right) \\ &= L_{-1}\left(f(a), f(b)\right). \end{aligned}$$

Pour $f(a) = f(b)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &\leq \int_0^1 \left(tf(a)^{-1} + (1-t)f(a)^{-1}\right)^{-1} dt \\ &= f(a)^{-1} = L_{-1}\left(f(a), f(a)\right). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Dans [18] , Zabandan et al. ont définit l'inégalité suivante :

Théorème 2.0.15 *Soient $f, g : [a, b] \to]0, +\infty[$ sont deux fonctions r-convexe et 0-convexe réspictivement sur $[a, b]$ et $r > 0$ alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b (fg)(x)dx &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r+2}\right)\left(\frac{f(b)^{r+2} - f(a)^{r+2}}{f(b)^r - f(a)^r}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4}\left[g(b)^2 - g(a)^2\right]\ln\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right). \end{aligned} \tag{2.0.24}$$

$(f(a) \neq f(b))$.

Preuve. Puisque f est r-convexe et g est 0-convexe, pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$f(ta + (1-t)b) \leq \left(tf(a)^r + (1-t)f(b)^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$g(ta + (1-t)b) \leq [g(a)]^t [g(b)]^{1-t},$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_0^1 f(ta + (1-t)b)g(ta + (1-t)b)dt \\ &\leq \int_0^1 \left[tf(a)^r + (1-t)f(b)^r\right]^{\frac{1}{r}} [g(a)]^t [g(b)]^{1-t} dt. \end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy on a

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left[tf(a)^r + (1-t)f(b)^r\right]^{\frac{1}{r}} [g(a)]^t [g(b)]^{1-t} dt \\ \leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \left[tf(a)^r + (1-t)f(b)^r\right]^{\frac{2}{r}} dt + \frac{1}{2}\int_0^1 [g(a)]^{2t} [g(b)]^{2-2t} dt. \end{aligned} \tag{2.0.25}$$

On pose $S = t\left(f(a)^r - f(b)^r\right) + f(b)^r$ on trouve

$$\int_0^1 \left[tf(a)^r + (1-t)f(b)^r\right]^{\frac{2}{r}} dt = \left(\frac{r}{r+2}\right)\left(\frac{f(b)^{r+2} - f(a)^{r+2}}{f(b)^r - f(a)^r}\right), \tag{2.0.26}$$

Et

$$\int_0^1 [g(a)]^{2t} [g(b)]^{2-2t} dt = \frac{1}{2}\left[g(b)^2 - g(a)^2\right]\ln\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right). \tag{2.0.27}$$

En utilisant (2.0.25) , (2.0.26) et (2.0.27). Nous pouvons obtenir le résultat souhaité. □

Chapitre 3

Les Inégalités d'Hermite-Hadamard-Fejér

Dans ce chapitre, on va rappeler certaines inégalités du type Hermite-Hadamard-Fejér.

Cas Convexe

Dans [3] , F. Chen a introduit l'inégalité d'Hermite-Hadamard-Fejér pour une fonction convexe comme suit :

Théorème 3.0.16 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction positive, intégrable et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. Alors on a*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \leq \int_a^b f(x)w(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx. \tag{3.0.1}$$

Preuve.

Supposons que f est convexe sur $[a, b]$, alors pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(ta+(1-t)b)+f(tb+(1-t)a)}{2}. \tag{3.0.2}$$

En multipliant l'inégalité (3.0.2) par $2w(tb + (1 - t)a)$ et puis on intégrant l'inégalité par rapport à t sur $[0, 1]$, on obtient

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 w(tb+(1-t)a)dt \leq \int_0^1 \left[f(ta+(1-t)b)+f(tb+(1-t)a)\right] w(tb+(1-t)a)dt,$$

posons $x = tb + (1-t)a$. Donc on a

$$\begin{aligned}\frac{2}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx &\leq \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f(a+b-x)w(x)dx + \int_a^b f(x)w(x)dx\right] \\ &\leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)w(x)dx.\end{aligned}$$

D'où la première inégalité de (3.0.1) à été prouvée.

Pour la deuxième inégalité, puisque f est convexe alors pour tout $t \in [0,1]$. On a

$$f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a) \leq f(a) + f(b).$$

En multipliant les deux cotés par $w(tb + (1-t)a)$ puis en intégrant l'inégalité par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f(ta + (1-t)b)w(tb + (1-t)a)dt + \int_0^1 f(tb + (1-t)a)w(tb + (1-t)a)dt \\ \leq\ & [f(a) + f(b)]\int_0^1 w(tb + (1-t)a)dt.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx.$$

□

Cas m-Convexe

Dans [16], Tseng, Hwang et Dragomir ont établi l'inégalité suivante :

Théorème 3.0.17 *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction m-convexe avec $m \in]0,1]$, $w : [a,b] \to \mathbb{R}$, $w \geq 0$ est une fonction positive, intégrable et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$, alors on a*

$$\int_a^b f(x)\, w(x)dx \leq \min\left\{\frac{f(a) + mf\left(\frac{b}{m}\right)}{2}, \frac{f(b) + mf\left(\frac{a}{m}\right)}{2}\right\}\int_a^b w(x)dx. \tag{3.0.3}$$

Preuve.

Puisque f est m-convexe et w est positive, intégrable et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$, alors on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,w(x)dx &= \frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\,w(x)dx + \int_a^b f(a+b-x)\,w(a+b-x)dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \left[f(x)+f(a+b-x)\right]w(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \left[f\left(\frac{b-x}{b-a}a + m\frac{x-a}{b-a}\frac{b}{m}\right)\right. \\
&\quad \left. + f\left(\frac{x-a}{b-a}a + m\frac{b-x}{b-a}\frac{b}{m}\right)\right]w(x)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_a^b \left[\frac{b-x}{b-a}f(a) + m\frac{x-a}{b-a}f\left(\frac{b}{m}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{x-a}{b-a}f(a) + m\frac{b-x}{b-a}f\left(\frac{b}{m}\right)\right]w(x)dx \\
&= \frac{f(a)+mf\left(\frac{b}{m}\right)}{2}\int_a^b w(x)dx. \qquad (3.0.4)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,w(x)dx &= \frac{1}{2}\int_a^b \left[f(x)+f(a+b-x)\right]w(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \left[f\left(m\frac{b-x}{b-a}\frac{a}{m} + \frac{x-a}{b-a}b\right)\right. \\
&\quad \left. + f\left(m\frac{x-a}{b-a}\frac{a}{m} + \frac{b-x}{b-a}b\right)\right]w(x)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_a^b \left[m\frac{b-x}{b-a}f\left(\frac{a}{m}\right) + \frac{x-a}{b-a}f(b)\right. \\
&\quad \left. + m\frac{x-a}{b-a}f\left(\frac{a}{m}\right) + \frac{b-x}{b-a}f(b)\right]w(x)dx \\
&= \frac{mf\left(\frac{a}{m}\right)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx. \qquad (3.0.5)
\end{aligned}$$

De (3.0.4) et (3.0.5) on obtient le résultat. □

Cas h-Convexe

Dans [1] , Bombardelli et Varosanec ont introduit l'inégalité suivante :

Théorème 3.0.18 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction h-convexe, $w : [a,b] \to \mathbb{R}$, $w \geq 0$ est une fonction positive, intégrable et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. Alors on a*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)w(t)dt \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 h(t)w(ta+(1-t))dt. \tag{3.0.6}$$

Preuve.

Puisque f est h-convexe, alors on a pour tout $x \in [a,b]$ et $\alpha \in [0,1]$

$$f(\alpha a+(1-\alpha)b)w(\alpha a+(1-\alpha)b) \leq [h(\alpha)f(a)+h(1-\alpha)f(b)]\, w(\alpha a+(1-\alpha)b). \tag{3.0.7}$$

$$f((1-\alpha)a+\alpha b)w((1-\alpha)a+\alpha b) \leq [h(1-\alpha)f(a)+h(\alpha)f(b)]\, w((1-\alpha)a+\alpha b). \tag{3.0.8}$$

De (3.0.7) et (3.0.8) , on a

$$\begin{aligned}
& f(\alpha a+(1-\alpha)b)w(\alpha a+(1-\alpha)b)+f((1-\alpha)a+\alpha b)w((1-\alpha)a+\alpha b) \\
\leq\ & [h(\alpha)f(a)+h(1-\alpha)f(b)]\, w(\alpha a+(1-\alpha)b)+[h(1-\alpha)f(a)+h(\alpha)f(b)]\, w((1-\alpha)a+\alpha b),
\end{aligned}$$

et puis on intègre par rapport à α sur $[0,1]$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f(\alpha a+(1-\alpha)b)w(\alpha a+(1-\alpha)b)d\alpha+\int_0^1 f((1-\alpha)a+\alpha b)w((1-\alpha)a+\alpha b)d\alpha \\
\leq\ & \int_0^1 [h(\alpha)f(a)+h(1-\alpha)f(b)]\, w(\alpha a+(1-\alpha)b)d\alpha \\
& +\int_0^1 [h(1-\alpha)f(a)+h(\alpha)f(b)]\, w((1-\alpha)a+\alpha b)d\alpha \\
=\ & \int_0^1 f(a)\,[h(\alpha)w(\alpha a+(1-\alpha)b)+h(1-\alpha)w((1-\alpha)a+\alpha b)]\, d\alpha+ \\
& +\int_0^1 f(b)\,[h(1-\alpha)w(\alpha a+(1-\alpha)b)+h(\alpha)w((1-\alpha)a+\alpha b)]\, d\alpha \\
=\ & 2f(a)\int_0^1 h(t)w(ta+(1-t)b)dt+2f(b)\int_0^1 h(t)w((1-t)a+tb)dt.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)w(t)dt \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 h(t)w(ta+(1-t))dt.$$

□

CONCLUSION

Le but de ce mémoire est de décrire le panorama des mathématiques de la célèbre inégalité d'Hermite et Hadamard. nous avons présenté des nouvelles inégalités intégrales pour les fonctions non négatives et intégrables liées au résultat d'Hermite-Hadamard. Ces inégalités nous donnent une éstimation de la valeur moyenne (intégrale) d'une fonction convexe continue. les résultats obtenus dans ce travail sont les raffinements des résultats actuels.

Bibliographie

[1] M. Bombardelli and S. Varosanec : *Properties of h -convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejèr inequalities*. Comput. Math. Appl. 58, 9 (2009).

[2] M.K. Bakula, M.E. Ozdemir and J. Pecaric : *Hadamard type inequalities for m-convex and (s,m)-convex functions*. JIPAM, J. Inequal. Pure Appl. Math., 9 (2008), 12 pages.

[3] F. Chen : *A note on Hermite-Hadamard inequalities for products of convex functions*. Journal of Applied Mathematics.(2013).

[4] S.S. Dragomir and S. Fitzpatrick : *The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense*. Demonstratio Math., 32 (4) (1999), 687-696.

[5] S.S. Dragomir and G.H. Toader : *Some inequalities for m-convex functions,* Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math. 38 (1) (1993), 21–28.

[6] P.M. Gill, C.E.M. Pearce and J. Pecaric : *Hadamard's inequality for r -convex functions*. J.Math. Anal. Appl., 215 (1997), 461-470.

[7] H.Hudzik and L.Maligranda : *Some remarks on s-convex functions*. Aequationes Math. 48 (1994), 100–111.

[8] J. Hadamard. *Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d'une fonction considree par Riemann*. J. Math. Pures et Appl. 58 (1893), 171–215.

[9] Ch. Hermite. *Sur deux limites d'une integrale definie*. Mathesis 3 (1883), 82.

[10] U. S. Kirmaci, M. K. Bakula, M. E. Ozdemir and J. Pecaric. *Hadamard type inequalities for s -convex function*. Appl. Math. and Compt, 193 (2007), 2635.

[11] V.G. Mihşen. *A generalizations of the convexity*, Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex. Cluj-Napoca (Romania) 1993.

[12] B. G. Pachpatte, *On some inequalities for convex functions*, RGMIA Res. Rep. Coll. 6 (2003).

[13] B. G. Pachpatte. *A note on integral inequalities involving two log-convex functions.* Mathematical Inequalities & Applications, vol. 7, no. 4, pp. 511–515, 2004.

[14] M. Z. Sarikaya, Saglam, A, and Yildirim, H. *On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions.* J. Math. Inequal (2008), 2(3), 335-341.

[15] G.H.Toader. *Some generalisations of the convexity.* Proc.Colloq.Approx.Optim. (1984), 329–338.

[16] K.L. Tseng, S.R. Hwang, and S.S. Dragomir. *On some new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejer type involving convex functions.* Demons. Math., 40(1)(2007).

[17] S. Varosanec. *On h-convexity.* J. Math. Anal. Appl. 326 (1) (2007), 303–311.

[18] G. Zabandan, Bodaghi, A, and Kılıçman. A. *The Hermite-Hadamard inequality for r-convex functions.* Journal of Inequalities and Applications, 2012(1), 215.

[19] W. Orlicz. *A note on modular spaces.* I, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys., 9 (1961), 157–162.